p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

Pemodelan Regresi Weibull Pada Data Kontinu Yang Diklasifikasikan (Studi kasus: Data Indikator Pencemaran Air *Dissolved Oxygen* Pada DAS Mahakam Kalimantan Timur Tahun 2020)

Weibull Regression Modeling to Classified Continuous Data (Case Study: Water Pollution Indicator of Dissolved Oxygen Data in the Mahakam Watershed of East Kalimantan in 2020)

Alfiannur Rizki Sudarman[1,a], Suyitno[1], dan Meiliyani Siringoringo[2]
[1]Laboratorium Statistika Terapan Fakultas MIPA, Universitas Mulawarman
[2]Laboratorium Statistika Ekonomi Bisnis, Fakultas MIPA, Universitas Mulawarman

[a]*Corresponding email: rizkialfiannur5@gmail.com*

ABSTRACT
Weibull regression model is a Weibull distribution that is directly influenced by covariates. Weibull regression models discussed in this study are Weibull survival regression model, Weibull hazard regression, and Weibull mean regression. The Weibull regression model in this study was applied to water pollution indicator of dissolved oxygen (DO) data in the Mahakam watershed of East Kalimantan in 2020. The purpose of this study was to obtain a Weibull regression model for water pollution indicator of DO data, to obtain the factors that influence the Weibull regression model, and to interpretation the Weibull regression model of water pollution indicator of DO data. The study's result is that the Newton-Raphson iterative approach was used to find the approximate of maximum likelihood estimator. Based on the hypothesis testing, it is concluded the factors that influence the water pollution indicator of DO data the Mahakam watershed in 2020 are total suspended solid (TSS), total dissolved solid (TDS), nitrate and ammonia.

Keywords: *DO, Weibull Regression Model, Newton-Raphson Iterative Method*

1. Pendahuluan

Distribusi Weibull merupakan distribusi peluang kontinu. Salah satu bentuk khusus distribusi Weibull adalah distribusi Weibull yang memuat dua parameter, yaitu parameter skala dan bentuk. Distribusi Weibull dapat diterapkan pada berbagai bidang, seperti ekonomi, kesehatan, lingkungan dan teknik. Pembahasan tentang distribusi Weibull pada umumnya hanya terbatas pada penaksiran parameter dan pengujian distribusi data. Distribusi Weibull dalam pengembangannya, parameter skala dan parameter bentuk bisa bergantung atau dipengaruhi langsung oleh kovariat yang akan menghasilkan model regresi Weibull (Rinne, 2009).

Model-model regresi Weibull antara lain adalah model regresi *survival* Weibull, model regresi untuk *mean* dan model regresi *hazard* Weibull (Suyitno, 2017). Data lapangan di beberapa bidang seperti bidang lingkungan dan kesehatan ditemui berdistribusi Weibull (Rahmah, Suyitno & Siringoringo, 2021; Yanti, Suyitno & Purnamasari, 2022). Permasalahan dalam bidang kesehatan dan lingkungan dapat diselesaikan menggunakan pemodelan regresi Weibull. Salah satu permasalahan di bidang lingkungan adalah ada indikasi air Sungai Mahakam tercemar, akibat dari banyak aktivitas di Daerah Aliran Sungai (DAS) Sungai Mahakam.

DAS Sungai Mahakam memiliki peranan penting bagi kehidupan masyarakat Kalimantan Timur sejak dulu hingga kini, yaitu sebagai sumber air bersih, perikanan maupun jalur transportasi air. DAS Mahakam merupakan pusat kegiatan antara lain sektor industri, kehutanan, pertambangan, dan pusat kegiatan ekonomi masyarakat yang berpotensi menghasilkan limbah. Adanya limbah dalam aliran sungai menyebabkan air sungai terancam oleh pencemaran. Air sungai yang tercemar akan menurunkan kualitas air, sehingga kesehatan makhluk hidup akan terancam.

Perlu ada upaya pencegahan pencemaran air Sungai Mahakam yang dilakukan oleh pemerintah dan masyarakat. Salah satu upaya pencegahan pencemaran air Sungai Mahakam adalah memberikan informasi kepada masyarakat mengenai faktor-faktor yang berpengaruh terhadap meningkatnya peluang air Sungai Mahakam tercemar dengan pemodelan statistika, yaitu pemodelan regresi Weibull. Informasi ini sangat berguna agar masyarakat mengetahui hal-hal yang menyebabkan air sungai Mahakam tercemar. Informasi ini juga berguna bagi pemerintah sebagai rujukan dalam pengambilan keputusan terkait upaya pencegahan pencemaran air sungai Mahakam.

Berdasarkan PERDA Kalimantan Timur No. 2 Tahun 2011 Kondisi air di sungai yang tercemar dapat dipantau dengan mengamati kondisi suhu, warna, rasa dan kekeruhan air yang merupakan parameter fisikanya dan parameter kimianya yaitu Amonia, *Biochemical Oxygen Demand* (BOD), *Chemical Oxygen Demand* (COD), dan *Dissolved oxygen* (DO). Oksigen terlarut atau DO merupakan indikator kualitas air. DO dapat dinyatakan dalam mg/l (milligram per liter) atau ppm (*part per million*) (Salmin, 2005). Berdasarkan Peraturan

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

Pemerintah No. 82 Tahun 2001 tentang pengelolaan kualitas air dan pengendalian pencemaran air menyatakan batas minimum kadar oksigen dalam air atau DO untuk mutu air kelas 1 adalah 6 mg/l atau ppm.

Berdasarkan permasalahan tersebut maka penelitian ini membahas model regresi Weibull pada data indikator pencemaran air di Daerah Aliran Sungai Mahakam. Penelitian ini dibatasi pada data indikator pencemaran air DO pada DAS Mahakam. Tujuan penelitian ini adalah memperoleh model regresi Weibull data indikator pencemaran air DO, memperoleh faktor-faktor yang berpengaruh terhadap model regresi Weibull data indikator pencemaran air DO dan memperoleh interpretasinya berdasarkan model yang diperoleh.

2. Tinjauan Pustaka

2.1 Distribusi Weibull

Fungsi kepadatan peluang (FKP) peubah acak kontinu non-negatif *Y* berdistribusi Weibull dengan tiga parameter adalah

$$f(y)=\frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{y-\delta}{\lambda}\right)^{\gamma-1}\exp\left[-\left(\frac{y-\delta}{\lambda}\right)^{\gamma}\right], \tag{1}$$

dengan $y \geq 0; \gamma > 0; \lambda > 0$, dimana γ adalah parameter bentuk (*shape*) dan λ adalah parameter skala (*scale*) dan δ adalah parameter lokasi. Bentuk khusus distribusi Weibull adalah distribusi Weibull versi skala bentuk yang memuat dua parameter, yaitu parameter skala dan bentuk, dengan FKP adalah (Rinne, 2009)

$$f(y)=\frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma-1}\exp\left[-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma}\right]. \tag{2}$$

Fungsi *survival* distribusi Weibull versi skala bentuk adalah

$$S(y)=P(Y\geq y)=\exp\left[-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma}\right]. \tag{3}$$

Fungsi distribusi kumulatif adalah

$$F(y)=P(Y\leq y)=1-S(y)=1-\exp\left[-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma}\right]. \tag{4}$$

Berdasarkan Persamaan (2) dan (3), diperoleh fungsi hazard, yaitu

$$h(y)=\frac{f(y)}{S(y)}=\frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma-1}. \tag{5}$$

Momen ke-*r* distribusi Weibull versi skala-bentuk dengan FKP pada Persamaan (2) dapat dinyatakan dalam bentuk umum, yaitu

$$E(Y^r)=\lambda^r\Gamma_r\left(\frac{r}{y}+1\right), \tag{6}$$

dengan Γ adalah fungsi Gamma dan Γ_r didefinisikan oleh

$$\Gamma_r=\Gamma\left(\frac{r}{\gamma}+1\right). \tag{7}$$

Berdasarkan Persamaan (6) diperoleh *mean* dan variansi peubah acak *Y* secara berturut-turut sebagai berikut

$$\mu_Y=E(Y)=\lambda\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}+1\right), \tag{8}$$

dan (Suyitno, 2017)

$$\mathrm{var}(Y)=E\left(Y^2\right)-\left[E(Y)\right]^2=\lambda^2\left(\Gamma_2-\Gamma_1^2\right). \tag{9}$$

Penaksiran parameter distribusi Weibull menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) yaitu dengan memaksimumkan fungsi *likelihood* (Casella & Berger, 2002). Tahap awal metode MLE adalah mendefinisikan fungsi *likelihood.* Misalkan diketahui data sampel $y_1, y_2, \cdots, y_n$ saling bebas dan berdistribusi identik yaitu $y_i \sim W(\lambda,\gamma), i = 1, 2, \ldots, n$. Berdasarkan FKP pada Persamaan (2), fungsi *likelihood* adalah

$$L(\boldsymbol{\theta}_1,\mathbf{y})=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^{\gamma-1}\right)\exp\left[-\left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^{\gamma}\right]. \tag{10}$$

Penaksir $\boldsymbol{\theta}_1=\left[\lambda\ \gamma\right]^T$ yang memaksimumkan fungsi *likelihood* (10) lebih mudah diperoleh dengan memaksimumkan fungsi *log-likelihood*. Penaksir $\boldsymbol{\theta}_1$ yang memaksimumkan fungsi *likelihood* Persamaan (10) juga memaksimumkan fungsi *log-likelihood*-nya. Penerapan logaritma natural kedua ruas Persamaan (10), diperoleh fungsi *log-likelihood* sebagai berikut

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

$$\ell(\boldsymbol{\theta}_1,\mathbf{y})=\ln\left[L(\boldsymbol{\theta}_1,\mathbf{y})\right]=\sum_{i=1}^{n}\ln\left[h(y_i)S(y_i)\right]=\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\gamma-\ln\lambda+(\gamma-1)\left[\ln y_i-\ln\lambda\right]\right)-\left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^{\gamma}. \tag{11}$$

Vektor $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1=\left[\hat{\lambda}\ \hat{\gamma}\right]^T$ adalah penaksir $\boldsymbol{\theta}_1$ yang didapat dari turunan pertama fungsi *log-likelihood* (11) terhadap semua komponen parameter $\boldsymbol{\theta}_1$ kemudian disamakan dengan nol dan diperoleh

$$\frac{\partial\ell(\boldsymbol{\theta}_1,\mathbf{y})}{\partial\boldsymbol{\theta}_1}=\mathbf{0}. \tag{12}$$

Ruas kiri pada Persamaan (12) disebut juga vektor gradien (**g**), yaitu

$$g(\boldsymbol{\theta}_1)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\ell(\boldsymbol{\theta}_1,\mathbf{y})}{\partial\lambda}\\ \dfrac{\partial\ell(\boldsymbol{\theta}_1,\mathbf{y})}{\partial\gamma}\end{bmatrix}. \tag{13}$$

Komponen-komponen vektor gradien (13) masing-masing dinyatakan dalam bentuk umum sebagai berikut

$$\frac{\partial\ell(\boldsymbol{\theta}_1,y)}{\partial\lambda}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\left(\ln\gamma-\ln\lambda+(\gamma-1)\left[\ln y_i-\ln\lambda\right]\right)-\left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^{\gamma}\right]\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(-\frac{1}{\lambda}-(\gamma-1)\frac{1}{\lambda}\right)\right]-\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)\left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^{\gamma}\right], \tag{14}$$

dan

$$\frac{\partial\ell(\boldsymbol{\theta}_1,y)}{\partial\gamma}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\left(\ln\gamma-\ln\lambda+(\gamma-1)\left[\ln y_i-\ln\lambda\right]\right)-\left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^{\gamma}\right]\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\gamma}+\left[\ln y_i-\ln\lambda\right]-\left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^{\gamma}+\left[\ln y_i-\ln\lambda\right]\right). \tag{15}$$

Berdasarkan Persamaan (14) dan (15), persamaan *likelihood* terdiri dari persamaan-persamaan nonlinier dan saling bergantungan, sehingga untuk mendapatkan penaksiran *maximum likelihood* (ML) eksak tidak dapat diselesaikan secara analitis. Metode alternatif untuk mendapatkan penaksir ML $(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1)$ adalah metode iteratif Newton-Raphson. Algoritma iterasi Newton-Raphson sebagai berikut

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(q+1)}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(q)}-[\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(q)})]^{-1}\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(q)}),q=0,1,2... \tag{16}$$

dengan **g** merupakan vektor gradien yang diberikan oleh Persamaan (13) dan $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_1)$ adalah matriks Hessian, yaitu matrik turunan parsial orde kedua fungsi *log-likelihood* (11) terhadap semua kombinasi vektor parameter $\boldsymbol{\theta}_1$. Bentuk umum dari matriks Hessian adalah

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_1)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2\ell(\boldsymbol{\theta}_1,y)}{\partial\lambda^2} & \dfrac{\partial^2\ell(\boldsymbol{\theta}_1,y)}{\partial\lambda\partial\gamma}\\ \dfrac{\partial^2\ell(\boldsymbol{\theta}_1,y)}{\partial\gamma\partial\lambda} & \dfrac{\partial^2\ell(\boldsymbol{\theta}_1,y)}{\partial\gamma^2}\end{bmatrix}. \tag{17}$$

Elemen-elemen matriks Hessian yang diberikan oleh Persamaan (17) sebagai berikut

$$\frac{\partial^2\ell(\boldsymbol{\theta}_1,y)}{\partial\lambda^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{\gamma}{\lambda^2}\right)\right)-\sum_{i=1}^{n}(1+\gamma)\frac{\gamma}{\lambda^2}\left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^{\gamma}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2\ell(\boldsymbol{\theta}_1,y)}{\partial\gamma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{\gamma^2}-\left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^{\gamma}\left[\ln y_i-\ln\lambda\right]^2\right), \tag{19}$$

dan

$$\frac{\partial^2\ell(\boldsymbol{\theta}_1,y)}{\partial\gamma\partial\lambda}=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda}\left(\gamma\ln\left(\frac{y_i}{\lambda}\right)+1\right)\left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^{\gamma}. \tag{20}$$

Proses iterasi Newton-Raphson dimulai dengan penentuan nilai awal $\left[\hat{\lambda}^{(0)}\ \ \hat{\gamma}^{(0)}\right]$, dan iterasi akan dihentikan pada iterasi ke q+1 , jika nilai dari $\left\|\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q+1)}-\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q)}\right\|\le\varepsilon$, di mana ε merupakan bilangan real positif kecil misalnya 10^{-12} (Suyitno, 2017).

2.2 Pengujian Distribusi

Pengujian distribusi data dapat dilakukan dengan uji Kolmogorov-Smirnov. Misalkan ingin diketahui apakah suatu data berdistribusi Weibull dengan fungsi distribusi $F^*(y)$. Hipotesis pengujian distribusi adalah

$H_0: F(y)=F^*(y)$

(Data sampel berasal dari populasi yang berdistribusi Weibull dengan fungsi distribusi $F^*(y)$)

$H_1: F(y)\neq F^*(y)$

(Data sampel dianggap bukan berasal dari populasi yang berdistribusi Weibull dengan fungsi distribusi $F^*(y)$)

Statistik uji adalah

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

$$D = \max\left|F^*(y) - F_0(y)\right|, \tag{21}$$

dengan

$$F_0(y) = \frac{banyak\ data\ yang \leq y_i}{n}. \tag{22}$$

$F^*(y)$ adalah fungsi distribusi teoritis dan $F_0(y)$ adalah fungsi distribusi empiris. Daerah penolakan adalah menolak H_0 pada taraf signifikansi α jika $D > D_{n,\alpha}$ (Mufidah & Purhadi, 2016).

2.3 Model Regresi Weibull

Sebagai pengembangan dari distribusi Weibull, parameter skala (λ) pada Persamaan (2) dapat dinyatakan dalam fungsi kovariat atau fungsi dari parameter regresi. Diketahui parameter λ pada Persamaan (2), (3), dan (5) bernilai real positif, sehingga dapat dinyatakan dalam parameter regresi, yaitu

$$\lambda(\mathbf{x},\boldsymbol{\beta}) = \exp\left(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k\right) = \exp(\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}), \tag{23}$$

dengan $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} = \left[\beta_0\, \beta_1\, \ldots\, \beta_p\right]$ adalah vektor parameter regresi yang berdimensi $p+1$ dan $\mathbf{x} = \left[X_0\, X_1\, \ldots\, X_p\right]^{\mathrm{T}}$ merupakan vektor kovariat atau peubah bebas dengan $X_0 = 1$. Pensubstitusian Persamaan (23) ke Persamaan (8) didapatkan model regresi Weibull untuk *mean* peubah acak Y, yaitu

$$\mu_Y(\boldsymbol{\theta},\mathbf{x}) = \Gamma\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)\exp\left[\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}\right], \tag{24}$$

dengan $\boldsymbol{\theta} = \left[\gamma \quad \beta_0 \quad \beta_1 \quad \ldots \quad \beta_p\right]^{\mathrm{T}}$ adalah vektor berdimensi $p+2$. Pensubstitusian Persamaan (23) ke Persamaan (3) didapatkan model regresi *survival* Weibull, yaitu

$$S(y,\boldsymbol{\theta}) = \exp\left[-y^{\gamma}\exp\left[-\gamma y^{\gamma}\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}\right]\right], \tag{25}$$

dan pensubstitusian Persamaan (23) ke Persamaan (5) didapatkan model regresi *hazard* Weibull, yaitu

$$h(y) = \gamma y^{\gamma-1}\exp\left[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}\right]. \tag{26}$$

Berdasarkan Persamaan (2) dan Persamaan (25) FKP dapat dinyatakan sebagai berikut (Suyitno, 2017)

$$f(y,\boldsymbol{\theta}) = \gamma y^{\gamma-1}\exp\left[-\gamma\exp\left[\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}\right]\right]\exp\left[-y^{\gamma}\exp\left[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}\right]\right] \tag{27}$$

2.4 Penaksiran Parameter Model Regresi Weibull

Penaksiran parameter model regresi Weibull terdiri dari penaksiran parameter-parameter model regresi Weibull untuk *mean* $(\mu_r(\boldsymbol{\theta},x))$ yang diberikan oleh Persamaan (24), model regresi *hazard* Weibull yang diberikan oleh Persamaan (26) dan model regresi *survival* Weibull yang diberikan oleh Persamaan (25). Salah satu metode penaksiran parameter model regresi Weibull adalah MLE. MLE merupakan metode yang digunakan untuk menaksir parameter $\boldsymbol{\theta}$ dengan memaksimumkan fungsi *likelihood*. Misalkan diberikan data sampel berukuran n, yaitu $(y_i,\delta_i,\mathbf{x}_i)$ dengan asumsi $y_i, i=1,2,\ldots,n$ adalah independen berdistribusi identik $W\left(\gamma, \exp\left[\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i\right]\right)$. δ_i adalah status klasifikasi, dimana $\delta_i = 1$ jika $y_i \leq y^*$, dan $\delta_i = 0$ jika $y_i > y^*$, dengan y^* adalah bilangan riil positif yang diketahui. Diketahui $P(Y = y_i|\delta_i = 1) = f(y_i)$ dan $P(Y = y_i|\delta_i = 0) = S(y_i)$ maka berdasarkan FKP yang diberikan Persamaan (27), fungsi *likelihood* didefinisikan sebagai

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i)^{\delta_i}(S(y_i))^{1-\delta_i} = \prod_{i=1}^{n} h(y_i)^{\delta_i} S(y_i). \tag{28}$$

Berdasarkan Persamaan (26) dan (27), fungsi *likelihood* pada Persamaan (29) dapat dinyatakan dengan

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n}\left(\gamma y_i^{\gamma-1}\exp\left[-\gamma\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_i\right]\right)^{\delta_i}\exp\left[-y_i^{\gamma}\exp\left[-\gamma\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_i\right]\right]. \tag{29}$$

Penaksir ML model regresi Weibull adalah nilai vektor $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ yang memaksimumkan fungsi *likelihood* pada Persamaan (29) dan juga memaksimumkan fungsi *log-likelihood* dari fungsi *likelihood* (29). Fungsi logaritma natural dari fungsi *likelihood* (29), yaitu

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \ln\left(L(\boldsymbol{\theta})\right) = \sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\left[\ln\gamma + (\gamma-1)\ln y_i - \gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i\right]\right) - y_i^{\gamma}\exp\left[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i\right]. \tag{30}$$

Penaksir ML model regresi Weibull diperoleh dengan menyelesaikan persamaan *likelihood* yang diberikan oleh

$$\frac{\partial\ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial(\boldsymbol{\theta})} = \mathbf{0}, \tag{31}$$

dengan $\mathbf{0}$ adalah vektor nol yang berdimensi $p+2$. Ruas kanan Persamaan (31) adalah vektor gradien, yaitu

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial\ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial(\boldsymbol{\theta})} = \left[\frac{\partial\ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\gamma} \quad \frac{\partial\ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta_0} \quad \cdots \quad \frac{\partial\ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta_p}\right]^T. \tag{32}$$

Komponen-komponen vektor (32) gradien dapat dinyatakan dalam bentuk umum, yaitu

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma}=\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_i\left[\frac{1}{\gamma}+\ln(y_i)-\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i\right]\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\left[\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i-\ln(y_i)\right]y_i^{\gamma}\exp\left[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i\right]\right), \tag{33}$$

dan

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_k}=\sum_{i=1}^{n}\left(-\delta_i\gamma X_{ki}+\gamma X_{ki}y_i^{\gamma}\exp\left[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i\right]\right), \tag{34}$$

dengan $k=0,1,2,...,p$.

Berdasarkan Persamaan (33) dan (34) diketahui bahwa persamaan *likelihood* (31) terdiri dari persamaan-persamaan non-linier yang saling bergantungan, sehingga solusi eksak untuk mendapatkan penaksir ML tidak dapat ditemukan secara analitis. Metode alternatif yang dapat digunakan adalah iteratif Newton-Raphson. Penerapan metode iteratif Newton-Raphson diperlukan perhitungan vektor gradien dan matriks Hessian. Vektor gradien diberikan oleh Persamaan (32), sedangkan matriks Hessian adalah matriks simetris orde p + 2, yaitu matriks turunan orde kedua dari fungsi *log-likelihood* (30). Bentuk umum matriks Hessian adalah

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\gamma^2} & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\gamma\partial\beta_0} & \cdots & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\gamma^2\partial\beta_p}\\ \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta_0\partial\gamma} & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta_0^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta_0\partial\beta_p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta_p\partial\gamma} & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta_p\partial\beta_0} & \cdots & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial{\beta_p}^2}\end{pmatrix} \tag{35}$$

Berdasarkan Persamaan (33) dan (34), elemen-elemen diagonal utama matriks Hessian pada Persamaan (35) dapat dinyatakan dalam bentuk umum, yaitu (Suyitno, 2017)

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\delta_i}{\gamma^2}+\left[\left[\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i-\ln y_i\right]y_i^{\gamma}\exp\left[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i\right]\right]\left[\ln y_i-\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i\right]\right), \tag{36}$$

dan

$$\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \beta_k^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(-\delta_i\gamma^2 y_i^{\gamma}\left(X_{ki}\right)^2\exp\left[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i\right]\right), \tag{37}$$

untuk $k=0,1,...,p$. Elemen-elemen non-diagonal dapat dinyatakan dalam bentuk umum yaitu untuk $k=0,1,...,p$ didapat

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\gamma\partial\beta_k}=\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta_k\partial\gamma}=\sum_{i=1}^{n}-\delta_i X_{ki}+\sum_{i=1}^{n}\left(\left[1-\gamma\left(\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i-\ln(y_i)\right)\right]X_{ki}y_i^{\gamma}\exp\left[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i\right]\right), \tag{38}$$

dan untuk $k\neq t;k,t=0,1,...,p$ didapat

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta_t\partial\beta_k}=\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta_k\partial\beta_t}=\sum_{i=1}^{n}\left(-\gamma^2 y_i^{\gamma}X_{ki}X_{ti}\exp\left[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i\right]\right). \tag{39}$$

Berdasarkan hasil perhitungan vektor gradien yang diberikan oleh Persamaan (32), (33) dan (34), matriks Hessian yang diberikan oleh Persamaan (37), dengan elemen-elemen pada Persamaan (36), (37), (38), dan (39) iterasi Newton-Raphson dapat dijalankan untuk mendapatkan penaksiran parameter model regresi Weibull dengan algoritma

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q+1)}=\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q)}-\left[\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q)})\right]^{-1}\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q)});q=0,1,2,... \tag{40}$$

Langkah-langkah dalam iterasi Newton-Raphson sebagai berikut

1. Menentukan taksiran awal parameter $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}$
$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}=\left[\gamma^{(0)}\quad \beta_0^{(0)}\quad \beta_1^{(0)}\quad \cdots\quad \beta_p^{(0)}\right]^T \tag{41}$$
2. Menghitung vektor gradien $\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$
3. Membentuk matriks Hessian $\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$
4. Iterasi dimulai pada iterasi ke 1 untuk q = 1 dan didapat penaksir pada iterasi ke–1 yaitu $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(1)}=\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}-\left[\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)})\right]^{-1}\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}),$ begitu seterusnya.
5. Iterasi dilakukan sampai memperoleh nilai konvergen, jika $\left\|\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q+1)}-\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q)}\right\|\leq\varepsilon$, di mana ε merupakan bilangan real positif kecil misalnya 10^{-12} (Rahmah, Suyitno & Siringoringo, 2021)

Berdasarkan matriks Hessian pada Persamaan (35), diperoleh matriks informasi Fisher sebagai berikut

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

$$\left[\mathbf{I}_f(\hat{\boldsymbol{\theta}})\right] = -E\left[\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\right] = -\left[\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\right] \tag{42}$$

Invers dari matriks informasi Fisher (42) adalah matriks varian-kovarian penaksir vektor $\boldsymbol{\theta}$, yaitu

$$\text{cov}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \left[\mathbf{I}_f(\hat{\boldsymbol{\theta}})\right]^{-1}, \tag{43}$$

dengan $\hat{\boldsymbol{\theta}} \sim N\left(\boldsymbol{\theta}, \left[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\right]^{-1}\right)$. Berdasarkan Persamaan (43), invers matriks informasi Fisher $\mathbf{I}_f$ dapat di partisi menjadi matriks sebagai berikut (Pawitan, 2001).

$$\left[\mathbf{I}_f(\hat{\boldsymbol{\theta}})\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{11}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) & \mathbf{I}_{12}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ \mathbf{I}_{21}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) & \mathbf{I}_{22}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \end{bmatrix} \tag{44}$$

2.5 Pengujian Hipotesis Parameter Regresi Weibull Secara Serentak

Pengujian parameter regresi secara serentak bertujuan untuk mengetahui apakah parameter-parameter yang ditaksir sudah memberikan model regresi yang tepat digunakan atau belum. Hipotesis pengujian parameter regresi serentak adalah

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_p = 0$ (Model regresi Weibull tidak layak)

H_1: Minimal ada satu $\beta_k \neq 0; k = 1, 2, ..., p$ (Model regresi Weibull layak)

Himpunan parameter di bawah populasi yang memaksimumkan fungsi *log-likelihood* pada Persamaan (30) adalah $\hat{\Omega} = [\hat{\gamma}, \hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, ..., \hat{\beta}_p]^T$. Nilai maksimum fungsi *log-likelihood* di bawah populasi adalah

$$\ell(\hat{\Omega}) = \ln\left(L(\hat{\Omega})\right) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \left(\left[\ln \hat{\gamma} + (\hat{\gamma} - 1)\ln y_i - \hat{\gamma}\hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{x}_i\right]\right) - y_i^{\hat{\gamma}} \exp\left[-\hat{\gamma}\hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{x}_i\right]. \tag{45}$$

Himpunan parameter di bawah hipotesis nol yang memaksimumkan fungsi *log-likelihood* adalah $\hat{\omega} = [\hat{\gamma}_0, \hat{\beta}_0]^T$. Nilai maksimum fungsi *log-likelihood* di bawah hipotesis nol adalah

$$\ell(\hat{\omega}) = \ln(L(\hat{\omega})) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i (\ln \hat{\gamma}_0 + (\hat{\gamma}_0 - 1)\ln y_i - \hat{\gamma}_0 \hat{\beta}_0) - \sum_{i=1}^{n} (y_i^{\hat{\gamma}} \exp[-\hat{\gamma}_0 \hat{\beta}_0]). \tag{46}$$

Statistik uji untuk pengujian hipotesis nol adalah Statistik Wilk's *likelihood ratio* yang diberikan oleh

$$G = 2(\ell(\hat{\Omega}) - \ell(\hat{\omega})). \tag{47}$$

Statistik uji yang diberikan oleh Persamaan (47) dihampiri oleh

$$G \approx \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \left[\mathbf{I}_{22}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\right]^{-1} \hat{\boldsymbol{\beta}}, \tag{48}$$

dimana $W \sim X_p^2$ dengan $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left[\hat{\beta}_1 \quad \hat{\beta}_2 \quad \cdots \quad \hat{\beta}_p\right]^T$ dan $\left[\mathbf{I}_{22}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\right]$ adalah elemen matriks $\left[\mathbf{I}_f(\hat{\boldsymbol{\theta}})\right]^{-1}$ yang diberikan oleh Persamaan (44). Daerah kritis pengujian hipotesis nol adalah menolak H_0 pada taraf signifikansi α jika $G > \chi^2_{(\alpha,p)}$ atau $p_{value} < \alpha$, dengan

$$p_{value} = P(G_v > G), \tag{49}$$

dengan G_v adalah peubah acak berdistribusi χ_p^2 dengan G adalah nilai statistik uji yang diperoleh dari Persamaan (47) (Suyitno, 2017).

2.6 Pengujian Hipotesis Parameter Regresi Weibull Secara Parsial

Pengujian Hipotesis parameter regresi secara parsial bertujuan untuk mengetahui apakah variabel bebas tertentu secara individual berpengaruh terhadap model regresi. Hipotesis pengujian parameter β_k dengan $(k = 0, 1, 2, ..., p)$ adalah

$H_0: \beta_k = 0$ (Variabel bebas y_k tidak berpengaruh terhadap model regresi Weibull)

$H_0: \beta_k \neq 0$ (Variabel bebas y_k tidak berpengaruh terhadap model regresi Weibull)

Statistik uji adalah

$$W_0 = \frac{\hat{\beta}_k - E\left(\hat{\beta}_k\right)}{SE\left(\hat{\beta}_k\right)} \sim N(0,1), \tag{50}$$

Berdasarkan hipotesis nol bahwa $E(\hat{\beta}_k) = \beta_k = 0$, sehingga dari Persamaan (50) diperoleh

$$W_0 = \frac{\hat{\beta}_k}{SE\left(\hat{\beta}_k\right)} \sim N(0,1), \tag{51}$$

dimana $SE\left(\hat{\beta}_k\right) = \sqrt{\text{var}(\hat{\beta}_k)}$, dengan $\text{var}(\hat{\beta}_k)$, adalah elemen diagonal utama ke $k + 1$ dari invers matriks Fisher $\left[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\right] = -\left[\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\right]^{-1}$ Daerah kritis adalah menolak H_0 pada taraf signifikansi α jika nilai $|W_0| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ atau $p_{value} \leq \alpha$, dimana

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

$$p_{value} = 1 - 2P\left(W_v > [W_0]\right), \tag{52}$$

dengan W_0 peubah acak berdistribusi N(0,1). Statistik uji lainnya yang bisa digunakan yaitu dengan kuadrat statistik Wald, yaitu

$$W^2 = \frac{\hat{\beta}_k^2}{\text{var}(\hat{\beta}_k)}, \tag{53}$$

dengan $W^2 \sim \chi_1^2$, menolak H_0 pada taraf signifikansi α jika $W^2 > \chi^2_{(1-\alpha;1)}$ (Suyitno, 2017).

2.7 Interpretasi Model Regresi Weibull

Interpretasi model regresi Weibull didapat melalui perhitungan rasio, yaitu rasio antara nilai regresi jika variabel ke-*k* meningkat satu-satuan dengan nilai regresi jika semua nilai variabel bebas tidak mengalami peningkatan satu-satuan. Berdasarkan Persamaan (26), nilai rasio regresi *hazard* Weibull untuk variabel bebas ke-*k* adalah

$$Rh_{x_k} = \frac{h(y \mid X_k + 1)}{h(y)} = \frac{\exp\left[\gamma\hat{\beta}_k\left(X_k + 1\right)\right]}{\exp\left[\gamma\hat{\beta}_k X_k\right]} = \exp[\gamma\hat{\beta}_k]. \tag{54}$$

Berdasarkan Persamaan (25), nilai rasio regresi *survival* Weibull untuk variabel bebas ke-*k* adalah

$$RS_{x_k} = \frac{\hat{S}(y \mid X_k + 1)}{\hat{S}(y)} = \frac{\exp\left[-y_i^{\hat{\gamma}}\exp\left[-\hat{\gamma}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \ldots + \hat{\beta}_k\left(X_k + 1\right) + \ldots + \hat{\beta}_p X_p)\right]\right]}{\exp\left[-y_i^{\hat{\gamma}}\exp\left[-\hat{\gamma}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \ldots + \hat{\beta}_k X_k + \ldots + \hat{\beta}_p X_p)\right]\right]}. \tag{55}$$

Berdasarkan Persamaan (24), nilai rasio regresi *mean* variabel bebas ke-*k* adalah (Suyitno, 2017)

$$R\mu_{x_k} = \frac{\hat{\mu}(y \mid X_k + 1)}{\hat{\mu}(y)} = \frac{\exp\left[\hat{\beta}_k\left(X_k + 1\right)\right]}{\exp\left[\hat{\beta}_k X_k\right]} = \exp(\hat{\beta}_k). \tag{56}$$

2.8 Ukuran Kebaikan Model

Ketepatan model terhadap data menjadi sangatlah penting karena mengatur varians dan bias dari model. Salah satu metode yang digunakan untuk mengetahui ketepatan model adalah *Akaike Information Criterion* (AIC). Nilai AIC untuk model dengan parameter $\boldsymbol{\theta}$ dihitung sebagai berikut

$$AIC = -2\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + 2v_0, \tag{57}$$

dengan $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ adalah penaksir ML dan $\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ adalah fungsi *log-likelihood* dan v_0 adalah jumlah estimasi parameter dalam model (Meliana dkk, 2013).

2.9 *Dissolve Oxygen*

Oksigen terlarut atau *dissolved oxygen* (DO) adalah jumlah oksigen terlarut dalam air yang dinyatakan dalam mg/l (milligram per liter) yang diperlukan untuk metabolisme semua organisme perairan. DO berasal dari proses fotosintesis tumbuhan air dan difusi melalui udara bebas. DO merupakan indikator kualitas perairan (Salmin, 2005). Standar baku mutu untuk indikator DO pada pencemaran air sungai Mahakam berdasarkan Peraturan Pemerintah No. 82 Tahun 2001 kelas 1 yaitu konsentrasi DO ≥ 6 dapat dikatakan tidak tercemar dan konsentrasi DO < 6 dapat dikatakan tercemar. Adapun faktor yang diduga mempengaruhi DO yaitu *Total Suspended Solid* (TSS), *Total Dissolved Solid* (TDS), debit air, suhu, nitrat, dan amonia (Sastrawijaya, 2009).

3. Metode Penelitian

Data penelitian ini diperoleh dari Dinas Lingkungan Hidup Provinsi Kalimantan Timur Tahun 2020. Populasi penelitian ini adalah sepanjang daerah aliran sungai Mahakam. Sampel penelitian ini adalah beberapa titik lokasi pengamatan sepanjang daerah aliran sungai Mahakam yang telah ditetapkan oleh DLH Provinsi Kalimantan Timur Tahun 2020. Data penelitian ini terdiri dari data variabel terikat (Y) adalah data DO air sungai Mahakam (golongan air kelas 1), variabel bebas terdiri dari TSS (X_1), TDS (X_2), debit air (X_3), suhu (X_4), nitrat (X_5), dan amonia (X_6). Data berasal dari pengamatan di 27 titik lokasi DAS Mahakam. Teknik sampling penelitian ini adalah *purposive sampling* yaitu teknik sampling yang sampelnya ditentukan berdasarkan pertimbangan tertentu. Teknik pengumpulan data penelitian adalah pengumpulan data sekunder, yaitu peneliti memperoleh data penelitian dari Dinas Lingkungan Hidup (DLH) Provinsi Kalimantan Timur. Teknik analisis data yang digunakan adalah analisis deskriptif dan analisis model regresi Weibull.

4. Hasil Penelitian dan Pembahasan

4.1 Penaksiran Parameter Distribusi Weibull

Penaksiran parameter distribusi Weibull dilakukan pada data DO dengan status klasifikasi $\delta_i = 1$ menggunakan metode MLE yang diselesaikan dengan metode iterasi Newton-Raphson. Hasil penaksiran parameter distribusi Weibull disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Taksiran Parameter Distribusi Weibull

Iterasi	Taksiran Parameter		$\left\Vert \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q)} \right\Vert$
	Skala (λ)	Bentuk (γ)	
1	4,8232	7,1342	1,3087
2	4,8505	7,3960	0,2632
3	4,8497	7,3995	0,0036
4	4,8497	7,3995	$7{,}8101\times 10^{-6}$
5	4,8497	7,3995	$2{,}6478\times 10^{-11}$
6	4,8497	7,3995	$1{,}2561\times 10^{-15}$

Berdasarkan Tabel 1, penaksir $\boldsymbol{\theta}_1$ konvergen setelah iterasi ke 6. Berdasarkan hasil penaksir parameter distribusi Weibull, diperoleh taksiran fungsi distribusi kumulatif adalah

$$\hat{F}(y) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{y}{4{,}8497} \right)^{7{,}3995} \right]. \tag{58}$$

4.2 Pengujian Distribusi

Pengujian distribusi data DO menggunakan pendekatan Kolmogorov-Smirnov. Fungsi distribusi kumulatif teoritis $\hat{F}(y)$ diberikan oleh Persamaan (58). Rumusan hipotesis pengujian distribusi adalah

$H_0 : F(y) = \hat{F}(y)$ (Data DO berdistribusi Weibull dengan fungsi distribusi $\hat{F}(y)$ pada Persamaan (58))

$H_1 : F(y) \neq \hat{F}(y)$ (Data DO tidak berdistribusi Weibull)

Statistik uji diberikan oleh Persamaan (21). Hasil perhitungan diputuskan gagal menolak H_0 pada taraf signifikansi 0,05, karena nilai statistik D = 0,0958 < $D_{(21;\ 0,05)}$ = 0,2870. Kesimpulannya dari uji hipotesis menyatakan bahwa data DO berdistribusi Weibull.

4.3 Pemilihan Model Terbaik

Pemilihan model terbaik dilakukan berdasarkan sifat parsimoni (model sederhana dan terbaik), yaitu semua variabel bebas berpengaruh dalam model dan memberikan nilai AIC terkecil. Model-model RW dibentuk berdasarkan dari semua kombinasi variabel bebas sebanyak 63 model. Berdasarkan pemodelan RW untuk semua model yang dibentuk terdapat 11 model yang semua variabel bebasnya berpengaruh. Sebagai contoh terdapat 4 model yang disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Pemilihan Model Terbaik

Kombinasi Variabel	Nilai AIC
X_1, X_2, X_5 dan X_6	93,883
X_1, X_4, X_5 dan X_6	94,4975
X_1, X_4 dan X_5	95,2453
X_4, X_5 dan X_6	95,3384

Berdasarkan pada Tabel 2 diperoleh model RW dengan variabel bebas X_1, X_2, X_5 dan X_6 yang memberikan nilai AIC terkecil, yaitu sebesar 93,883.

4.4 Penaksiran Parameter Model RW Terbaik

Berdasarkan Tabel 2, model regresi Weibull terbaik adalah model regresi Weibull dengan variabel bebas X_1, X_2, X_5 dan X_6. Penaksiran parameter model regresi Weibull menggunakan metode MLE yang diselesaikan dengan metode Iteratif Newton-Raphson. Hasil penaksiran parameter dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3. Penaksiran Parameter Model RW

Parameter	Taksiran
γ	4,4800
β_0	2,2549
β_1	0,0013
β_2	−0,0036
β_5	−0,4812
β_6	−1,6025

Berdasarkan Tabel 3, diperoleh model regresi *survival* Weibull adalah

$$\hat{S}(y) = \exp[-y^{4{,}4800} \exp[-10{,}1019 - 0{,}0058X_1 + 0{,}0161X_2 + 2{,}1558X_5 + 7{,}1792X_6]], \tag{59}$$

model regresi *hazard* Weibull adalah

$$\hat{h}(y) = 4{,}4800 y^{3{,}4800} \exp[-10{,}1019 - 0{,}0058X_1 + 0{,}0161X_2 + 2{,}1558X_5 + 7{,}1792X_6], \tag{60}$$

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

dan model regresi *mean* adalah

$$\hat{\mu}(y) = 0,9123\exp(2,2549 + 0,0013X_1 - 0,0036X_2 - 0,4812X_5 - 1,6025X_6). \quad (61)$$

4.5 Pengujian Hipotesis Parameter Model RW Secara Serentak

Pengujian parameter secara serentak bertujuan mengetahui apakah variabel-variabel bebas secara serentak berpengaruh pada model RW. Hipotesis pengujian parameter secara serentak adalah

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_5 = \beta_6 = 0$ (Model regresi Weibull layak)

H_0: Minimal terdapat satu $\beta_k \neq 0; k = 1, 2, 5, 6$ (Model regresi Weibull tidak layak)

Statistik uji adalah statistik *G* diberikan oleh Persamaan (47) dengan $G \sim \chi^2_{(4)}$. Hasil pengujian hipotesis parameter RW secara serentak diputuskan menolak H_0 pada taraf signifikansi 0,05, karena nilai statistik $G = 19,6974 > \chi^2_{(0,05;4)} = 9,4877$ atau p_{value} = 0,0006 < 0,05. Kesimpulan dari uji hipotesis adalah variabel TSS (X_1), TDS (X_2), nitrat (X_5), dan amonia (X_6) secara serentak berpengaruh pada model RW.

4.6 Pengujian Hipotesis Parameter Model RW Secara Parsial

Pengujian parameter secara parsial bertujuan untuk mengetahui pengaruh setiap variabel bebas pada model RW. Hipotesis pengujian parameter secara parsial untuk parameter β_k dengan $k = 1, 2, 5, 6$ adalah

H_0 : $\beta_k = 0$ (Variabel bebas X_k tidak berpengaruh pada model RW)

H_1 : $\beta_k \neq 0$ (Variabel bebas X_k berpengaruh pada model RW)

Statistik uji adalah statistik Wald diberikan oleh Persamaan (51) dengan $W_0 \sim N(0,1)$. Hasil pengujian hipotesis parameter RW terbaik secara parsial disajikan pada Tabel 4.

Tabel 4. Hasil Pengujian Hipotesis Parameter RW Terbaik secara Parsial

Variabel	Parameter	*SE*	$Z_{0,975}$	$\lvert W_0 \rvert$	p_{value}	Keputusan
Konstanta (X_0)	β_0	0,1345		281,2654	0,0000	Menolak H_0
TSS (X_1),	β_1	0,0006		5,5991	0,0180	Menolak H_0
TDS (X_2),	β_2	0,0012	1,96	10,0382	0,0015	Menolak H_0
Nitrat (X_5)	β_5	0,1241		15,0356	0,0001	Menolak H_0
Amonia (X_6).	β_6	0,5245		9,3355	0,0022	Menolak H_0

Berdasarkan Tabel 4, secara individual variabel TSS (X_1), TDS (X_2), nitrat (X_5), dan amonia (X_6) masing-masing berpengaruh pada model RW. Hal ini karena nilai $\lvert W_0 \rvert$ keempat variabel > $Z_{\frac{0,05}{2}} = Z_{0,025} = 1,96$ atau p_{value} kurang dari 0,05.

4.7 Interpretasi Model RW

Interpretasi model regresi Weibull dilakukan berdasarkan nilai rasio. Hasil perhitungan rasio regresi *survival*, rasio regresi *hazard* dan rasio regresi *mean* dapat dilihat pada Tabel 5.

Tabel 5 Nilai Rasio *Survival*, *Hazard*, dan *Mean*

Model Regresi	Rasio Regresi Weibull Setelah Kenaikan 1 Satuan Variabel Bebas			
	X_1	X_2	X_5	X_6
Rasio *Survival**	1,0007	0,9980	0,3953	$6,2066 \times 10^{-70}$
Rasio *Hazard*	0,9942	1,0163	8,6346	1311,8584
Rasio *Mean*	1,0013	0,9964	0,6180	0,2014

(*) Perhitungan rasio *Survival* pada lokasi pengamatan Mahakam Boh

Interpretasi model regresi Weibull dilakukan berdasarkan nilai rasio pada variabel TDS (X_2), nitrat (X_5), dan amonia (X_6). Sedangkan interpretasi variabel TSS (X_1) tidak dilakukan karena diduga ada kesalahan pengambilan sampel. Nilai rasio regresi *hazard*, regresi *survival*, dan regresi *mean* Weibull berturut-turut diberikan pada Persamaan (54), (55) dan (56).

Berdasarkan Tabel 5, nilai rasio regresi *survival* variabel TDS adalah 0,9980, artinya setiap kenaikan 1 mg/l TDS, peluang air sungai Mahakam tidak tercemar menurun menjadi 0,9980 kali atau turun 0,2%. Nilai rasio regresi *survival* variabel nitrat adalah 0,3953, artinya setiap kenaikan 1 mg/l nitrat, peluang air sungai Mahakam tidak tercemar menurun menjadi 0,3953 kali atau turun 60,47%. Nilai rasio regresi *survival* variabel amonia adalah $6,2066 \times 10^{-70}$, artinya setiap kenaikan 1 mg/l amonia, peluang air sungai Mahakam tidak tercemar menurun menjadi $6,2066 \times 10^{-70}$ kali atau turun 99,99%.

Berdasarkan Tabel 5, nilai rasio regresi *hazard* variabel TDS adalah 1,0163, artinya setiap kenaikan 1 mg/l TDS, *hazard rate* (laju) air sungai Mahakam tercemar meningkat menjadi 1,0163 kali. Nilai rasio regresi *hazard* variabel nitrat adalah 8,6346, artinya setiap kenaikan 1 mg/l nitrat, *hazard rate* (laju) air sungai

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

Mahakam tercemar meningkat menjadi 8,6346 kali. Nilai rasio regresi *hazard* variabel amonia adalah 1.311,8584, artinya setiap kenaikan 1 mg/l amonia, *hazard rate* (laju) air sungai Mahakam tercemar meningkat menjadi 1.311,8584 kali.

Berdasarkan Tabel 5, nilai rasio regresi *mean* variabel TDS adalah 0,9964, artinya setiap kenaikan 1 mg/l TDS, rata-rata DO air sungai Mahakam menurun menjadi 0,9964 kali atau turun 0,36%. Nilai rasio regresi *mean* variabel nitrat adalah 0,6180, artinya setiap kenaikan 1 mg/l nitrat, rata-rata DO air sungai Mahakam menurun menjadi 0,6180 kali atau turun 38,2%. Nilai rasio regresi *mean* variabel amonia adalah 0,2014, artinya setiap kenaikan 1 mg/l amonia, rata-rata DO air sungai Mahakam menurun menjadi 0,2014 kali atau turun 79,86%.

5. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah diuraikan maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Model regresi Weibull *survival*, *hazard*, dan *mean* berturut-berturut adalah
   $\hat{S}(y) = \exp[-y^{4,4800}\exp[-10,1019 - 0,0058X_1 + 0,0161X_2 + 2,1558X_5 + 7,1792X_6]]$,
   $\hat{h}(y) = 4,4800y^{3,4800}\exp[-10,1019 - 0,0058X_1 + 0,0161X_2 + 2,1558X_5 + 7,1792X_6]$, dan
   $\hat{\mu}(y) = 0,9123\exp(2,2549 + 0,0013X_1 - 0,0036X_2 - 0,4812X_5 - 1,6025X_6)$.
2. Faktor-faktor yang berpengaruh pada model RW dan DO air sungai Mahakam adalah TSS, TDS, nitrat dan amonia.
3. Interpretasi model RW berdasarkan variabel berpengaruh (TDS, nitrat dan amonia) adalah sebagai berikut.
   a. Berdasarkan nilai rasio regresi *survival* setiap kenaikan 1 mg/l masing-masing TDS, nitrat dan amonia, peluang air sungai Mahakam tidak tercemar berturut-turut menurun menjadi 0,9980 kali atau turun 0,2%; 0,3953 kali atau turun 60,47% dan $6,2066 \times 10^{-70}$ kali atau turun 99,99%.
   b. Berdasarkan nilai rasio regresi *hazard* setiap kenaikan 1 mg/l masing-masing TDS, nitrat dan amonia, maka *hazard rate* (laju) air sungai Mahakam menjadi tercemar berturut-turut meningkat menjadi 1,0163 kali, 8,6346 kali dan 1311,8584 kali.
   c. Berdasarkan nilai rasio regresi *mean*, setiap kenaikan 1 mg/l masing-masing TDS, nitrat dan amonia, maka rata-rata DO air sungai Mahakam berturut-turut menurun menjadi 0,9964 kali atau turun 0,36%; 0,6180 kali atau turun 38,2% dan 0,2014 kali atau turun 79,86%.

Daftar Pustaka

Casella, G. & Berger, R. L. (2002). *Statistical Inference Second Edition*. Cambridge: Duxbury Thomson Learning.

Meliana, A,. dkk. (2013). "The Comparison of Generalized Poissson Regression and Negative Binomial Regression Methods In Overcoming Overdispersion". *International Journal Of Scientific & Technology*. 8(2), 255-258.

Mufidah, A. S & Purhadi. (2016). "Analisis Survival Pada Pasien Demam Berdarah Dengue (DBD) di RSU Haji Surabaya Menggunakan Model Regresi Weibull". *Jurnal Sains dan Seni ITS.*5(2), 301-306.

Pawitan, Y. (2001). *In All Likelihood. Statistical Modelling and Inference Using Likelihood*. England: Clarendon Press-Oxford.

Rahmah, S.A., Suyitno & Siringoringo, M. (2021). "*Model Geographically Weighted Weibull Regression* pada Indikator Pencemaran Air Biochemical Oxygen Demand di Daerah Aliran Sungai Mahakam". *Jurnal EKSPONENSIAL*. 12(2), 119-128. ISSN: 2085-7829.

Rinne, H. (2009). *The Weibull Distribution A Handbook*. New York: CRC Press Taylor and Francis Group.

Salmin. (2005). "Oksigen Terlarut (DO) dan Kebutuhan Oksigen Biologi (BOD) Sebagai Salah Satu Indikator Untuk Menentukan Kualitas Perairan". *Oseana.* 30(3), 21-26. ISSN: 0216-1877.

Sastrawijaya, A. (2009). *Pencemaran Lingkungan*. Jakarta: Rineka Cipta.

Suyitno. (2017). "Penaksiran Parameter dan Pengujian Hipotesis Model Regresi Weibull Univariat". *Jurnal EKSPONENSIAL*. 8(2), 179-184. ISSN: 2085-7829.

Yanti, H., Suyitno & Purnamasari, I. (2022). "Model *Hazard Rate* Weibull Kesembuhan Pasien Rawat Inap Penyakit Jantung Koroner di RSUD Abdul Wahab Sjahranie Samarinda". *Prosiding Seminar Nasional Matematika, Statistika, dan Aplikasinya*. (2), 429-455. ISSN: 2657-232X.