Penyelesaian Masalah Pemrograman Kuadratik Menggunakan Metode Beale (Studi Kasus: Data Produksi Padi Kota Balikpapan)

Solving Quadratic Programming Problems Using Beale's Method (Case Study: Paddy Production Data in Balikpapan City)

Erlina[1], Syaripuddin[2], dan Fidia Deny Tisna Amijaya[3]
Laboratorium Matematika Komputasi FMIPA Universitas Mulawarman
[1]E-mail: erlinawts29@gmail.com

ABSTRACT

Quadratic programming is a special form of nonlinear programming which has the general form of the objective function in the form of a quadratic functions and the constraints in the form of linear functions. One of the methods used to solve the quadratic programming model is Beale's method. This method is a modification of the simplex method for linear programming problems. This study aims to determine the optmal results of paddy production data in Balikpapan city using Beale's method. The quadratic programming model was formed using the least squares method with the objective functions by selecting two types of plants,namely lowland paddy and upland paddy. Furthermore, the quadratic programming model formed that is formed is solved using Beale's method. The data used is data on the paddy production of balikpapan city in 2005-2019. *Based on the calculatios, the objective function is* $S(x_1, x_2) = -0{,}1291{x_1}^2 - 1{,}1253x_2^2 + 1{,}1365x_1 + 2{,}2805x_2 + 0{,}1896$ *with the constraint functions* $x_1 \leq 181{,}84, x_2 \leq 193{,}1$ *and* $x_1, x_2 \geq 0$. *After calculating using Beale's method, the optimal result for the maximum yield of lowland paddy and upland paddy is* 3,8426 *quintals with a harvested area of* 4,402 *hectares of lowland paddy and a harvested paddy of* 1,0133 *hectares of upland paddy.*

Keywords: *Optimization, Agricultural Product, Least Square Method, QuadraticProgramming, Beale Method.*

Pendahuluan

Optimasi merupakan pokok persoalan yang sering dijumpai dalam kehidupan, sehingga banyak permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang memerlukan pendekatan optimasi dalam penyelesaiannya. Menurut Rao (2009) masalah optimasi dapat dibedakan menjadi dua yaitu masalah optimasi tanpa kendala dan masalah optimasi dengan kendala. Jika fungsi objektif atau kendala-kendalanya semuanya merupakan fungsi *non*-linier maka dikenal dengan pemrograman *non*-linier, sedangkan jika merupakan fungsi linier maka, masalah ini dikenal sebagai pemrograman linier.

Pemrograman Kuadratik merupakan suatu pendekatan penyelesaian pemrograman *non*-linier dengan fungsi tujuannya berupa fungsi kuadrat dan kendalanya berupa fungsi linier (Hiller & Lieberman, 2001). Permasalahan pemrograman kuadratik adalah meminimumkan atau memaksimumkan fungsi tujuan berdasarkan kendala berupa fungsi linier. Salah satu metode yang digunakan adalah metode Beale yang dikhususkan pada pemrograman kuadratik.

Menurut Patel (2014), metode Beale adalah metode yang berfungsi untuk menentukan solusi optimal untuk pemrograman kuadratik. Metode ini merupakan modifikasi dari metode simpleks untuk masalah pemrograman linier. Metode Beale dapat diselesaikan dengan cara iterasi. Proses iterasi penggunaannya diawali dengan membuat titik awal iterasi yang memenuhi persamaan kendala.

Penelitian mengenai pemrograman kuadratik pernah dibahas oleh Patel (2014). Patel (2014) membahas metode Beale pada penyelesaian permasalahan pemrograman kuadratik yang menjelaskan bahwa metode tersebut tidak menggunakan kondisi Karush Khun-Tucker dan mendapatkan hasil optimal dengan cara iterasi. Penelitian yang membahas tentang aplikasi pemrograman kuadratik dibahas oleh Insani & Sari (2016) melakukan optimasi rata-rata produksi padi dan ketela pohon di kota Magelang, pembentukan fungsi tujuan menggunakan metode kuadrat terkecil dan untuk penyelesaiannya menggunakan kondisi Kuhn-Tucker dan metode Wolfe.

Padi sebagai tanaman pangan dikonsumsi kurang lebih 90% dari keseluruhan penduduk Indonesia untuk makanan pokok sehari-hari (Donggulo, Lapanjang, & Made, 2017). Berdasarkan data Badan Pusat Statistik (BPS) kota Balikpapan tahun 2005-2019 produksi bahan pangan padi setiap tahunnya tidak sama, padahal jumlah permintaan bahan pangan setiap tahunnya mengalami kenaikan. Dengan demikian pemerintah harus mencari alternatif untuk memenuhi kebutuhan tersebut. Salah satu cara yang dapat dilakukan pemerintah adalah memaksimumkan hasil pertanian. Maka dilakukan penelitian untuk melakukan optimasi hasil pertanian dengan menggunakan metode Beale.

Tujuan dari penelitian ini yang akan dicapai yaitu untuk mengetahui model fungsi tujuan dan fungsi kendala untuk masalah optimasi hasil produksi padi kota Balikpapan dan untuk mengetahui hasil optimasi produksi padi kota Balikpapan menggunakan metode Beale.

Pemrograman Kuadratik

Menurut Patel (2014), pemrograman kuadratik adalah pendekatan penyelesaian permasalahan optimasi *non*-linier dimana kendalanya berupa fungsi linier dan fungsi tujuannya merupakan kuadrat dari variabel keputusan ataupun perkalian dari dua variabel keputusan. Bentuk umum dari masalah pemrograman kuadratik yaitu:

$$maks/min f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j \quad (1)$$

Metode Beale

Salah satu penyelesaian metode pemrograman kuadratik adalah metode Beale. Dalam metode Beale untuk menyelesaikan masalah pemrograman kuadratik pada metode ini tidak menggunakan kondisi Kuhn-Tucker. Pada setiap iterasi, fungsi objektif dapat dinyatakan dalam variabel *non*-basis. Adapun langkah-langkah pada penyelesaian metode pemrograman kuadratik metode Beale untuk kasus memaksimumkan adalah sebagai berikut:

1) Mengubah model pada Persamaan (1) menjadi model bentuk standar yaitu model pemrograman kuadratik dengan kendala linier dalam bentuk persamaan dengan menambahkan variabel *slack* atau surplus
2) Menentukan solusi basis awal dengan menetapkan *m variabel sebagai variabel basis* (X_B) *dan n variabel sebagai* variabel *non*-basis (X_{NB}). Dimana *n* adalah jumlah variabel dan *m* adalah banyak kendala berdasarkan bentuk standar yang telah terbentuk
3) Membentuk fungsi objektif $f(x)$ dalam variabel X_{NB}, selanjutnya tentukan turunan parsial terhadap variabel X_{NB} yaitu $(\frac{\partial f}{\partial x_{NB}})$. Evaluasi turunan parsial tersebut dengan mendefinisikan nilai $X_{NB} = 0$
4) Menentukan variabel masuk: pilih nilai turunan pasial yang terbesar pada poin (3)
5) Menentukan variabel keluar: pilih variabel keluar dengan menetapkan aturan

$$min\left\{\frac{Nilai\ konstanta\ yg\ bersesuaian\ dgn\ variabel\ basis}{|koefisien\ dari\ variabel\ masuk|}\right\}$$

Contoh: $min\left\{\frac{\alpha_{10}}{|\alpha_{12}|}, \frac{\alpha_{20}}{|\alpha_{22}|}, \cdots, \frac{\gamma_{10}}{|\gamma_{12}|}\right\}$.

Jika yang terpilih adalah nilai yang berkorespondensi dengan (gamma), maka tambahkan variabel *u* pada variabel *non*-basis dengan ketentuan nilai varabel *u* adalah $u_n = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_n}$, dengan $n =$variabel masuk

6) Mengulangi prosedur (2)-(5). Nilai optimal diperoleh jika nilai evaluasi turunan parsial pada poin (3) bernilai lebih kecil atau samadengan nol

Padi

Tanaman padi (*Oryza sativa L*) merupakan tanaman pangan penting yang menjadi makanan pokok lebih dari setengah penduduk dunia karena mengandung nutrisi yang diperlukan tubuh. Kandungan karbohidrat padi sebesar 78,9 %, protein 6,8 %, lemak 0,7 % dan lain-lain 0,6 %. Indonesia sebagai negara dengan jumlah penduduk yang besar menghadapi tantangan dalam memenuhi kebutuhan pangan tersebut (Pratiwi, 2016).

Hasil dan Pembahasan

Pembentukan Model Matematika

Pada permasalahan hasil pertanian di kota Balikpapan, tanaman pangan yang menjadi produksi dalam jumlah banyak adalah tanaman padi. Terdapat dua jenis tanaman padi yang di produksi yaitu padi sawah (x_1) dan padi ladang (x_2).

Membentuk Fungsi Tujuan

Fungsi tujuan dibentuk dari rata-rata produksi yang diartikan sebagai hasil panen per hektar yang dihitung beratnya dalam satuan kwintal. Sedangkan luas panen diartikan sebagai banyaknya tanaman yang dipungut hasilnya setelah cukup umur termasuk yang gagal panen. Karena tidak memungkinkan untuk menghitung tanaman satu persatu, maka jumlah tanaman dianggap setara dengan luas tanaman yang dihitung dalam satuan hektar.

Rata-rata produksi tanaman padi total merupakan jumlahan dari rata-rata produksi tanaman padi sawah dan padi ladang. Sehingga fungsi tujuan yang akan dibentuk dapat dinyatakan sebagai jumlahan dari rata-rata produksi padi sawah dan padi ladang.

$$S(x_1, x_2) = \beta_0 x_{1i}^2 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 + \beta_0 x_{2i}^2 + \beta_1 x_{2i} + \beta_2 \quad (2)$$

dengan:

x_{1i} : Data luas panen padi sawah ke–i dalam satuan ha

x_{2i} : Data luas panen padi ladang ke–i dalam satuan ha

$S(x_1, x_2)$: Data rata-rata produksi padi dalam satuan kwintal
i : $1,2, \dots ,15$
β_j : Parameter fungsi tujuan
j : $0,1,2$

Berdasarkan persamaan (2) maka dapat dibentuk fungsi rata-rata produksi padi sawah dan padi ladang sebagai berikut:
Fungsi rata-rata produksi padi sawah adalah

$$S(x_1) = \beta_0 x_{1i}^2 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 \tag{3}$$

Fungsi rata-rata produksi padi ladang adalah

$$S(x_2) = \beta_0 x_{2i}^2 + \beta_1 x_{2i} + \beta_2 \tag{4}$$

Untuk menentukan parameter fungsi tujuan pada Persamaan (3) dan (4), yaitu dengan menyelesaikan sistem persamaan linier berikut

$$A\beta = Y \tag{5}$$

dimana

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{bmatrix}$$

Solusi β dari Persamaan (5) diperoleh dengan

$$\beta = (A)^{-1} Y \tag{6}$$

Sistem persamaan linier orde 3 dapat diselesaikan menggunakan cara analitis. Jika diselesaikan menggunakan cara analitis maka dengan menggunakan aturan Cramer yaitu dengan cara mencari solusi konstanta atau parameter β_0, β_1 dan β_2. Jika $Ax = b$ adalah suatu sistem dari n persamaan linier dengan n variabel sedemikian rupa sehingga $det(A) \neq 0$, maka sistem ini memiliki solusi yang unik. Solusinya adalah

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \cdots, n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

Dengan demikian maka parameter β_0, β_1 dan β_2 dapat dicari dengan cara sebagai berikut:

$$\beta_0 = \frac{\det \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix}}$$

$$\beta_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} y_i & n \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix}}$$

$$\beta_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} y_i \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix}}$$

Berikut didapatkan nilai $\det(A)$, $\det(A_1)$, $\det(A_2)$, $\det(A_3)$ untuk padi sawah

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1,9648 & 2,4414 & 3,3859 \\ 2,4414 & 3,3859 & 5,7926 \\ 3,3859 & 5,7926 & 15 \end{bmatrix}$$
$$\det(A_1) = \det \begin{bmatrix} 2,5671 & 2,4414 & 3,3859 \\ 3,6118 & 3,3859 & 5,7926 \\ 6,3606 & 5,7926 & 15 \end{bmatrix}$$
$$\det(A_2) = \det \begin{bmatrix} 1,9648 & 2,5671 & 3,3859 \\ 2,4414 & 3,6118 & 5,7926 \\ 3,3859 & 6,3506 & 15 \end{bmatrix}$$
$$\det(A_3) = \det \begin{bmatrix} 1,9648 & 2,4414 & 2,5671 \\ 2,4414 & 3,3859 & 3,6118 \\ 3,3859 & 5,7926 & 6,3506 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil perhitungan nilai parameter β_0, β_1 dan β_2 dapat diselesaikan menggunakan aturan Cramer.

$\det(A) = 1,4055$
$\det(A_1) = -0,1815$
$\det(A_2) = 1,5974$
$\det(A_3) = 0,0192$

Setelah semua nilai $\det(A)$, $\det(A_1)$, $\det(A_2)$ dan $\det(A_3)$ didapatkan hasilnya, maka nilai parameter β_0, β_1 dan β_2 untuk padi sawah adalah

$$\beta_0 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-1,1815}{1,4055} = -0,1291$$
$$\beta_1 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{1,5974}{1,4055} = 1,1365$$

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

$\beta_2 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{0{,}0192}{1{,}4055} = 0{,}0136$

Berdasarkan perhitungan di atas, sehingga fungsi tujuan tanaman padi sawah adalah

$$S(x_1) = -0{,}1291{x_1}^2 + 1{,}1365x_1 + 0{,}0136 \qquad (7)$$

Berikut didapatkan nilai $\det(A)$, $\det(A_1)$, $\det(A_2)$, $\det(A_3)$ untuk padi lading

$$\det(\mathrm{A}) = \det\begin{bmatrix} 1{,}5151 & 1{,}9793 & 2{,}9454 \\ 1{,}9793 & 2{,}9454 & 5{,}2286 \\ 2{,}9454 & 5{,}2286 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathrm{A}_1) = \det\begin{bmatrix} 1{,}8470 & 1{,}9793 & 2{,}9454 \\ 2{,}9134 & 2{,}9454 & 5{,}2286 \\ 4{,}5920 & 5{,}2286 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathrm{A}_2) = \det\begin{bmatrix} 1{,}5151 & 1{,}8470 & 2{,}9454 \\ 1{,}9793 & 2{,}9134 & 5{,}2286 \\ 2{,}9454 & 4{,}5920 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathrm{A}_3) = \det\begin{bmatrix} 1{,}5151 & 1{,}9793 & 1{,}8470 \\ 1{,}9793 & 2{,}9454 & 2{,}9134 \\ 2{,}9454 & 5{,}2286 & 4{,}5920 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil perhitungan nilai parameter β_0, β_1 dan β_2 dapat diselesaikan menggunakan aturan Cramer.

$\det(A) = 2{,}1652$
$\det(A_1) = -2{,}5015$
$\det(A_2) = 4{,}9378$
$\det(A_3) = 0{,}3811$

Setelah semua nilai $\det(A)$, $\det(A_1)$, $\det(A_2)$ dan $\det(A_3)$ didapatkan hasilnya, maka nilai parameter β_0, β_1 dan β_2 untuk data padi ladang adalah

$\beta_0 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-2{,}5015}{2{,}1652} = -1{,}1253$
$\beta_1 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{4{,}9378}{2{,}1652} = 2{,}2805$
$\beta_2 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{0{,}3811}{2{,}1652} = 0{,}176$

Berdasarkan perhitungan di atas, sehingga fungsi tujuan tanaman padi ladang adalah

$$S(x_2) = -1{,}1253x_2^2 + 2{,}2805x_2 + 0{,}176 \qquad (8)$$

Setelah fungsi tujuan tanaman padi sawah dan padi ladang terbentuk maka dapat dibentuk jumlah rata-rata dari kedua fungsi tersebut sesuai dengan persamaan (2).

$$S(x_1, x_2) = -0{,}1291{x_1}^2 - 1{,}1253x_2^2 + 1{,}1365x_1 + 2{,}2805x_2 + 0{,}1896 \qquad (9)$$

Sebelum Persamaan (9) diselesaikan, alangkah lebih baiknya apabila diselidiki terlebih dahulu apakah fungsi tujuan tersebut valid atau tidak. Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan oleh Dewi, Parhusip, & Linawati (2013), untuk membuktikan bahwa solusi nilai pada fungsi tujuan yang diperoleh dari metode kuadrat terkecil adalah yang terbaik, yaitu dengan melihat *conditional number*-nya. *Conditional number* digunakan untuk mengukur kesalahan yang mungkin terjadi pada *input* $(x_1), (x_2)$ dan *output* $S(x_1, x_2)$. *Error* relatif untuk *invers A* tergantung dari nilai *conditional number*, sehingga *conditional number* tidak boleh terlalu besar. Jika nilai *conditional number* < 67108864, maka nilai dinyatakan terbaik. Berikut ini adalah hasil perhitungan *conditional number*.

Tabel 1 Nilai *conditional number* Padi Sawah dan Padi Ladang

	Padi Sawah	Padi Ladang	Jumlah
conditional number	459.0938	245.2184	704,3122

Berdasarkan Tabel 1, maka nilai pada fungsi tujuan dinyatakan terbaik. Jadi Persamaan (9) merupakan fungsi pendekatan yang terbaik.

Membentuk Fungsi Kendala

Pada permasalahan ini kendalanya adalah luas panen tidak boleh lebih dari luas tanam maksimum. Sehingga fungsi kendala yang dapat dibentuk adalah

$$x_1 \leq 181{,}84$$
$$x_2 \leq 193{,}1$$

Penyelesaian Masalah Optimasi Menggunakan Metode Beale

Adapun langkah–langkah penyelesainnya adalah sebagai berikut:

1. Membentuk model pemrograman kuadratik yang diberikan dengan kendala linier dengan menambahkan variabel *slack* dan surplus.
   Memaksimumkan
   $S = -0{,}1291x_1^2 - 1{,}1253x_2^2 + 1{,}1365x_1 + 2{,}2805x_2 + 0{,}1896$
   (10)
   dengan kendala:
   $$x_1 + s_1 = 181{,}84 \qquad (11a)$$
   $$x_2 + s_2 = 193{,}1 \qquad (11b)$$
   $$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \qquad (11c)$$
2. Pilih sembarang variabel m sebagai variabel basis dan n sebagai *non*-basis.
   $$X_B = \{s_1, s_2\}$$
   $$X_{NB} = \{x_1, x_2\}$$

1) Iterasi 1

Berdasarkan Persamaan (11) maka diperoleh

$$s_1 = 181{,}84 - x_1 \qquad (12a)$$
$$s_2 = 193{,}1 - x_2 \qquad (12b)$$

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

$$S = -0{,}1291x_1^2 - 1{,}1253x_2^2 + 1{,}1365x_1 + 2{,}2805x_2 + 0{,}1896 \quad (13)$$

Langkah selanjutnya adalah menentukan variabel masuk, yaitu dengan melihat turunan parsialnya. Diperoleh turunan parsial terhadap variabel *non*-basis x_1, x_2 dari Persamaan (13) adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -0{,}2582x_1 + 1{,}1365$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -2{,}2506x_2 + 2{,}2805$$

dengan

$X_{NB}\{x_1, x_2\} = 0$, maka diperoleh

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1{,}1365$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2{,}2805$$

Setelah mendapatkan turunan parsialnya, pilih antara nilai $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$ yang terbesar sebagai variabel masuk. Karena $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2{,}2805$ terbesar, sehingga x_2 dipilih sebagai variabel masuk.

Berikutnya adalah menentukan variabel keluar, dengan mencari nilai dari

$$\min\left\{\frac{\alpha_{10}}{|\alpha_{12}|}, \frac{\alpha_{20}}{|\alpha_{22}|}, \frac{\gamma_{20}}{|\gamma_{22}|}\right\}$$

dimana:

α_{10} : Nilai konstanta pada Persamaan (12a)
α_{12} : Nilai koefisien variabel masuk pada Persamaan (12a)
α_{20} : Nilai konstanta pada Persamaan (12b)
α_{22} : Nilai koefisien variabel masuk pada Persamaan (12b)
γ_{20} : Nilai konstanta dari turunan parsial terhadap x_2
γ_{22} : Nilai koefisien variabel masuk dari turunan parsial terhadap x_2

$\min\left\{\frac{\alpha_{10}}{|\alpha_{12}|}, \frac{\alpha_{20}}{|\alpha_{22}|}, \frac{\gamma_{20}}{|\gamma_{22}|}\right\} =$
$\min\left\{\frac{181{,}84}{|0|}, \frac{193{,}1}{|-1|}, \frac{2{,}2805}{|-2{,}2506|}\right\}$
$= 1{,}0133$ berkorespodensi dengan $\frac{\gamma_{20}}{|\gamma_{22}|}$

dengan menambahkan variabel bebas *non*-basis $u_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2}$

$$u_1 = \frac{1}{2}(-2{,}2506x_2 + 2{,}2805)$$
$$u_1 = -1{,}1253x_2 + 1{,}1403 \quad (13)$$

2) Iterasi 2

$$X_B = \{s_1, s_2, x_2\}$$
$$X_{NB} = \{x_1, u_1\}$$

Berdasarkan Persamaan (12) dan (4.13) maka diperoleh

$$x_2 = \frac{1{,}1403 - u_1}{1{,}1253} = 1{,}0133 - 0{,}8887u_1 \quad (14a)$$

$$s_2 = 193{,}1 - x_2 = 192{,}0867 - 0{,}8887u_1 \quad (14.b)$$

$$s_1 = 181{,}84 - x_1 \quad (14.c)$$

$$\begin{aligned} S &= -0{,}1291x_1^2 - 1{,}1253x_2^2 + 1{,}1365x_1 + 2{,}2805x_2 + 0{,}1896 \\ &= -0{,}1291x_1^2 - 1{,}1253(1{,}0133 - 0{,}8887u_1)^2 + 1{,}1365x_1 + 2{,}2805(1{,}0133 - 0{,}8887u_1) + 0{,}1896 \\ &= -0{,}1291x_1^2 - 0{,}8888u_1^2 + 1{,}1365x_1 - 0{,}0001u_1 + 1{,}3449 \end{aligned} \quad (15)$$

Langkah selanjutnya adalah menentukan variabel masuk. Diperoleh turunan parsial terhadap variabel *non*-basis x_1, u_1 dari Persamaan (4.15) adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -0{,}2582x_1 + 1{,}1365$$
$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = -1{,}7776u_1 - 0{,}0001$$

dengan

$X_{NB}\{x_1, u_1\} = 0$, diperoleh

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1{,}1365$$
$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = -0{,}0001$$

Karena $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1{,}1365$ terbesar, sehingga x_1 dipilih sebagai variabel masuk. Berikutnya adalah menentukan variabel keluar, dengan mencari nilai dari

$$\min\left\{\frac{\alpha_{10}}{|\alpha_{12}|}, \frac{\alpha_{20}}{|\alpha_{22}|}, \frac{\alpha_{30}}{|\alpha_{32}|}, \frac{\gamma_{10}}{|\gamma_{11}|}\right\}$$

dimana:

α_{10} : Nilai konstanta pada Persamaan (14c)
α_{12} : Nilai koefisien variabel masuk pada Persamaan (14c)
α_{20} : Nilai konstanta pada Persamaan 14b)
α_{22} : Nilai koefisien variabel masuk pada Persamaan (14b)
α_{30} : Nilai konstanta pada Persamaan (14a)
α_{32} : Nilai koefisien variabel masuk pada Persamaan (14a)
γ_{10} : Nilai konstanta dari turunan parsial terhadap x_1

γ_{11} : Nilai koefisien variabel masuk dari turunan parsial terhadap x_1

$\min\left\{\frac{\alpha_{10}}{|\alpha_{12}|}, \frac{\alpha_{20}}{|\alpha_{22}|}, \frac{\alpha_{30}}{|\alpha_{32}|}, \frac{\gamma_{10}}{|1|}\right\} =$

$\min\left\{\frac{181,84}{|-1|}, \frac{192,0867}{|0|}, \frac{1,0133}{|0|}, \frac{1,1365}{|-1,7776|}\right\}$

$= 0,6393$ berkorespodensi dengan $\frac{\gamma_{10}}{|\gamma_{11}|}$

dengan menambahkan variabel bebas *non*-basis $u_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}$

$$u_2 = -0,1291x_1 + 0,5683 \qquad (16)$$

3) Iterasi-3

$$X_B = \{s_1, s_2, x_2, x_1\}$$

$$X_{NB} = \{u_1, u_2\}$$

Berdasarkan Persamaan (4.14) dan (4.16) maka diperoleh

$$x_1 = \frac{0,5683 - u_2}{0,1291}$$
$$= 4,402 - 7,7459u_2 \qquad (17a)$$

$$x_2 = 1,0133 - 0,8887u_1 \qquad (17b)$$

$$s_2 = 192,0867 - 0,8887u_1 \qquad (17c)$$

$$s_1 = 181,84 - x_1$$
$$= 181,84 - (4,402 - 7,7459u_2)$$
$$= 177,438 - 7,7459u_2 \qquad (17d)$$

$$S = -0,1291x_1^2 - 0,8888u_1^2 + 1,1365x_1 - 0,0001u_1 + 1,3449$$
$$= -0,1291(4,402 - 7,7459u_2)^2 - 0,8888u_1^2 + 1,1365(4,402 - 7,7459u_2) - 0,0001u_1 + 1,3449$$
$$= -0,8888u_1^2 - 7,7459{u_2}^2 - 0,0001u_1 - 0,0021u_2 + 3,8462 \qquad (18)$$

Langkah selanjutnya adalah menentukan variabel masuk. Diperoleh turunan parsial terhadap variabel *non*-basis u_1, u_2 dari Persamaan (18) adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = -1,7776u_1 - 0,0001$$
$$\frac{\partial f}{\partial u_2} = -15,4918u_2 - 0,0021$$

dengan

$X_{NB}\{u_1, u_2\} = 0$, diperoleh

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = -0,0001 < 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial u_2} = -0,0021 < 0$$

Karena turunan parsial pertama dari Persamaan (18) bernilai < 0 maka dapat dikatakan optimum. Berdasarkan perhitungan tersebut diperoleh hasil $s_1 = 177,438$, $s_2 = 192,0867$, $x_2 = 1,0133$, $x_1 = 4,402$. Kemudian untuk mendapatkan nilai maksimum yang dicari maka nilai variabel x_1, x_2 disubtitusikan ke Persamaan (10) yang merupakan fungsi tujuan awal yaitu

$$S = -0,1291{x_1}^2 - 1,1253x_2^2 + 1,1365x_1 + 2,2805x_2 + 0,1896$$
$$= -0,1291(4,402)^2 - 1,1253(1,0133)^2 + 1,1365(4,402) + 2,2805(1,0133) + 0,1896$$
$$= 3,8426$$

Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan pada penelitian ini, maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Model fungsi tujuan dan fungsi kendala untuk masalah optimasi hasil pertanian di kota Balikpapan adalah sebagai berikut
   Fungsi tujuan
   $S(x_1, x_2) = -0,1291{x_1}^2 - 1,1253x_2^2 + 1,1365x_1 + 2,2805x_2 + 0,1896$
   Fungsi kendala
   $$x_1 \le 181,84$$
   $$x_2 \le 193,1$$
   $$x_1, x_2 \ge 0$$
2. Metode Beale dapat diaplikasikan pada masalah optimasi hasil pertanian di kota Balikpapan dengan fungsi tujuan yang berbentuk *non*-linier dan fungsi kendala berbentuk linier. Penyelesaian optimal untuk hasil panen padi sawah dan ladang adalah Luas panen padi sawah $(x_1) = 4,402$ Ha
   Luas panen padi ladang $(x_2) = 1,0133$ Ha dengan hasil panen maksimum adalah 3,8426 kwintal.

Daftar Pustaka

Dewi,V. P., Parhusip, H. A., & Linawati, L. (2013). Analisis Hasil Panen Padi Menggunakan Pemodelan Kuadratik. *Jurnal Seminar Nasional Matematika VII Universitas Negeri Semarang.*

Donggulo, C. V., Lapanjang, I. M., & Made, U. (2017). Pertumbuhan dan Hasil Tanaman Padi (Oryza Sativa L) pada Berbagai Pola Jajar Legowo dan Jarak Tanam. *Jurnal Agroland*. 24(1), 27 – 35

Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2001). *Introduction to Operations Research Seventh Edition*. New York: McGraw-Hill.

Insani, S. N., & Sari, E. R. (2016). Penerapan Pemrograman Kuadratik Metode Wolfe untuk Optimasi Rata - Rata Produksi Padi dan Ketela Pohon di Kota Magelang.

Jurnal Seminar Nasional Matematika Dan Pendidikan Matematika Universitas Negeri Yogyakarta. 6(2).

Patel, S. (2014). *Some Aspects Of Non-Linear Optimization* (Thesis). Rourkela: Department Of Mathematics Nit Rourkela.

Pratiwi, S. H. (2016). Pertumbuhan dan Hasil Padi (Oryza Sativa L.) Sawah pada Berbagai Metode Tanam dengan Pemberian Pupuk Organik. *Jurnal Gontor AGROTECH*. 6(2). DOI: 10.21111/agrotech.v2i2.410.

Rao, S. S. (2009). *Engineering Optimization: Theory and Practice*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.