Jurnal EKSPONENSIAL Volume 12, Nomor 2, Nopember 2021
p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

Model *Geographically Weighted Weibull Regression* pada Indikator Pencemaran Air *Biochemical Oxygen Demand* di Daerah Aliran Sungai Mahakam

Geographically Weighted Weibull Regression Model On Water Pollution Indicator Biochemical Oxygen Demand In Watersheds of Mahakam River

Siti Mahmudatur Rahmah[1], Suyitno[2], dan Meiliyani Siringoringo[3]
[1,2]Laboratorium Statistika Terapan FMIPA Universitas Mulawarman
[3]Laboratorium Statistika Komputasi FMIPA Universitas Mulawarman
E-mail: mahmudarahmah@gmail.com

Abstract

Geographically Weighted Weibull Regression (GWWR) Model is a Weibull regression model applied to spatial data. Estimation of the GWWR model is performed at every observation location using spatial weighting. The purpose of this study was to determine the GWWR model of water pollution indicator Biochemical Oxygen Demand (BOD) data and the factors that influence BOD in the Mahakam River. The estimating parameters method of the GWWR model was the Maximum Likelihood Estimation (MLE) and it's estimator was obtained by Newton-Raphson Iterative method. Spatial weighting in parameter estimation was determined using the Adaptive Bisquare weighting function and bandwidth optimum was determined by using Generalized Cross-Validation (GCV) criteria. Based on the GWWR model parameters testing, the factors that influence BOD locally was nitrate concentrations, while the factors influence globally were temperature and nitrate concentration.

***Keyword*:** *Adaptive Bisquare*, BOD, GCV, GWWR, MLE

Pendahuluan

Distribusi Weibull univariat awalnya bergantung pada tiga parameter, yaitu parameter lokasi (*location*), parameter skala (*scale*) dan parameter bentuk (*shape*). Salah satu bentuk khusus distribusi Weibull tiga parameter adalah distribusi Weibull versi skala-bentuk (*scale-shape*).

Sebagai pengembangan distribusi Weibull, bahwa parameter skala dan bentuk dapat bergantung atau dipengaruhi langsung oleh variabel bebas yang menghasilkan model regresi Weibull. Regresi Weibull merupakan analisis regresi di mana variabel respon (Y) berdistribusi Weibull dan parameter skala dinyatakan dalam model regresi. (Rinne, 2009)

Pemodelan regresi Weibull dapat diaplikasikan pada berbagai bidang, salah satunya pada bidang lingkungan. Data pada bidang tersebut banyak dijumpai berupa data spasial yang memuat heterogenitas spasial. Pemodelan data spasial yang sesuai adalah pemodelan yang bersifat lokal. Model regresi yang melakukan penaksiran parameter pada setiap lokasi pengamatan secara lokal adalah model *Geographically Weighted Regression* (GWR). (Fotheringham, 2002)

Penerapan model GWR pada model regresi Weibull adalah *Geographically Weighted Weibull Regression* (GWWR). Penaksiran parameter model GWWR dilakukan pada setiap lokasi pengamatan dan menggunakan pembobot spasial. Pembobot spasial ditentukan menggunakan fungsi pembobot. Salah satu fungsi pembobot untuk menghitung pembobot spasial adalah Fungsi *Adaptive Bisquare*. Besarnya nilai pembobot spasial tergantung pada *bandwidth*, sehingga pemilihan *bandwidth* sangat penting. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk pemilihan *bandwidth* optimum adalah *Generalized Cross-Validation* (GCV). (Fotheringham, 2002)

Model GWWR pada penelitian ini diaplikasikan pada data indikator pencemaran air *Biochemical Oxygen Demand* (BOD) di sungai Mahakam Tahun 2016. Tujuan penelitian ini adalah memperoleh model GWWR pada data indikator pencemaran air BOD dan mengetahui faktor-faktor yang berpengaruh pada data indikator pencemaran air BOD.

Distribusi Weibull

Fungsi Kepadatan Peluang (FKP) variabel acak kontinu non-negatif Y berdistribusi Weibull *univariat* tiga parameter yaitu

$$f(y) = \frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{y-\eta}{\lambda}\right)^{\gamma-1} \exp\left[-\left(\frac{y-\eta}{\lambda}\right)^{\gamma}\right] \qquad (1)$$

dengan $y > \eta$, $0 < \lambda < \infty$, $0 < \gamma < \infty$, $0 < \eta < \infty$. Di mana γ, λ dan η masing-masing adalah parameter bentuk (*shape*), parameter skala (*scale*), dan parameter lokasi (*location*).

Bentuk khusus distribusi Weibull dengan dua parameter adalah distribusi Weibull versi skala-bentuk, dengan FKP yaitu

$$f(y) = \frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma-1} \exp\left[-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma}\right] \quad (2)$$

Fungsi *survival* distribusi Weibull versi Skala-bentuk diberikan oleh

$$S(y) = P(Y > y) = \exp\left[-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma}\right] \quad (3)$$

Dan fungsi distribusi kumulatif didefinisikan oleh

$$F(y) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma}\right] \quad (4)$$

FKP yang diberikan oleh persamaan (2) dapat diperoleh dari fungsi *survival* pada persamaan (3) dan fungsi distribusi kumulatif melalui hubungan

$$f(y) = \frac{dF(y)}{dy} = -\frac{dS(y)}{dy}$$

Berdasarkan persamaan (2) dan (3) diperoleh persamaan fungsi hazard yaitu

$$h(y) = \gamma\lambda^{-\gamma}y^{\gamma-1} \quad (5)$$

Persamaan fungsi *Mean* adalah

$$\mu_r = \lambda\Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \quad (6)$$

Penaksir parameter distribusi Weibull menggunaka metode *Maximum likelihood estimation* (MLE). (Rinne, 2009)

Model Regresi Weibull

Model Regresi Weibull (RW) adalah model regresi yang dikembangkan dari distribusi Weibull dengan parameter skala dinyatakan dalam model regresi. Parameter skala (λ) distribusi Weibull pada persamaan (2) sampai dengan persamaan (6) dinyatakan dalam model regresi, yakni

$$ln\lambda = \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_p X_p \text{ atau}$$
$$\lambda = \exp[\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}] \quad (7)$$

dengan $\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}} = [\beta_0 \; \beta_1 \cdots \beta_p]$ adalah vektor parameter regresi berdimensi $p + 1$ dan untuk $\mathbf{x} = [X_0 \; X_1 \;\; X_2 \cdots X_p]^T$ adalah vektor variabel bebas dengan $X_0 = 1$

Berdasarkan persamaan (2), (3), (5) dan (6) dengan memperhatikan persamaan (7) maka diperoleh model-model RW. Model RW untuk *mean* diperoleh dari persamaan (6) dan (7), yaitu

$$\mu_y(\boldsymbol{\delta},\mathrm{x}) = \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \exp[\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}] \quad (8)$$

Model regresi *survival* Weibull diperoleh dari persamaan (3) dan (7), yaitu

$$S(y, \boldsymbol{\delta}) = \exp\left[-y^{\gamma} \exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}]\right] \quad (9)$$

Model regresi Weibull untuk FKP diperoleh dari persamaan (2) dan (7), yaitu

$$\begin{aligned} f(y, \boldsymbol{\delta}) = \gamma y^{\gamma-1}&\exp[-\gamma[\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}]] \times \\ &\exp\left[-y^{\gamma}\exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}]\right] \end{aligned} \quad (10)$$

Berdasarkan persamaan (5) dan (7) diperoleh model regresi *hazard* Weibull, yaitu:

$$h(y) = \gamma y^{\gamma-1}\exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}] \quad (11)$$

(Suyitno, 2017)

Penaksir parameter RW menggunakan metode MLE. Berdasarkan FKP yang diberikan oleh persamaan (10), maka fungsi *likelihood* didefinisikan oleh

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(\boldsymbol{\delta}) = \prod_{i=1}^{n}&(\gamma {y_i}^{\gamma-1}\exp[-\gamma[\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_i]] \times \\ &\exp{-{y_i}^{\gamma}}\exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_i]) \end{aligned} \quad (12)$$

Penaksiran *Maximum Likelihood* (ML) RW akan lebih mudah diperoleh dengan memaksimumkan fungsi *log-likelihood*. Maka fungsi *log-likelihood* didefinisikan oleh

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\delta}) = \sum_{i=1}^{n}&(\ln\gamma + (\gamma - 1)\ln y_i - \gamma\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_i \\ &-{y_i}^{\gamma}\exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_i]) \end{aligned} \quad (13)$$

Penaksir ML regresi Weibull diperoleh dengan menyelesaikan persamaan

$$\frac{\partial\ell(\boldsymbol{\delta})}{\partial\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{0} \quad (14)$$

Ruas kiri dari persamaan (14), dinamakan vektor gradien ($\mathbf{g}$) yaitu

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\delta}) = \left[\frac{\partial\ell(\boldsymbol{\delta})}{\partial\gamma} \; \frac{\partial\ell(\boldsymbol{\delta})}{\partial\beta_0} \; \frac{\partial\ell(\boldsymbol{\delta})}{\partial\beta_1} \cdots \frac{\partial\ell(\boldsymbol{\delta})}{\partial\beta_p}\right]^T \quad (15)$$

Komponen-komponen vektor gradien (15) dapat dinyatakan dalam bentuk umum, yaitu masing-masing adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial\ell(\boldsymbol{\delta})}{\partial\gamma} = \sum_{i=1}^{n}&\left(\frac{1}{\gamma} + \ln y_i - \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_i - {y_i}^{\gamma}\right. \\ &\exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_i] \times y_i\, \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_i\exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_i]) \end{aligned} \quad (16)$$

dengan $\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \cdots + \beta_p X_{ip}$ dan

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\delta})}{\partial \beta_k} = \sum_{i=1}^{n} (-\gamma X_{ki} + \gamma y_i{}^{\gamma} X_{ki} \times \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_i]) \quad (17)$$

Penaksiran ML tidak dapat dilakukan secara analitis. Metode alternatif untuk mendapatkan penaksir ML adalah metode iteratif Newton-Raphson. Algoritma iteratif Newton-Raphson memerlukan perhitungan vektor gradien dan matriks Hessian. Matriks Hessian dinyatakan dengan

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\delta}) = \left(\frac{\partial^2 \ell(\delta)}{\partial \delta \partial \delta^T}\right)_{(p+2)\times(p+2)} \quad (18)$$

Elemen-elemen matriks *Hessian* $\mathbf{H}(\boldsymbol{\delta})$ yang diberikan oleh persamaan (18) dapat dinyatakan dalam bentuk umum. Elemen-elemen diagonal utama adalah

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\delta})}{\partial \gamma^2} = \sum_{i=1}^{n} \Big(-\frac{1}{\gamma} + y_i{}^{\gamma} (\ln y_i)^2\, \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_i \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_i] - y_i{}^{\gamma} (\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_i)^2 \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_i]\Big) \quad (19)$$
$$2\sum_{i=1}^{n} (y_i{}^{\gamma} (\ln y_i)(\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_i) \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_i])$$

dan

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\delta})}{\partial {\beta_k}^2} = \sum_{i=1}^{n} (-\gamma^2 y_i^{\gamma} (X_{ki})^2 \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_i]) \quad (20)$$

Elemen-elemen non diagonal utama dapat dinyatakan dalam bentuk umum, yaitu

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\delta})}{\partial \gamma \partial \beta_k} = \sum_{i=1}^{n} (-X_{ki} + \gamma y_i{}^{\gamma} X_{ki} \ln y_i X_{ki} \times \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_i] + y_i{}^{\gamma} X_{ki} \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_i]) - \sum_{i=1}^{n} (\gamma y_i{}^{\gamma} X_{ki} (-\gamma \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_i) \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_i]) \quad (21)$$

dan

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\delta})}{\partial \beta_m \partial \beta_k} = \sum_{i=1}^{n} (-\gamma^2 y_i^{\gamma} X_{mi} X_{ki} \times \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_i]) \quad (22)$$

Berdasarkan vektor gradien dan matriks Hessian maka Formulasi iterasi Newton-Raphson adalah

$$\widehat{\boldsymbol{\delta}}^{(q+1)} = \widehat{\boldsymbol{\delta}}^{(q)} - \left[\boldsymbol{H}\left(\widehat{\boldsymbol{\delta}}^{(q)}\right)\right]^{-1} \mathbf{g}\left(\widehat{\boldsymbol{\delta}}^{(q)}\right) \quad (23)$$

Iterasi berhenti jika nilai $\left\|\widehat{\boldsymbol{\delta}}^{(q+1)} - \widehat{\boldsymbol{\delta}}^{(q)} \le \boldsymbol{\varepsilon}\right\|$, dan ε bilangan positif yang sangat kecil, missal 10^{-12}. (Suyitno, 2017)

Pengujian hipotesis parameter regresi model RW terdiri dari pengujian hipotesis secara serentak dan parsial. Pengujian parameter secara serentak, dilakukan untuk mengetahui apakah parameter-parameter yang telah ditaksir berpengaruh terhadap model RW secara serentak. Hipotesis pengujian parameter secara serentak adalah

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_p = 0$
H_1: minimal ada satu $\beta_k \neq 0, k = 1,2,\cdots,p$

Staistik uji diberikan oleh

$$G = \widehat{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}} [\mathbf{I}^{\mathbf{22}}(\widehat{\mathbf{B}})]^{-1} (\widehat{\mathbf{B}}) \quad (24)$$

Dengan diketahui $\widehat{\mathbf{B}} = [\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_p\,]^T$. $[\mathbf{I}^{\mathbf{22}}(\widehat{\mathbf{B}})]^{-1}$ diperoleh dari invers matriks informasi Fisher. Matriks informasi Fisher dapat dinyatakan dengan

$$\left[\mathbf{I}(\widehat{\boldsymbol{\delta}})\right] = -\mathbf{H}[(\widehat{\boldsymbol{\delta}})] \quad (25)$$

Kriteria pengujian adalah menolak H_0 jika $G > \chi^2{}_{\alpha,np}$ atau $p - value < \alpha$, dengan $p - value = P(Gv > G)$, dimana G_v variabel acak berdistribusi $\chi^2{}_{\alpha,np}$. (Pawitan, 2001)

Pengujian hipotesis parameter regresi secara parsial untuk mengetahui apakah variabel bebas tertentu secara individual berpengaruh terhadap model regresi. Rumusan hipotesis pada pengujian parameter regresi secara parsial untuk β_k dimana $k = 0,1,2,\cdots,p$ adalah

$H_0: \beta_k = 0$
$H_1: \beta_k \neq 0$

Statistik uji adalah statistik *Wald* yang diberikan oleh

$$W_0 = \frac{\hat{\beta}_k}{SE(\hat{\beta}_k)} \sim N(0,1) \quad (26)$$

Kriteria menolak H_0 jika $|Z_{hit}| > Z_{\alpha/2}$ atau $p - value < \alpha$, $p - value = 2(1 - p(Z > |Z_{hit}|)$, dimana Z variabel acak berdistribusi normal baku. (Pawitan, 2001)

Pendeteksian Multikolinearitas

Pendeteksian multikolinearitas bertujuan untuk mengetahui apakah variabel-variabel bebas memiliki kombinasi linear dengan variabel-variabel bebas yang ditaksir. Multikolinieritas dalam model regresi dideteksi berdasarkan nilai kecepatan kenaikan variansi atau *Variance Inflation Factor* (VIF). Persamaan nilai dari VIF dituliskan sebagai berikut

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

$$VIF = \frac{1}{1 - R_k^2} \quad (27)$$

Dengan R_k^2 menyatakan koefisien determinasi model regresi dari variabel bebas X_k yang diregresikan terhadap variabel bebas lainnya. (Ryan, 1996)

Pengujian Heterogenitas Spasial

Pengujian heterogenitas spasial untuk mengetahui apakah variabel terikat merupakan data spasial (heterogenitas spasial). Hipotesis pengujian heterogenitas spasial adalah

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_n^2 = \sigma^2$
H_1: minimal ada satu $\sigma_i^2 \neq \sigma^2$; $i = 1,2,\cdots,n$

Salah satu metode yang dapat digunakan untuk pengujian heterogenitas spasial adalah metode uji *Glejser* . (Gujarati, 2003)

Statistik uji pengujian heterogenitas spasial yaitu

$$F = \frac{\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^T\mathbf{e} - n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\right)}{(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T\mathbf{X}^T\mathbf{e})/(n-p-1)} \quad (28)$$

dimana $\mathbf{e} = [|\hat{e}_1| \ |\hat{e}_1| \ \cdots |\hat{e}_n|\,]^{\boldsymbol{T}}$. Statistik uji F berdistribusi $F_{(p,n-p-1),}$di mana n adalah banyaknya pengamatan dan p adalah banyaknya variabel bebas. Uji ini menolak H_0 jika nilai $F > F_{\alpha;p,(n-p-1)}$. (Rencher, 2000)

Pembobot Spasial

Fungsi pembobot yang digunakan untuk menghitung pembobot spasial adalah Fungsi *Adaptive Bisquare* diberikan oleh

$$w_{ij} = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{d_{ij}}{b_i}\right)^2\right]^2, & \text{untuk} b_i \geq d_{ij} \\ 0, & \text{untuk } b_i \geq d_{ij} \end{cases} \quad (29)$$

dengan b_i adalah *bandwith* untuk penaksir model GWR pada lokasi ke-i dan d_{ij} adalah jarak *Euclidean* didefinisikan sebagai berikut

$$d_{ij} = \sqrt{(u_i - u_j)^2 + (v_i - v_j)^2} \quad (30)$$

Salah satu metode yang digunakan untuk memilih *bandwith* optimum menggunakan *Generalised Cross-Validation* (GCV). GCV didefinisikan sebagai berikut

$$GCV = n\sum_{i=1}^{n}[y_i - \hat{y}_i(b_i)]^2/(n-p)^2 \quad (31)$$

b_i yang optimum adalah b_i yang menghasilkan GCV yang minimum. (Fotheringham dkk, 2002)

Model GWWR

Model GWWR adalah model lokal dari regresi Weibull. Berdasarkan persamaan (8), (9), (10) dan (11) maka diperoleh model-model GWWR. model GWWR untuk *mean* di lokasi ke-i, yaitu

$$\mu_{y_i} = \Gamma\left(\frac{1}{\gamma(u_i,v_i)} + 1\right)\exp[\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}(u_i,v_i)\mathbf{x}_{\boldsymbol{i}}] \quad (32)$$

model GWWR untuk fungsi *survival* di lokasi ke-i yaitu

$$S(y_i) = \exp\left[-y_i^{\gamma(u_i,v_i)} \times \exp[-\gamma(u_i,v_i)\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}(u_i,v_i)\mathbf{x}_{\boldsymbol{i}}]\right] \quad (33)$$

model GWWR untuk FKP di lokasi ke-i yaitu

$$f(y_i) = \gamma(u_i,v_i)y_i^{\gamma(u_i,v_i)-1} \times \exp[-\gamma(u_i,v_i)[\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}(u_i,v_i)\mathbf{x}_{\boldsymbol{i}}]] \times \exp\left[-y_i^{\gamma(u_i,v_i)} exp[-\gamma(u_i,v_i)\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}(u_i,v_i)\mathbf{x}_{\boldsymbol{i}}]\right] \quad (34)$$

model GWWR untuk fungsi *hazard* di lokasi ke-i yaitu

$$h(y_i) = \gamma(u_i,v_i)y_i^{\gamma(u_i,v_i)-1} \times exp[-\gamma(u_i,v_i)\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}(u_i,v_i)\mathbf{x}_{\boldsymbol{i}}] \quad (35)$$

(Suyitno dan Sari, 2019)

Penaksir parameter GWWR menggunakan metode MLE. Berdasarkan FKP yang diberikan oleh persamaan (35), maka fungsi *likelihood* didefinisikan oleh

$$\mathrm{L}(\boldsymbol{\delta}(u_i,v_i)) = \prod_{j=1}^{n}\left(\gamma(u_i,v_i)y_j^{\gamma(u_i,v_i)-1} \times \exp[-\gamma(u_i,v_i)[\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}(u_i,v_i)\mathbf{x}_{\boldsymbol{j}}]] \times \exp\left[-y_j^{\gamma(u_i,v_i)} exp[-\gamma(u_i,v_i)\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}(u_i,v_i)\mathbf{x}_{\boldsymbol{j}}]\right]\right)^{w_{ij}} \quad (36)$$

Penaksiran ML GWWR akan lebih mudah diperoleh dengan memaksimumkan fungsi *log-likelihood*. Maka fungsi *log-likelihood* didefinisikan oleh

$$\ell(\boldsymbol{\delta}(u_i,v_i)) = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}(\ln\gamma(u_i,v_i) + \gamma(u_i,v_i)\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}(u_i,v_i)\mathbf{x}_{\boldsymbol{j}}(\gamma(u_i,v_i) - 1)\ln y_j - y_j^{\gamma(u_i,v_i)}\exp[-\gamma(u_i,v_i)\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}(u_i,v_i)\mathbf{x}_{\boldsymbol{j}}]) \quad (37)$$

Penaksir ML diperoleh dengan menyelesaikan persamaan

$$\frac{\partial\ell(\boldsymbol{\delta}(u_i,v_i))}{\partial\boldsymbol{\delta}(u_i,v_i)} = \mathbf{0} \quad (38)$$

Ruas kiri dari persamaan (38), dinamakan vektor gradien ($\mathbf{g}$) yaitu

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\delta}(u_i,v_i)) = \left[\frac{\partial\ell(\boldsymbol{\delta}(u_i,v_i))}{\partial\gamma(u_i,v_i)}\ \frac{\partial\ell(\boldsymbol{\delta}(u_i,v_i))}{\partial\beta_0(u_i,v_i)} \cdots \frac{\partial\ell(\boldsymbol{\delta}(u_i,v_i))}{\partial\beta_p(u_i,v_i)}\right]^T \tag{39}$$

Komponen-komponen vektor gradien (39) dapat dinyatakan dalam bentuk umum, yaitu masing-masing adalah

$$\frac{\partial\ell(\boldsymbol{\delta}(u_i,v_i))}{\partial\gamma(u_i,v_i)} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\Big(\frac{1}{\gamma(u_i,v_i)} + \ln y_j - \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}(u_i,v_i)\mathbf{x}_j - y_j^{\gamma(u_i,v_i)} \times \exp[-\gamma(u_i,v_i)\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}(u_i,v_i)\mathbf{x}_j] \times y_j\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}(u_i,v_i)\mathbf{x}_j \exp[-\gamma(u_i,v_i)\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}(u_i,v_i)\mathbf{x}_j]\Big) \tag{40}$$

dan

$$\frac{\partial\ell(\boldsymbol{\delta}(u_i,v_i))}{\partial\beta_k(u_i,v_i)} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\big(-\gamma(u_i,v_i)X_{kj} + \gamma(u_i,v_i)y_j^{\gamma(u_i,v_i)}X_{kj} \times \exp[-\gamma(u_i,v_i)\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}(u_i,v_i)\mathbf{x}_j]\big) \tag{41}$$

Penaksiran ML tidak dapat dilakukan secara analitis. Metode alternatif untuk mendapatkan penaksir ML adalah metode iteratif Newton-Raphson. Algoritma iteratif Newton-Raphson memerlukan perhitungan vektor gradien dan matriks Hessian. Matriks Hessian dinyatakan dengan

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\delta}(u_i,v_i)) = \left(\frac{\partial^2\ell(\delta(u_i,v_i))}{\partial\delta(u_i,v_i)\partial\delta(u_i,v_i)^T}\right)_{(p+2)\times(p+2)} \tag{42}$$

Elemen-elemen matriks *Hessian* yang diberikan oleh persamaan (42) dapat dinyatakan dalam bentuk umum yaitu

$$\frac{\partial^2\ell(\boldsymbol{\delta}(u_i,v_i))}{\partial\gamma^2(u_i,v_i)} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\Big(-\frac{1}{\gamma(u_i,v_i)} + y_j^{\gamma}(\ln y_j)^2\,\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_j(u_i,v_i)\exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}(u_i,v_i)\mathbf{x}_j] - y_j^{\gamma}(\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_j)^2\exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_j]\Big) \tag{43}$$
$$2\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\big(y_j^{\gamma(u_i,v_i)}(\ln y_j)(\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}(u_i,v_i)\mathbf{x}_j)\exp[-\gamma(u_i,v_i)\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}(u_i,v_i)\mathbf{x}_j]\big)$$

dan

$$\frac{\partial\ell(\boldsymbol{\delta}(u_i,v_i))}{\partial{\beta_k}^2(u_i,v_i)} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}(-\gamma^2(u_i,v_i)y_j^{\gamma(u_i,v_i)}{X_{kj}}^2\exp[-\gamma(u_i,v_i)\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}(u_i,v_i)\mathbf{x}_j]) \tag{44}$$

Elemen-elemen non diagonal utama dapat dinyatakan dalam bentuk umum, yaitu

$$\frac{\partial\ell(\boldsymbol{\delta})(u_i,v_i)}{\partial\gamma(u_i,v_i)\partial\beta_k} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\big(-X_{kj} + \gamma(u_i,v_i)y_j^{\gamma(u_i,v_i)}\ln y_j X_{kj} \times \exp[-\gamma(u_i,v_i)\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}(u_i,v_i)\mathbf{x}_j]) + y_j^{\gamma(u_i,v_i)}X_{kj}\exp[-\gamma(u_i,v_i)\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}(u_i,v_i)\mathbf{x}_j]) - (\gamma(u_i,v_i)y_j^{\gamma(u_i,v_i)}X_{kj}(-\gamma(u_i,v_i)\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}(u_i,v_i)\mathbf{x}_j)\exp[-\gamma(u_i,v_i)\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}(u_i,v_i)\mathbf{x}_j]\big) \tag{45}$$

dan

$$\frac{\partial\ell(\boldsymbol{\delta}(u_i,v_i))}{\partial\beta_m(u_i,v_i)\partial\beta_k(u_i,v_i)} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\big(-\gamma^2(u_i,v_i)y_j^{\gamma(u_i,v_i)}X_{mj}X_{kj} \times \exp[-\gamma(u_i,v_i)\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}(u_i,v_i)\mathbf{x}_j]\big) \tag{46}$$

Berdasarkan vektor gradien dan matriks Hessian maka Formulasi iterasi Newton-Raphson adalah

$$\widehat{\boldsymbol{\delta}}^{(q+1)}(u_i,v_i) = \widehat{\boldsymbol{\delta}}^{(q)}(u_i,v_i) - \left[\mathbf{H}\left(\widehat{\boldsymbol{\delta}}^{(q)}(u_i,v_i)\right)\right]^{-1}\mathbf{g}\left(\widehat{\boldsymbol{\delta}}^{(q)}(u_i,v_i)\right) \tag{47}$$

Proses iterasi Newton-Raphson akan berhenti bila terpenuhi kondisi konvergen, yaitu selisih $\left\|\widehat{\boldsymbol{\delta}}^{(q+1)}(u_i,v_i) - \widehat{\boldsymbol{\delta}}^{(q)}(u_i,v_i) \le \boldsymbol{\varepsilon}\right\|$, dan ε adalah bilangan positif yang sangat kecil missal 10^{-12}. (Suyitno dan Sari, 2019)

Pengujian kesesuaian model RW dan model GWWR bertujuan untuk menguji apakah faktor lokasi geografis berpengaruh terhadap model atau untuk mengetahui apakah terdapat perbedaan antara model global RW dengan model GWWR. Hipotesis pengujian ini adalah

$H_0: \beta_k(u_i,v_i) = \beta_k; k = 1,2,\cdots,p; i = 1,2,\cdots,n$
H_1: minimal ada satu $\beta_k(u_i,v_i) \neq \beta_k$

Statistik uji diberikan oleh

$$F_{hit} = \frac{D(\widehat{\boldsymbol{\delta}})/v_1}{D(\widehat{\boldsymbol{\delta}}^*)/v_2}, \tag{48}$$

Berdasarkan distribusi $D(\widehat{\boldsymbol{\delta}})$ dan distribusi $D(\widehat{\boldsymbol{\delta}}^*)$, F_{hit} berdistribusi F dengan derajat bebas $v_1 = p$ dan $v_2 = np$. Kriteria pengujian kesesuaian model adalah menolak H_0 jika $F_{hit} > F_{\alpha;v1,v2}$ atau jika $p - value < \alpha$, dengan $p - value = P(F_v > F_{hit}$, dimana F_v adalah variabel acak berdistribusi $F_{\alpha;v1,v2}$. (Fathurahman dkk, 2016)

Pengujian parameter model GWWR dilakukan secara serentak dan parsial. Hipotesis pengujian secara serentak adalah sebagai berikut

$H_0: \beta_1(u_i,v_i) = \beta_2(u_i,v_i) = \cdots = \beta_p(u_i,v_i) = 0$
H_1: minimal ada satu $\beta_k(u_i,v_i) \neq 0$
$k = 1,2,\cdots,p; i = 1,2,\cdots,n$

Statistik uji yang diperoleh adalah

$$G_2 = \widehat{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}}(u_i,v_i)[\mathbf{I}^{\mathbf{22}}(\widehat{\mathbf{B}}(u_i,v_i))]^{-1}(\widehat{\mathbf{B}}(u_i,v_i)) \quad (49)$$

Dimana $[\mathbf{I}^{\mathbf{22}}(\widehat{\mathbf{B}}(u_i,v_i))]^{-1}$ diperoleh dari invers matriks informasi Fisher lokasi(u_i,v_i). Matriks informasi Fisher lokasi(u_i,v_i) dapat dinyatakan dengan

$$\left[\mathbf{I}\left(\widehat{\boldsymbol{\delta}}(u_i,v_i)\right)\right] = -\mathbf{H}[\left(\widehat{\boldsymbol{\delta}}(u_i,v_i)\right)] \quad (50)$$

Kriteria pengujian adalah menolak H_0 jika $G_2 > {\chi^2}_{\alpha,np}$ atau $p - value < \alpha$, dengan $p - value = P(Gv > G_2)$, dimana G_v variabel acak berdistribusi ${\chi^2}_{\alpha,np}$. (Pawitan, 2001)

Pengujian parameter model GWWR secara parsial digunakan untuk mengetahui signifikansi pada masing-masing parameter $\beta_k(u_i,v_i)$. Hipotesis uji secara parsial untuk parameter $\beta_k(u_i,v_i)$ dimana $k = 0,1,2,\cdots,p$

$$H_0: \beta_k(u_i,v_i) = 0$$
$$H_1: \beta_k(u_i,v_i) \neq 0$$

Statistik uji adalah statistik *Wald* yaitu

$$Z_{hit} = \frac{\hat{\beta}_k(u_i,v_i)}{SE(\hat{\beta}_k(u_i,v_i))} \quad (51)$$

Kriteria menolak H_0 jika $|Z_{hit}| > Z_{\alpha/2}$ atau $p - value < \alpha$, $p - value = 2(1 - p(Z > |Z_{hit}|)$, dimana Z variabel acak berdistribusi normal baku. (Pawitan, 2001)

Ukuran Kebaikan Model

Ukuran kebaikan model menggunakan Metode *Akaike Information Criterion* (AIC). Perhitungan nilai AIC menggunakan persamaan berikut

$$AIC = -2\ln L(\widehat{\boldsymbol{\delta}}) + 2(p) \quad (52)$$

Nilai p adalah banyaknya variabel bebas yang diestimasi dan $L(\widehat{\boldsymbol{\delta}})$ adalah fungsi *maximum likelihood*. Model regresi terbaik adalah model regresi yang menghasilkan nilai AIC terkecil. (Akaike,1978)

Interpretasi Model GWWR

Interpretasi model GWWR dapat menggunakan perhitungan rasio. Rasio regresi *hazard* Weibull untuk variabel bebas ke-k pada lokasi ke-i adalah

$$RH_{xk}(u_i,v_i) = \exp(-\hat{\gamma}(u_i,v_i)\hat{\beta}_k(u_i,v_i)) \quad (53)$$

Rasio regresi *survival* Weibull pada X ke-k pada lokasi ke-i adalah

$$RS_{xk}(u_i,v_i) = \frac{\exp[-{y_i}^{\gamma(u_i,v_i)}\exp[(-\hat{\gamma}(u_i,v_i)(\hat{\beta}_0(u_i,v_i) + (\hat{\beta}_1(u_i,v_i)X_1 + \cdots + (\hat{\beta}_k(u_i,v_i)(X_k+1) + \cdots + (\hat{\beta}_p(u_i,v_i)X_p)]}{\exp[-{y_i}^{\gamma(u_i,v_i)}\exp[(-\hat{\gamma}(u_i,v_i)(\hat{\beta}_0(u_i,v_i) + (\hat{\beta}_1(u_i,v_i)X_1 + \cdots + (\hat{\beta}_k(u_i,v_i)(X_k) + \cdots + (\hat{\beta}_p(u_i,v_i)X_p)]} \quad (54)$$

Rasio regresi *mean* variabel terikat pada X ke-k pada lokasi ke-i adalah

$$R\mu_{xk}(u_i,v_i) = \exp(\hat{\beta}_k(u_i,v_i)) \quad (55)$$

(Hosmer, 2008)

Biochemical Oxygen Demand

Indikator atau parameter yang umum digunakan untuk mendeteksi kualitas air salah satunya adalah *Biochemical Oxygen Demand* (BOD). BOD adalah banyaknya oksigen yang dibutuhkan oleh mikroorganisme untuk menguraikan bahan-bahan organik (zat pencemar) yang terdapat di dalam air secara biokimia.

Standar baku mutu untuk indikator BOD pada pencemaran air sungai mahakam ditunjukan pada Tabel 1.

Tabel 1. Kandungan *Biochemical Oxygen Demand* Standar Baku Mutu Air Kelas 1

Konsentrasi BOD	Indikasi
≤ 2 mg/l	Tidak Tercemar
> 2 mg/l	Tercemar

Sumber : PERDA Kalimantan Timur No. 2 Tahun 2011 Kelas 1

Menurut Asdak (1995), faktor-faktor yang mempengaruhi BOD adalah debit air, suhu, TDS, nitrat dan amonia.

Hasil Penelitian dan Pembahasan

Data penelitian ini diperoleh dari Dinas Lingkungan Hidup provinsi Kalimantan Timur Tahun 2016. Data penelitian ini terdiri dari data variabel terikat (Y) adalah data BOD perairan sungai mahakam (golongan air kelas 1, variabel bebas terdiri dari Debit Air (X_1), Suhu (X_2), TDS (X_3), konsentrasi nitrat (X_4), konsentrasi amonia (X_5), dan data koordinat lokasi titik sampel yang dinyatakan pasangan letak garis lintang (u_i) dan letak garis bujur (v_i) bujur dari 27 titik sampel di Daerah Aliran Sungai Mahakam provinsi Kalimantan Timur.

Deskripsi Data Penelitian

Deskripsi data dinyatakan dalam statistika deskriptif yang meliputi rata-rata, nilai maksimum, nilai minimum, dan koefisien variansi. Statistika deskriptif data penelitian disajikan pada Tabel 2

Tabel 2. Analisis Statistika Deskriptif

Variabel	Rataan	Maks	Min	KV (%)
BOD	5,10	11,30	0,80	79,23
Debit Air	395,10	2030	10,00	155,89
Suhu	28,94	34,00	23,60	6,90
TDS	94,23	236,50	16,00	65,95
Nitrat	0,60	1,32	0,04	53,59
Amonia	0,49	3,14	0,01	141,72

Keterangan : KV = Koefisien Variasi

Berdasarkan statistika deskriptif pada Tabel 2 rata-rata BOD adalah 5,10 *mg/l* yang berarti bahwa air sungai mahakam diindikasikan tercemar karena berada di atas ambang batas angka baku yaitu 2 *mg/l*. Berdasarkan nilai koefisien variasi setiap variabel, dapat diketahui bahwa data penyebaran paling besar adalah data debit air karena memiliki nilai koefisien variasi terbesar yaitu 155,8982%.

Penaksiran Parameter Distribusi Weibull

Metode Penaksir parameter distribusi Weibull menggunakan MLE yang diselesaikan dengan metode iteratif Newton-Raphson. Hasil perhitungan dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3. Parameter Distribusi Weibull

Parameter	Taksiran
Skala (λ)	5,5378
Bentuk (γ)	1,2907

Berdasarkan hasil penaksiran parameter distribusi Weibull pada Tabel 3. diperoleh taksiran fungsi distribusi kumulatif masing-masing adalah

$$F^*(y) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{y}{5{,}5378}\right)^{1{,}2903}\right]$$

Pengujian Distribusi

Pengujian distribusi dilakukan untuk mengetahui apakah populasi berdistribusi Weibull dengan fungsi distribusi kumulatif. $F^*(y)$. Hasil perhitungan dapat dilihat pada Tabel 4.

Tabel 4. Pengujian Distribusi Weibull Data BOD

D_{hitung}	$D_{27,(0,10)}$	Keputusan
0,1957	0,2290	Gagal menolak H_0

Berdasarkan hasil perhitungan statistik uji yang disajikan pada Tabel 4. diputuskan gagal menolak H_0 pada taraf signifikansi 0,10, hal ini ditunjukkan oleh nilai statistik uji D = 0,1957 < $D_{27,(0,10)}$ = 0,2290. Kesimpulan dari uji hipotesis menyatakan bahwa data BOD berdistribusi Weibull.

Pendeteksian Multikolinearitas

Hasil perhitungan nilai VIF setiap variabel bebas dapat dilihat pada Tabel 5.

Tabel 5. Nilai VIF Setiap Variabel Bebas

Variabel	VIF
Debit Air (X_1)	1,1086
Suhu(X_2)	1,3544
TDS (X_3)	1,3732
Nitrat (X_4)	1,4557
Amonia (X_5)	1,5350

Berdasarkan nilai VIF pada Tabel 5. dapat disimpulkan bahwa tidak terjadi multikolinearitas antar variabel bebas. Hal ini ditunjukkan oleh nilai VIF setiap variabel bebas kurang dari 10, sehingga pemodelan regresi Weibull pada penelitian terdiri dari 5 variabel bebas, yaitu debit air, suhu, TDS, konsentrasi nitrat, dan konsentrasi amonia.

Pemodelan Regresi Weibull

Penaksiran parameter model RW menggunakan metode MLE yang diselesaikan dengan metode Iteratif Newton-Raphson. Hasil penaksiran parameter ditunjukan pada Tabel 6.

Tabel 6. Penaksiran Parameter Model RW

Parameter	Taksiran
γ	2,0185
β_0	-3,2184
β_1	-0,0001
β_2	0,1297
β_3	0,0004
β_4	1,5815
β_5	0,0925

Berdasarkan hasil penaksiran parameter pada model RW pada Tabel 6. diperoleh model regresi

$$\hat{S}(y_i) = \exp[-y_i^{2{,}0185}\exp[-2{,}0185(-3{,}2184 - 0{,}0001X_{i1} + 0{,}1297X_{i2} + 0{,}0004X_{i3} + 1{,}5815X_{i4} + 0{,}0925X_{i5})]]$$

Model regresi *hazard* Weibull adalah

$$\hat{h}(y_i) = 2{,}0185y_i^{1{,}0185}\exp[-2{,}0185(-3{,}2184 - 0{,}0001X_{i1} + 0{,}1297X_{i2} + 0{,}0004X_{i3} + 1{,}5815X_{i4} + 0{,}0925X_{i5})]$$

Model regresi Weibull untuk *mean* adalah

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

$$\hat{\mu}(y_i) = 0{,}8861 \exp[-3{,}2184 - 0{,}0001X_{i1} + 0{,}1297X_{i2} + 0{,}0004X_{i3} + 1{,}5815X_{i4} + 0{,}0925X_{i5})]$$

Pengujian parameter secara serentak bertujuan untuk mengetahui apakah variabel-variabel bebas secara serentak berpengaruh terhadap model RW. Hasil pengujian hipotesis parameter RW secara serentak disajikan pada Tabel 7.

Tabel 7. Nilai Statistik Uji Serentak Model RW

G_{hitung}	$\chi^2_{0,10(5)}$	*p-value*	Keputusan
46,3793	9,2364	0,0000	Menolak H_0

Berdasarkan hasil perhitungan secara serentak, diputuskan menolak H_0 pada taraf signifikansi 0,10, hal ini ditunjukkan oleh nilai statistik uji G = 46,3793 > $\chi^2_{0,10(5)}$= 9,2364 atau *p-value* = 0,0000 < α = 0,10. Kesimpulan uji hipotesis ini adalah debit air, suhu, TDS, nitrat, dan amonia secara serentak berpengaruh terhadap model RW.

Pengujian parameter secara parsial bertujuan untuk mengetahui pengaruh setiap variabel bebas terhadap model RW. Hasil pengujian hipotesis parameter RW secara parsial disajikan pada Tabel 8.

Tabel 8. Nilai Statistik Uji Parsial Model RW

Variabel	$\|W_0\|$	*p-value*	Keputusan
X_0	1,7504	0,0800	Menolak H_0
X_1	0,2494	0,8031	Gagal menolak H_0
X_2	1,8594	0,0630	Menolak H_0
X_3	0,2360	0,8134	Gagal menolak H_0
X_4	3,6498	0,0003	Menolak H_0
X_5	0,5331	0,5939	Gagal menolak H_0

Berdasarkan statistik uji Wald yang diperoleh pada Tabel 8. diperoleh variabel suhu (X_2) dan nitrat (X_4) secara individual berpengaruh terhadap model RW.

Pengujian Heterogenitas Spasial

Pengujian heterogenitas spasial untuk mengetahui apakah data BOD merupakan data spasial (heterogenitas spasial). Hasil perhitungan statistik uji disajikan pada Tabel 9.

Tabel 9. Nilai Statistik Uji Heterogenitas Spasial

F_{hitung}	$F_{(0,10;5;21)}$	*p-value*	Keputusan
2,2850	2,1423	0,0831	Menolak H_0

Berdasarkan Tabel 9. Diperoleh hasil F_{hitung} = 2,2850 > $F_{(0,10;5;21)}$= 2,1423 atau *p-value* = 0,0831 < α = 0,10 maka diputuskan menolak H_0 yang berarti terdapat heterogenitas spasial. Berdasarkan hasil pengujian heterogenitas spasial, diduga pemodelan yang sesuai adalah pemodelan yang bersifat lokal, dalam hal ini menggunakan model GWWR.

Pemodelan GWWR

Metode penaksiran parameter model GWWR menggunakan metode MLE yang diselesaikan dengan metode iteratif Newton-Raphson. Sebagai contoh hasil penaksiran parameter model GWWR ke-9 (Belayan Hulu) ditampilkan pada Tabel 10.

Tabel 10. Penaksir Parameter Model GWWR

Parameter	Taksiran
γ	1,9628
β_0	-3,5176
β_1	-0,0001
β_2	0,1381
β_3	0,0004
β_4	1,6011
β_5	0,1640

Pengujian Kesesuaian Model RW dan Model GWWR

Pengujian kesesuaian model bertujuan untuk mengetahui apakah terdapat perbedaan antara model RW dengan model GWWR. Hasil pengujian kesesuaian model disajikan pada Tabel 11.

Tabel 11. Nilai Statistik Uji Kesesuaian Model RW dan Model GWWR

F_{hitung}	$F_{(0,10;5;135)}$	*p-value*	Keputusan
22,6580	1,8904	0,0000	Menolak H_0

Berdasarkan Tabel 11. diperoleh nilai F_{hitung} = 22,6580 > $F_{(0,10;5;135)}$ = 1,8904 atau *p-value* = 0,0000 < α = 0,10 maka diputuskan menolak H_0 yang bearti bahwa model RW berbeda dengan model GWWR.

Perbandingan ukuran kebaikan model RW dan model GWWR menggunakan nilai GCV dan AIC dapat dilihat pada Tabel 12.

Tabel 12. Ukuran Kebaikan Model RW dan Model GWWR

Model	GCV	AIC
RW	13,0974	127,5813
GWWR	9,8164	120,9590

Berdasarkan ukuran kebaikan model, model GWWR lebih baik dari pada model RW karena model GWWR memiliki nilai GCV dan AIC yang lebih kecil.

Pengujian Parameter Model GWWR

Pengujian parameter secara serentak bertujuan untuk mengetahui apakah variabel-variabel bebas secara serentak berpengaruh

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

terhadap model GWWR. Hasil pengujian hipotesis parameter model GWWR secara serentak disajikan pada Tabel 13.

Tabel 13. Pengujian Hipotesis Parameter Model GWWR

G_{hitung}	$\chi^2_{0,10(135)}$	*p-value*	**Keputusan**
926,0100	156,4397	0,0000	Menolak H_0

Berdasarkan Tabel 13, diputuskan menolak H_0 pada taraf signifikansi 0,10, hal ini ditunjukkan oleh G = 926,0100 > $\chi^2_{0,10(5)}$ = 156,4397 atau *p-value* = 0,0000 < α = 0,10. Kesimpulan uji hipotesis ini adalah debit air, suhu, TDS, nitrat, dan amonia secara serentak berpengaruh terhadap model GWWR.

Pengujian parameter model GWWR secara parsial digunakan untuk mengetahui pengaruh variabel bebas secara individual terhadap model GWWR. Berdasarkan hasil pengujian parameter model GWWR secara parsial, model GWWR dapat dikelompokkan menjadi 2 kelompok dapat dilihat pada Tabel 14.

Tabel 14. Kelompok Model GWWR Berdasarkan Variabel Bebas yang Berpengaruh

Kelompok	**Variabel yang Berpengaruh**	**Lokasi Pengamatan**
1	X_2 dan X_4	Kedang Kepala Hulu Karang Mumus Hilir Kampung Semayang Jempang Inlet Jempang Outlet Belayan Hilir Boh Hulu Boh Hilir Muara Muntai Kota Bangun Outlet Semayang Jembayan Tenggarong Mahakam-Boh
2	X_4	Kedang Kepala Hilir Karang Mumus Hulu Kampung Pela Belayan Hulu Bloro Pulau Kumala Kalamur Kantor Gubernur Palaran Anggana Melak Muara Pahu Batuq

Interpretasi Model

Berdasarkan hasil penaksiran parameter pada Tabel 10. model regresi untuk fungsi *survival*, fungsi *hazard*, dan fungsi mean pada lokasi ke-9 (Belayan Hulu) berturut-turut adalah

$$\hat{S}(y_9) = \exp[-y_9^{1,9628}\exp[-1,9628(-3,5176 - 0,0001X_{9,1} + 0,1381X_{9,2} + 0,0004X_{9,3} + 1,6011X_{9,4} + 0,1640X_{9,5})]]$$

Nilai *ratio* fungsi *survival* untuk variabel nitrat adalah 1,3270, menunjukkan setiap kenaikan 1 *mg/l* konsentrasi nitrat dan dianggap nilai variabel lainnya tetap akan menurunkan peluang tidak tercemar air sungai mahakam di lokasi pengamatan Belayan Hulu menjadi 1,3270 kali.

$$\hat{h}(y_9) = 1,9628y_9^{1,9628}\exp[-1,9628(-3,5176 - 0,0001X_{9,1} + 0,1381X_{9,2} + 0,0004X_{9,3} + 1,6011X_{9,4} + 0,1640X_{9,5})]$$

Nilai *ratio* fungsi *hazard* untuk variabel nitrat adalah 0,0432, menunjukkan setiap kenaikan 1 *mg/l* konsentrasi nitrat dan dianggap nilai variabel lainnya tetap maka potensi (*rate*) air sungai mahakam di lokasi pengamatan Belayan Hulu tercemar menjadi 0,0432 kali.

$$\hat{\mu}(y_i) = 0,8866\exp[-3,5176 - 0,0001X_{9,1} + 0,1381X_{9,2} + 0,0004X_{9,3} + 1,6011X_{9,4} + 0,1640X_{9,5}]$$

Nilai *ratio* fungsi *mean* untuk variabel nitrat adalah 4,9583, menunjukkan setiap kenaikan 1 *mg/l* konsentrasi nitrat dan dianggap nilai variabel lainnya tetap akan meningkatkan rata-rata BOD air sungai mahakam di lokasi pengamatan Belayan Hulu menjadi 4,9583 kali.

Kesimpulan

Berdasarkan hasil pengujian yang telah dilakukan maka kesimpulan yang diperoleh adalah

1. Salah satu model *Geographically Weighted Weibull Regression* kelompok 1 adalah model regresi untuk fungsi *survival*, fungsi *hazard*, dan fungsi mean pada lokasi ke-1 (Kedang Kepala Hulu) berturut-turut adalah

$$\hat{S}(y_1) = \exp[-y_1^{2,0185}\exp[-2,0185(-3,2184 - 0,0001X_{1,1} + 0,1297X_{1,2} + 0,0004X_{1,3} +$$

$1{,}5815X_{1,4} + 0{,}0925X_{1,5})]]$

$\hat{h}(y_1) = 2{,}0185y_1^{1{,}0185}\exp[-2{,}0185(-3{,}2184 - 0{,}0001X_{1,1} + 0{,}1297X_{1,2} + 0{,}0004X_{1,3} + 1{,}5815X_{1,4} + 0{,}0925X_{1,5})]$

$\hat{\mu}(y_1) = 0{,}8861\exp[-3{,}2184 - 0{,}0001X_{1,1} + 0{,}1297X_{1,2} + 0{,}0004X_{1,3} + 1{,}5815X_{1,4} + 0{,}0925X_{1,5})]$

Salah satu model *Geographically Weighted Weibull Regression* kelompok 2 adalah model regresi untuk fungsi *survival*, fungsi *hazard*, dan fungsi mean pada lokasi ke-9 (Belayan Hulu) berturut-turut adalah

$\hat{S}(y_9) = \exp[-y_9^{1{,}9628}\exp[-1{,}9628(-3{,}5176 - 0{,}0001X_{9,1} + 0{,}1381X_{9,2} + 0{,}0004X_{9,3} + 1{,}6011X_{9,4} + 0{,}1640X_{9,5})]]$

$\hat{h}(y_9) = 1{,}9628y_9^{1{,}9628}\exp[-1{,}9628(-3{,}5176 - 0{,}0001X_{9,1} + 0{,}1381X_{9,2} + 0{,}0004X_{9,3} + 1{,}6011X_{9,4} + 0{,}1640X_{9,5})]$

$\hat{\mu}(y_i) = 0{,}8866\exp[-3{,}5176 - 0{,}0001X_{9,1} + 0{,}1381X_{9,2} + 0{,}0004X_{9,3} + 1{,}6011X_{9,4} + 0{,}1640X_{9,5}]$

2. Faktor-faktor yang berpengaruh bersifat lokal terhadap model GWWR adalah nitrat. Sedangkan faktor-faktor yang bersifat global adalah suhu dan nitrat.

Daftar Pustaka

Akaike, H. (1978). “A Bayesian Analysis of The Minimum AIC Procedure”. *Annals of the Institute of Atatistical Mathematics*. 30, 9-14.

Asdak, C. (1995). *Hidrologi dan Pengolahan Daerah Aliran Sungai*. Yogyakarta: Gajah Mada University Press.

Fotheringham, A.S., Brunsdon, C., & Charlton, M.E. (2002). *Geographically Weighted Regression: The Analysis of Spatial Varying Relationships*. England: John Wiley & Sons.

Gujarati, D. (2003). *Ekonometrika Dasar*. Jakarta: Erlangga.

Hosmer, D.W., Lemeshow, S., & May, S. (2008), *Applied Survival Analysis. Regression Modeling of Time-to-Event Data*. New Jersey: John Wiley.

Pawitan, Y. (2001). *In All Likelihood. Statistical Modelling and Inference Using Likelihood*. England: Clarendon Press-Oxford.

Peraturan Pemerintah Nomor 82 Tahun 2001 Tentang Pengelolaan Kualitas Air dan Pengendalian Pencemaran Air.

Rencher, A.C. (2000). *Linear Model in Statistics*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Rinne, H. (2009). *The Weibull Distribution A Handbook*. New York: CRC Press Taylor and Francis Group.

Ryan, T.P. (1996). *Modern Regression Methods*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Suyitno. (2017). *Model Geographically Weighted Multivariate Weibull Regression* (Disertasi). ITS Surabaya.

Suyitno & Sari, N W W. (2019). “Parameter Estimation of Mixed Geographically Weighted Weibull Regression Model”. *Journal of Physics. Conference Series* 1277 012046.