Perbandingan Metode *Bootstrap* Dan *Jackknife Resampling* Dalam Menentukan Nilai Estimasi Dan Interval Konfidensi Parameter Regresi

Comparison of Bootstrap and Jackknife Resampling Methods in Determining Estimates Values and Confidence Intervals of Regression Parameter

Dessy Ariani[1], Yuki Novia Nasution[2], dan Desi Yuniarti[3]
[1]Mahasiswa Program Studi Statistika FMIPA Universitas Mulawarman
[2,3]Dosen Program Studi Statistika FMIPA Universitas Mulawarman
Email: arianidessyy@gmail.com[1], yuki.novia.n@gmail.com[2], desy_yunt@yahoo.com[3]

Abstract
Regression analysis is a study that describes and evaluates the relationship between an independent variable and the dependent variable for the purpose of estimating or predicting the value of the dependent variable based on the value of the independent variables. Resampling is used when samples obtained for analyzing is less. In this study, Bootstrap method and Jackknife method are using. Both methods are used to find the value of regression parameter estimates and confidence intervals of regression parameter values which applied to the data position of Public Deposits in four groups of banks : Persero Banks, Government Banks, National Private Banks and Foreign Banks to knowing the best resampling methods to find the value of regression parameter estimates and confidence intervals of regression parameter values. There are three independent variables which are used in this study, namely investments loans, working capital loans and consumer loans. From the research results, it is obtained that the Jackknife method is the most appropriate method because it has smaller standard error values so Jackknife methods have a narrow range confidence intervals.

Keywords: Bootstrap, Jackknife, Regression

Pendahuluan

Analisis regresi merupakan studi yang menjelaskan dan mengevaluasi hubungan antara suatu variabel bebas dengan satu variabel terikat untuk tujuan mengestimasi atau meramalkan nilai variabel terikat didasarkan pada nilai variabel bebas yang diketahui.Dalam regresi terdapat sampel minimal yang harus dipenuhi agar data dapat dianalisis menggunakan regresi.Namun apabila dalam suatu kasus diperoleh sampel yang minim maka dapat dilakukan *resampling*.

Resampling merupakan kegiatan pengambilan sampel dari sampel yang telah ada.*Resampling* yang digunakan dalam penelitian ini adalah *bootstrap* dan *jackknife*.

Simpanan adalah dana yang dipercayakan oleh masyarakat untuk dititipkan di bank. Dana tersebut kemudian dikelola oleh bank dalam bentuk simpanan, seperti rekening giro, rekening tabungan, dan rekening deposito untuk kemudian diusahakan kembali dengan cara disalurkan ke masyarakat dalam bentuk pemberian kredit, di mana kredit merupakan salah satu faktor yang sangat penting dalam menunjang lancar atau tidaknya kegiatan usaha masyarakat (Kasmir, 2007).

Kredit bagi bank merupakan sumber penghasilan yang sangat besar yang berasal dari bunga kredit. Penghasilan tersebut sangat berguna untuk menambah modal usaha yang akan dilakukan oleh bank. Kredit yang diberikan oleh bank harus bermanfaat dan menguntungkan, artinya selain menjamin pelunasan atas penarikan dana, juga harus menghasilkan keuntungan bagi bank tersebut. Pemberian kredit juga menunjang perekonomian masyarakat karena pemberian kredit tersebut, usaha nasabah (*debitur*) dapat lebih ditingkatkan (Taswan, 2005).

Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik untuk meneliti mengenai perbandingan metode *Bootstrap resampling* dan *Jackknife* untuk memperkirakan nilai interval konfidensi parameter regresi yang diaplikasikan pada data posisi simpanan masyarakat pada tahun 2009-2015.

Analisis Regresi

Analisis regresi merupakan salah satu teknik analisis data dalam statistika yang seringkali digunakan untuk mengkaji hubungan antara beberapa variabel dan meramal suatu variabel(Kutner, Nachtsheim dan Neter, 2004).

Analisis regresi dibagi menjadi dua yaitu analisis regresi linier sederhana yang hanya membutuhkan satu variabel bebas dan regresi liner berganda yang membutuhkan dua atau lebih variabel bebas.Regresi sederhana adalah bentuk regresi dengan model yang bertujuan untuk mempelajari hubungan antara dua variabel, yakni variabel bebas dan variabel terikat (Sudjana, 2005).

Analisis Regresi Berganda

Analisis regresi linier berganda adalah hubungan secara linear antara dua atau lebih variabel bebas $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ dengan variabel terikat (Y). Analisis ini untuk mengetahui arah hubungan antara variabel bebas dengan variabel terikat apakah masing-masing variabel bebas berhubungan positif atau negatif dan untuk memprediksi nilai dari variabel terikat apabila nilai variabel bebas mengalami kenaikan atau penurunan.

Untuk mendapatkan koefisien regresi berganda maka digunakan suatu metode yang dinamakan metode kuadrat terkecil atau biasa dikenal dengan *Ordinary Least Square* (OLS).Estimasi parameter menggunakan OLS haruslah menghasilkan parameter yang bersifat *Best Linear Unbiased Estimator* (BLUE) sehingga menyebabkan garis regresi sedekat mungkin pada data aktualnya. Model regresi umum yang mengandung *k* variabel bebas dapat ditulis sebagai berikut (Sembiring, 1995) :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_k X_k + \varepsilon \qquad (1)$$

Bila pengamatan Y, $X_1, X_2, \ldots, X_k$ dinyatakan masing-masing dengan Y_i, $X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{ik}$ dan galatnya ε_i, maka :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \cdots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i \qquad (2)$$

Dalam lambang matriks, persamaan (2) menjadi

$$:\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 & X_1 & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_2 & X_2 & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Misalkan :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 & X_1 & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_2 & X_2 & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_n \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}, \text{ dan } \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Persamaan (1) dan (2) dapat disederhanakan menjadi :

$$\mathbf{y} = \mathbf{X} \quad + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (3)$$

Jadi persamaan (3) merupakan bentuk umum persamaan regresi dalam lambang matriks.

Resampling

Resampling merupakan kegiatan pengambilan sampel dari sampel yang telah ada.Jadi misalkan diperoleh sampel berukuran n, maka dari n sampel tersebut diambil lagi secara acak baik dengan pengembalian maupun tanpa pengembalian yang dijadikan sebagai sampel baru.*Resampling* ini dapat digunakan lagi sebagai alternatif jika sampel yang kita peroleh dari penelitian sebelumnya terbatas (Crowley, 1992).

Green (1991) membuat dua aturan praktis untuk ukuran sampel minimum yang dapat diterima, yang pertama berdasarkan cara pengujian keseluruhan model regresi dan yang kedua berdasarkan pada cara pengujian variabel bebas dalam model. Jika ingin menguji model secara keseluruhan, maka Green menyarankan ukuran sampel minimal 50 + 8k, dimana k adalah jumah prediktor. Jadi dengan lima prediktor, diperlukan sampel sebanyak 50 + 40 = 90. Jika ingin menguji variabel bebas maka Green menyarankan sampel minimal adalah 104 + k, jadi dengan mengambil contoh yang sama maka diperlukan sampel minimal sebanyak 104 + 5 = 109. Tentunya kebanyakan kasus menginginkan pengujian pada variabel bebasnya juga, sehingga dalam hal ini Green merekomendasikan pilihan kedua (Green, 1991).

Metode *Bootstrap*

Prinsip metode *Bootstrap* ialah untuk memperkirakan parameter masing-masing sampel *Bootstrap* B buah yang merupakan sampel acak berukuran n diambil dengan pengembalian dari populasi n pengamatan. Pengamatan ke-*i* (*i*=1, 2, 3, …,n) dari sampel awal mungkin akan muncul beberapa kali sampel *Bootstrap* replikasi ke-*r* (*r* = 1, 2, 3,…B). Sedangkan pengamatan lain mungkin tidak akan muncul sama sekali. Untuk mengestimasi parameter regresi dengan metode *Bootstrap* dapat dilakukan dengan mengambil sampel *Bootstrap* berukuran n dari data sebenarnya (Y_I , X_{ij}). i =1, 2, …, n dan j =1,2,…k-1. Sampel *Bootstrap* yang diambil dari data sebenarnya dituliskan dalam notasi matriks sebagai berikut:

$$\mathbf{y}^{*\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} y_1^{*r} \\ y_2^{*r} \\ \vdots \\ y_n^{*r} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{X}^{*\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^{*r} & x_1^{*r} & \cdots & x_1^{*r} \\ 1 & x_2^{*r} & x_2^{*r} & \cdots & x_2^{*r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n^{*r} & x_n^{*r} & \cdots & x_n^{*r} \end{bmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon}^{*\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^{*r} \\ \varepsilon_2^{*r} \\ \vdots \\ \varepsilon_n^{*r} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

dengan$\mathbf{y}^{*\mathbf{r}}$ adalah matriks dari variabel terikat pada sampel *Bootstrap* replikasi ke-*r* yang berukuran $n\times 1$; $\mathbf{X}^{*\mathbf{r}}$ adalah matriks variabel bebas pada sampel *Bootstrap* ke-*r* yang berukuran $n\times (j+1)$; $\boldsymbol{\varepsilon}^{*\mathbf{r}}$ adalah matriks dari variabel galat acak pada sampel *Bootstrap* ke-*r* yang berukuran $n\times 1$.

Penduga parameter *Bootstrap* replikasi ke-*r* ($\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{r}}$) dapat dicari menggunakan metode kuadrat terkecil. Prinsip dari metode ini adalah meminimumkan jumlah kuadrat galat sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}^{*\mathbf{r}\prime}\boldsymbol{\varepsilon}^{*\mathbf{r}} &= \left(\mathbf{y}^{*\mathbf{r}} - \mathbf{y}^{*\mathbf{r}}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{r}}\right)'\left(\mathbf{y}^{*\mathbf{r}} - \mathbf{y}^{*\mathbf{r}}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{r}}\right) \\
&= \left(\mathbf{y}^{*\mathbf{r}\prime} - \left(\mathbf{X}^{*\mathbf{r}}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{r}}\right)'\right)\left(\mathbf{y}^{*\mathbf{r}} - \mathbf{X}^{*\mathbf{r}}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{r}}\right) \\
&= \left(\mathbf{y}^{*\mathbf{r}\prime} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{r}\prime}\mathbf{X}^{*\mathbf{r}\prime}\right)\left(\mathbf{y}^{*\mathbf{r}} - \mathbf{y}^{*\mathbf{r}}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{r}}\right) \\
\boldsymbol{\varepsilon}^{*\mathbf{r}\prime}\boldsymbol{\varepsilon}^{*\mathbf{r}} &= \mathbf{y}^{*\mathbf{r}\prime}\mathbf{y}^{*\mathbf{r}} - \mathbf{y}^{*\mathbf{r}\prime}\mathbf{X}^{*\mathbf{r}}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{r}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{r}\prime}\mathbf{X}^{*\mathbf{r}\prime}\mathbf{y}^{*\mathbf{r}} + \\
&\quad \hat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{r}\prime}\mathbf{X}^{*\mathbf{r}\prime}\mathbf{X}^{*\mathbf{r}}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{r}} \qquad (5)
\end{aligned}$$

Taksiran nilai parameter diperoleh dengan meminimumkan jumlah kuadrat galat sebagai berikut:

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\varepsilon}^{*\mathbf{r}'}\boldsymbol{\varepsilon}^{*\mathbf{r}})}{\partial\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{**\mathbf{i}}} = 0$$

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\varepsilon}^{*\mathbf{r}'}\boldsymbol{\varepsilon}^{*\mathbf{r}})}{\partial\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{r}}} = \frac{\partial(\mathbf{y}^{*\mathbf{r}'}\mathbf{y}^{*\mathbf{r}})}{\partial\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{r}}} - 2\frac{\partial\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{r}'}\mathbf{X}^{*\mathbf{r}'}\mathbf{y}^{*\mathbf{r}}\right)}{\partial\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{r}}} + \frac{\partial\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{r}'}\mathbf{X}^{*\mathbf{r}'}\mathbf{X}^{*\mathbf{r}}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{r}}\right)}{\partial\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{r}}} = 0$$

$$-2\mathbf{X}^{*\mathbf{r}'}\mathbf{y}^{*\mathbf{r}} + 2\mathbf{X}^{*\mathbf{r}'}\mathbf{X}^{*\mathbf{r}}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{r}} = \mathbf{0}$$

$$2\mathbf{X}^{*\mathbf{r}'}\mathbf{X}^{*\mathbf{r}}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{r}} = 2\mathbf{X}^{*\mathbf{r}'}\mathbf{y}^{*\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{X}^{*\mathbf{r}'}\mathbf{X}^{*\mathbf{r}}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{r}} = \mathbf{X}^{*\mathbf{r}'}\mathbf{y}^{*\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{I}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{r}} = (\mathbf{X}^{*\mathbf{r}'}\mathbf{X}^{*\mathbf{r}})^{-\mathbf{1}}\mathbf{X}^{*\mathbf{r}'}\mathbf{y}^{*\mathbf{r}}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{r}} = (\mathbf{X}^{*\mathbf{r}'}\mathbf{X}^{*\mathbf{r}})^{-\mathbf{1}}\mathbf{X}^{*\mathbf{r}'}\mathbf{y}^{*\mathbf{r}} \quad (6)$$

Langkah pengambilan sampel secara random dan mengestimasi parameternya dengan persamaan (6) diulangi terus langkahnya untuk r = 1, 2, 3,…B dimana B merupakan banyaknya replikasi *Bootstrap*. Sehingga diperoleh parameter *Bootstrap* $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{1}}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{2}}, \dots, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{B}}$. Penduga parameter *Bootstrap* ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*}$) diperoleh dengan mencari nilai rata-rata nilai penduga parameter $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{r}}$ untuk r = 1,2,3, .., B sebagai berikut:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*} = \sum_{\mathbf{r}-\mathbf{1}}^{\mathbf{B}} \frac{\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{r}}}{\mathbf{B}} \quad (7)$$

Model regresi berganda pada metode *Bootstrap* dapat dinyatakan dalam notasi matriks sebagai berikut:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*} + \boldsymbol{e} \quad (8)$$

dengan $\hat{\mathbf{y}}$ adalah matriks dari variabelterikat regresi berganda pada metode *Bootstrap*; **X** adalah matriks dari variabel bebas; $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*}$ adalah penduga dari metode *Bootstrap*.

Setelah mendapatkan parameter *Bootstrap* selanjutnya akan dihitung tingkat akurasi parameter yang diperoleh dengan menggunakan bias dan standar deviasi dari *Bootstrap*, yaitu:

$\text{Bias}^{*} = \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}$

dengan B^{*} adalah bias dari *Bootstrap*, $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ adalah penduga sebenarnya. Sedangkan varians dari *Bootstrap* dapat dihitung dengan:

$$v\left(\hat{\beta}^{*}\right) = \sum_{\mathbf{r}-\mathbf{1}}^{\mathbf{B}}[(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{r}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*})(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{r}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*})']/(B-1), r = 1,2,\dots,B \quad (9)$$

di mana $v\left(\hat{\beta}^{*}\right)$ adalah varians dari *Bootstrap*. Sehingga untuk standar deviasi *Bootstrap* sebagai berikut:

$$\text{SD}^{*} = \left(v\left(\hat{\beta}^{*}\right)\right)^{\mathbf{1/2}} \quad (10)$$

di mana SD^{*} adalah standar deviasi *Bootstrap*.

Interval Konfidensi *Bootstrap*

Sejauh ini *Bootstrap* diketahui untuk menghitung *standard error*. *Standard error* biasa digunakan untuk menetapkan interval konfidensi. Estimasi interval konfidensi *Bootstrap* untuk parameter regresi diberikan dalam interval pendekatan normal. Interval konfidensi *Bootstrap* dengan pendekatan normal sebenarnya analog dengan interval konfidensi standar. Pemanfaatan metode *Bootstrap* dalam mengkonstruksi interval ini adalah untuk menentukan *standard error* dari estimator. Berdasarkan sampel *Bootstrap* dengan replikasi B kali diperoleh $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{1}}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{2}}, \dots, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{r}}$. Variansi estimator *Bootstrap* $\beta_{\mathbf{k}}^{*}$ diberikan oleh persamaan (9).

Metode *Bootstrap* yang diberikan pada regresi ini adalah *resampling residual*.Misalkan dimiliki sampel berpasangan antara variabel bebas dan terikat yang dituliskan dalam bentuk matriks **Y** dan **X** dengan ukuran sampel n. Selanjutnya sampel ini disebut sebagai sampel asli. Menurut (Sahinler dan Topuz, 2007), prosedur *Bootstrap resampling residual* untuk estimasi parameter regresi dapat dituliskan sebagai berikut:

1. Menentukan fit model berdasarkan sampel asli dengan menggunakan metode kuadrat terkecil
2. Menghitung residual $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}}$, diperoleh $\boldsymbol{e} = e_1, e_2, \dots, e_n$
3. Mengambil sampel *Bootstrap* berukuran n dari $e_1, e_2, \dots, e_n$ secara random dengan pengembalian, diperoleh sampel *Bootstrap* pertama yang dilambangkan dengan $\boldsymbol{e}^{*\mathbf{1}} = e_1^{*\mathbf{1}}, e_2^{*\mathbf{1}}, \dots, e_n^{*\mathbf{1}}$
4. Menghitung nilai *Bootstrap* untuk **Y** dengan menambahkan $\boldsymbol{e}^{*\mathbf{1}}$ pada model, sehingga diperoleh $\mathbf{y}^{*\mathbf{1}} = \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{e}^{*\mathbf{1}}$
5. Menghitung koefisien regresi untuk sampel *Boostrap* yang pertama $\boldsymbol{y}^{*\mathbf{1}}$ dengan $\boldsymbol{X}$, diperoleh $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{1}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-\mathbf{1}}\mathbf{X}'\mathbf{y}^{*\mathbf{1}}$
6. Mengulangi proses di atas sebanyak B kali, diperoleh $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{1}}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{2}}, \dots, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{B}}$
7. Pendekatan estimasi *Bootstrap* untuk parameter regresi adalah mean dari $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{1}}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{2}}, \dots, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{B}}$ yaitu
$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*} = \sum_{\mathbf{r}-\mathbf{1}}^{\mathbf{B}} \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\mathbf{r}}/\text{B}$$

Standard errorBootstrap $s_e(\hat{\beta}_k^{*})$ diperoleh dari akar variansi. Interval konfidensi *Bootstrap* pendekatan normal $(1-\alpha) \times 100\%$ untuk β_k diberikan oleh

$$\hat{\beta}_k - z_{\frac{\alpha}{2}}s_e\left(\hat{\beta}_k^{*}\right) < \beta_k^{*} < \hat{\beta}_k + z_{\frac{\alpha}{2}}s_e\left(\hat{\beta}_k^{*}\right) \quad (11)$$

dimana $\hat{\beta}_k$ adalah estimasi parameter sesungguhnya dari sampel, $z_{\frac{\alpha}{2}}$ adalah nilai yang didapat dari tabel normal standar, $s_e\left(\hat{\beta}_k^{*}\right)$ merupakan *standard error Bootstrap* dan $\hat{\beta}_k^{*}$ adalah estimasi parameter *bootstrap*.

Metode *Jackknife*

Jackknife adalah metode *resampling* yang diperkenalkan oleh Quenouille (1949) untuk estimasi bias dan Tukey (1958) meperkenalkan *Jackknife* untuk menduga standar deviasi. Prinsipnya adalah menghilangkan satu buah data dan mengulanginya sebanyak jumlah sampel yang ada. Untuk mengestimasi parameter regresi dengan menggunakan prosedur *Jackknife* menghilangkan satu buah data dapat dilakukan dengan menggunakan prosedur sebagai berikut (Sprent, 1991) :

Mengambil sampel berukuran *n* secara random, dimana

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \text{dan} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 & X_1 & \cdots & X_{1j} \\ 1 & X_2 & X_2 & \cdots & X_{2j} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_n \end{bmatrix}$$

merupakan sampel yang sebenarnya dari data observasi. Selanjutnya pada prosedur *Jackknife* yaitu menghilangkan satu baris dari vektor. Untuk *Jackknife* baris ke-1 yaitu menghilangkan baris pertama dari vektor sehingga:

$$\mathbf{y}^{(-1)} = \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}; \mathbf{X}^{(-1)} = \begin{bmatrix} 1 & X_2 & X_2 & \cdots & X_{2j} \\ 1 & X_3 & X_3 & \cdots & X_{3j} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_n \end{bmatrix}$$

Data yang sudah dihilangkan barisnya dari vektor disebut data *Jackknife*. Secara umum data *Jackknife* dapat dinyatakan dalam notasi matriks sebagai berikut:

$$\mathbf{y}^{(-i)} = \begin{bmatrix} Y_1^{(-i)} \\ Y_2^{(-i)} \\ \vdots \\ Y \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{X}^{(-i)} = \begin{bmatrix} 1 & X_1^{(-i)} & X_1^{(-i)} & \cdots & X_{1j}^{(-i)} \\ 1 & X_2^{(-i)} & X_2^{(-i)} & \cdots & X_{2j}^{(-i)} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n-1}^{(-i)} & X_{n-1}^{(-i)} & \cdots & X_{n-1j}^{(-i)} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(-i)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^{(-i)} \\ \varepsilon_2^{(-i)} \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1}^{(-i)} \end{bmatrix} \quad (12)$$

dimana $\boldsymbol{Y}^{(-i)}$ adalah matriks dari variabel terikat data yang sudah dihilangkan baris ke-*i* yang berukuran $(n-1) \times 1$; $\boldsymbol{X}^{(-i)}$ adalah matriks dari variabel bebas data yang sudah dihilangkan baris ke-*i* yang berukuran $(n-1)\times(j+1)$; $\boldsymbol{\varepsilon}^{(-i)}$ adalah matriks dari variabel galat acak data yang sudah dihilangkan baris k-*i* yang berukuran $(n-1) \times 1$.

Parameter $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-i)}$ umumnya dapat dicari menggunakan metode kuadrat terkecil. Prinsip dari metode ini adalah untuk meminimalkan jumlah kuadrat galat sebagai berikut (Efron dan Tibshirani, 1993):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^{(-i)\prime}\boldsymbol{\varepsilon}^{(-i)} &= \left(\mathbf{y}^{(-i)} - \mathbf{X}^{(-i)}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-i)}\right)'\left(\mathbf{y}^{(-i)} - \mathbf{X}^{(-i)}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-i)}\right) \\ &= \left(\mathbf{y}^{(-i)\prime} - \left(\mathbf{X}^{(-i)}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-i)}\right)'\right)\left(\mathbf{y}^{(-i)} - \mathbf{X}^{(-i)}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-i)}\right) \\ &= \left(\mathbf{y}^{(-i)\prime} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-i)\prime}\mathbf{X}^{(-i)\prime}\right)\left(\mathbf{y}^{(-i)} - \mathbf{X}^{(-i)}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-i)}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^{(-i)\prime}\boldsymbol{\varepsilon}^{(-i)} = {} & \mathbf{y}^{(-i)\prime}\mathbf{y}^{(-i)} - \mathbf{y}^{(-i)\prime}\mathbf{X}^{(-i)}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-i)} - \\ & \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-i)\prime}\mathbf{X}^{(-i)\prime}\mathbf{y}^{(-i)} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-i)\prime}\mathbf{X}^{(-i)\prime}\mathbf{X}^{(-i)}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-i)} \quad (13) \end{aligned}$$

Taksiran nilai parameter diperoleh dengan meminimumkan jumlah kuadrat galat melalui penurunan $\boldsymbol{\varepsilon}^{(-i)\prime}\boldsymbol{\varepsilon}^{(-i)}$ terhadap setiap $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-i)}$ dan menyamakan hasil yang diperoleh dengan nol, yaitu:

$$\frac{\partial\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(-i)\prime}\boldsymbol{\varepsilon}^{(-i)}\right)}{\partial\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-i)}} = 0$$

$$\frac{\partial\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(-i)\prime}\boldsymbol{\varepsilon}^{(-i)}\right)}{\partial\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-i)}} = \frac{\partial\left(\mathbf{y}^{(-i)\prime}\mathbf{y}^{(-i)}\right)}{\partial\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-i)}} - 2\frac{\partial\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-i)\prime}\mathbf{X}^{(-i)\prime}\mathbf{y}^{(-i)}\right)}{\partial\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-i)}} + \frac{\partial\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-i)\prime}\mathbf{X}^{(-i)\prime}\mathbf{X}^{(-i)}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-i)}\right)}{\partial\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-i)}} = 0$$

$$\begin{aligned} -2\mathbf{X}^{(-i)\prime}\mathbf{y}^{(-i)} + \mathbf{2X}^{(-i)\prime}\mathbf{X}^{(-i)}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-i)} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{2X}^{(-i)\prime}\mathbf{X}^{(-i)}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-i)} &= 2\mathbf{X}^{(-i)\prime}\mathbf{y}^{(-i)} \\ \mathbf{X}^{(-i)\prime}\mathbf{X}^{(-i)}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-i)} &= \mathbf{X}^{(-i)\prime}\mathbf{y}^{(-i)} \\ \mathbf{I}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-i)} &= \left(\mathbf{X}^{(-i)\prime}\mathbf{X}^{(-i)}\right)^{-\mathbf{1}}\mathbf{X}^{(-i)\prime}\mathbf{y}^{(-i)} \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-i)} &= \left(\mathbf{X}^{(-i)\prime}\mathbf{X}^{(-i)}\right)^{-\mathbf{1}}\mathbf{X}^{(-i)\prime}\mathbf{y}^{(-i)} \quad (14) \end{aligned}$$

Selanjutnya diulangi langkah pengambilan sampel yang sebenarnya seperti pada persamaan (12).Baris kedua kemudian dihilangkan dan diestimasi parameternya dengan persamaan (14).Secara analog diterapkan pada baris ketiga sampai baris ke-*n*. Sehingga diperoleh parameter *Jackknife* $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-1)}, \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-2)}, \ldots, \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-n)}$. Untuk mencari parameter *Jackknife* $(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(\cdot)})$ di regresi yaitudengan cara mencari rata-rata dari setiap parameter $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-1)}, \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-2)}, \ldots, \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-n)}$ sebagai berikut:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(\cdot)} = \sum_{\mathbf{i}=\mathbf{1}}^{\mathbf{n}} \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-i)} / n$$

dengan $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(\cdot)}$ penduga dari metode *Jackknife*, $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(-i)}$ adalah penduga ke-*i* dari *Jackknife* dan *n* adalah banyaknya data *Jackknife*.

Model persamaan regresi berganda *Jackknife* dapat dinyatakan dalam notasi matriks sebagai berikut (Sahinler dan Topuz, 2007):

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(\cdot)} \quad (15)$$

dengan $\hat{\mathbf{y}}$ adalah matriks dari variabel terikat regresi berganda pada metode *Jackknife*, $\mathbf{X}$ adalah matriks dari variabel bebas, $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(\cdot)}$ adalah penduga dari metode *Jackknife*, $\boldsymbol{\varepsilon}$ galat acak.

Selanjutnya dihitung tingkat akurasi estimasi parameter yang diperoleh dengan menggunakan bias dan standar deviasi. Karena *Jackknife* menghapus data satu maka bias dari *Jackknife* adalah (Efron, 1993) :

$$\begin{aligned} (n-1)\mathrm{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= (n-1)\mathrm{E}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-\mathbf{1}}\mathbf{X}'\hat{\mathbf{y}}] \\ &= (n-1)[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-\mathbf{1}}\mathbf{X}'\mathbf{E}(\hat{\mathbf{y}})] \\ &= (n-1)\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-\mathbf{1}}\mathbf{X}'\mathbf{E}(\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(\cdot)} + \boldsymbol{\varepsilon})\right] \\ &= (n-1)\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-\mathbf{1}}\mathbf{X}'\mathbf{E}\left(\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(\cdot)}\right) + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon})\right] \\ &= (n-1)\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-\mathbf{1}}\mathbf{X}'\mathbf{E}\left(\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(\cdot)}\right) + (n-1)(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-\mathbf{1}}\mathbf{X}'\mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon})\right] \\ &= (n-1)\mathbf{I}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(\cdot)} + 0 \\ (n-1)\mathrm{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= (n-1)\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(\cdot)} \\ \mathrm{Bias}^{(\cdot)} &= (n-1)\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(\cdot)} - \hat{\boldsymbol{\beta}} \quad (16) \end{aligned}$$

Dalam hal ini $B^{\square\square}$ adalah bias dari *Jackknife*, $\hat{\beta}$ adalah penduga sebenarnya, n adalah banyaknya data *Jackknife*. Adapun varians dari *Jackknife* dapat dihitung sebagai berikut:

$$v\left(\hat{\beta}^{\square\square}\right) = (n-1).\,\sigma^2_{\hat{\beta}^{\square\square}}$$

$$v\left(\hat{\beta}^{\square\square}\right) = \frac{(n-1)}{n}\sum_{i-1}^{n}\left[(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\square\square\mathbf{i}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^{\square\square})((\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\square\square\mathbf{i}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^{\square\square})'\right] \quad (17)$$

dengan $v\left(\hat{\beta}^{\square\square}\right)$ adalah varians dari *Jackknife*. Sehingga standar deviasi *Jackknife* adalah

$$S^{\square\square} = \left(v\left(\hat{\beta}^{\square\square}\right)\right)^{1/2}$$

$$S^{\square\square} = \left(\frac{(n-1)}{n}\sum_{i-1}^{n}\left[(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\square\square\mathbf{i}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^{\square\square})((\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\square\square\mathbf{i}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^{\square\square})'\right]\right)^{1/2} \quad (18)$$

dengan $S^{\square\square}$ adalah standar deviasi *Jackknife*.

Interval Konfidensi *Jackknife*

Menghitung nilai interval konfidensi pada *Jackknife*sama halnya dengan metode *Bootstrap*. *Standard error* biasa digunakan untuk menetapkan interval konfidensi. Estimasi interval konfidensi *Jackknife* untuk parameter regresi diberikan dalam interval pendekatan normal.Interval konfidensi *Jackknife* dengan pendekatan normal sebenarnya analog dengan interval konfidensi standar.Pemanfaatan metode *Jackknife* dalam mengkonstruksi interval ini adalah untuk menentukan *standard error* dari estimator. Berdasarkan sampel *Jackknife* dengan replikasi n kali diperoleh $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\square\square\mathbf{1}}, \hat{\boldsymbol{\beta}}^{\square\square\mathbf{2}}, \dots, \hat{\boldsymbol{\beta}}^{\square\square\mathbf{n}}$. Variansi estimator *Jackknife* $\beta_k^{\square}$ diberikan oleh persamaan (17).

Standard errorJackknife$s_e(\hat{\beta}^{\square\square})$ diperoleh dari akar variansi. Interval konfidensi *Jackknife* pendekatan normal $(1-\alpha)\times 100\%$ untuk β_k diberikan oleh

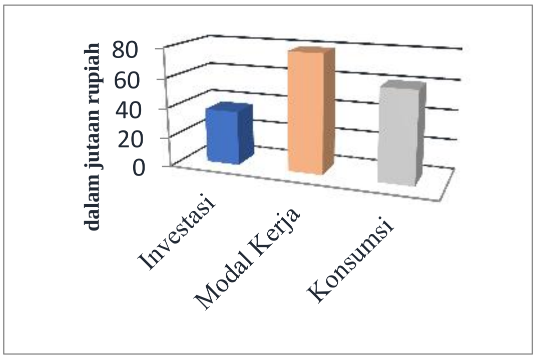
$$\hat{\beta}_k - z_{\frac{\alpha}{2}}s_e(\hat{\beta}^{\square\square}) < \hat{\beta}_k^{\square\square} < \hat{\beta}_k + z_{\frac{\alpha}{2}}s_e(\hat{\beta}^{\square\square}) \quad (19)$$

dimana$\hat{\beta}_k$ adalah estimasi parameter sesungguhnya dari sampel, $z_{\frac{\alpha}{2}}$ adalah nilai yang didapat dari tabel normal standar, $s_e(\hat{\beta}^{\square\square})$ merupakan *standard error Jackknife* dan $\hat{\beta}_k^{\square\square}$ adalah estimasi parameter *jackknife*(Efron dan Tibshirani, 1993).

Hasil dan Pembahasan

Analisis Data Deskriptif

Analisis ini bertujuan untuk menggambarkan jenis kredit mana yang memiliki jumlah pemasukan paling besar. Gambar 1 menunujukkan jumlah pendapatan yang diterima untuk setiap jenis kredit di Bank Indonesia. Pada Gambar 1 dapat dilihat bahwa jenis kredit yang memiliki jumlah terbanyak dari tahun 2009-2015 untuk 4 jenis bank adalah kredit modal kerja sebanyak 79,127 triliun rupiah, disusul oleh kredit konsumsi sebanyak 60,796 triliun rupiah dan yang terakhir adalah kredit investasi sebanyak 36,735 triliun rupiah.



Gambar 1. Diagram Jumlah Kredit

Bootstrap Resampling

Dalam melakukan *Bootstrap resampling* ada beberapa tahapan yang harus dilakukan. Berikut adalah langkah-langkah yang dilakukan dalam menganalisis menggunakan *Bootstrap resampling*:

1. Mencari nilai estimasi parameter data awal berdasarkan persamaan (1)
2. Melakukan *resampling* dengan *Bootstrap* sebanyak 200 kali. Dalam hal ini yang diresampling adalah residualnya. Rumus untuk mencari residual adalah $e = y - \hat{y}$.
3. Langkah di atas diulang sebanyak 28 kali sesuai banyak data. Setelah itu dilakukan resampling *bootstrap* sebanyak 200 kali setiap pengamatan secara acak. Nilai residual yang terambil akan dimasukkan ke dalam model *Bootstrap* berdasarkan persamaan (8).
4. Langkah ketiga di atas diulang sebanyak 200 kali dengan nilai residual yang digunakan adalah acak menghasilkan matriks berukuran 200 × 28. Kemudian nilai $\hat{y}^{\square}$ digunakan untuk mencari *resampling bootstrap*.
5. Mencari nilai estimasi bootstrap berdasarkan persamaan (6)
6. Mencari nilai *standard error* berdasarkan persamaan (10)
7. Mencari perkiraan interval konfidensi parameter regresi menggunakan persamaan (11)

Tabel 1. Interval Konfidensi *Bootstrap*

Parameter	Est. *Bootstrap*	*Standard Error*	Interval Konfidensi	
			Batas Bawah	Batas Atas
β_0	292.035	262.829	-221.354	808.937
β_1	1,15	0,46	0,25	2,06
β_2	0,87	0,24	0,40	1,33
β_3	1,37	0,20	0,97	1,77

Dari Tabel 1 diperoleh model estimasi regresi untuk *bootstrap* adalah sebagai berikut

$$\hat{y}^{\square} = \hat{\beta}_0^{\square} + \hat{\beta}_1^{\square}X_1 + \hat{\beta}_2^{\square}X_2 + \hat{\beta}_3^{\square}X_3$$
$$= 292.035 + 1{,}15X_1 + 0{,}87X_2 + 1{,}37X_3$$

Di mana X_1 adalah kredit investasi, X_2 kredit modal kerja dan X_3 kredit konsumsi. Dari model diketahui bahwa apabila kredit investasi naik satu miliar rupiah maka posisi simpanan masyarakat akan naik sebesar 1,15 miliar rupiah dengan asumsi variabel lain dianggap tetap, apabila kredit modal kerja naik satu miliar rupiah maka posisi simpanan masyarakat akan naik sebesar 0,87 miliar rupiah dengan asumsi variabel lain dianggap tetap dan apabila kredit konsumsi naik satu miliar rupiah maka posisi simpanan masyarakat akan naik sebesar 1,37 miliar rupiah dengan asumsi variabel lain dianggap tetap.

Jackknife Resampling

Prinsip dari *resampling Jackknife* adalah menghilangkan satu buah data dan mengulanginya sebanyak jumlah sampel yang ada.Untuk mengestimasi parameter regresi dengan menggunakan prosedur *Jackknife* menghilangkan satu buah data dapat dilakukan dengan menggunakan prosedur sebagai berikut.

1. Menghilangkan satu baris dari vektor. Untuk *Jackknife* baris ke-1 yaitu menghilangkan baris pertama dari vektor (*resampling* pertama).
2. Menentukan nilai estimasi parameter $\hat{\beta}^{-1}$ menggunakan persamaan (14)
3. Selanjutnya diulangi langkah pengambilan sampel untuk sampel kedua hingga sampel ke-n dengan menghilangkan data ke-n.
4. Langkah selanjutnya adalah mencari nilai variansi dari *Jackknife* yang nantinya akan digunakan dalam mencari standard error dari *Jackknife* berdasarkan persamaan (17)
5. Langkah terakhir adalah menentukan interval konfidensi masing-masing parameter β_k berdasarkan persamaan (19)

Tabel 2. Interval Konfidensi *Jackknife*

Parameter	Est. *Jackknife*	*Standard Error*	Interval Konfidensi	
			Batas Bawah	Batas Atas
β_0	294.801	230.307	-157.611	745.194
β_1	1,16	0,43	0,30	2,00
β_2	0,87	0,21	0,45	1,28
β_3	1,37	0,17	1,04	1,70

Dari Tabel 2 diperoleh model estimasi regresi untuk *jackknife* adalah sebagai berikut

$$\hat{y}^{J} = \hat{\beta}_0^{J} + \hat{\beta}_1^{J}X_1 + \hat{\beta}_2^{J}X_2 + \hat{\beta}_3^{J}X_3$$
$$= 294.801 + 1,16X_1 + 0,87X_2 + 1,37X_3$$

Di mana X_1 adalah kredit investasi, X_2 kredit modal kerja dan X_3 kredit konsumsi. Dari model diketahui bahwa apabila kredit investasi naik satu miliar rupiah maka posisi simpanan masyarakat akan naik sebesar 1,16 miliar rupiah dengan asumsi variabel lain dianggap tetap, apabila kredit modal kerja naik satu miliar rupiah maka posisi simpanan masyarakat akan naik sebesar 0,87 miliar rupiah dengan asumsi variabel lain dianggap tetap dan apabila kredit konsumsi naik satu miliar rupiah maka posisi simpanan masyarakat akan naik sebesar 1,37 miliar rupiah dengan asumsi variabel lain dianggap tetap.

Perbandingan Interval Konfidensi *Bootstrap* dan *Jackknife*

Berikut adalah tabel perbandingan antara nilai interval konfidensi *Bootstrap* dan *Jackknife*

Tabel 3. Perbandingan Interval Konfidensi

Parameter	Interval Konfidensi *Bootstrap*		Interval Konfidensi *Jackknife*	
	Batas Bawah	Batas Atas	Batas Bawah	Batas Atas
β_0	-221.354	808.937	-157.611	745.194
β_1	0,25	2,06	0,30	2,00
β_2	0,40	1,33	0,45	1,28
β_3	0,97	1,77	1,04	1,70

Dari Tabel 3, dapat dilihat bahwa metode *Jackknife* lebih efektif untuk digunakan dibandingkan metode *Bootstrap*. Hal ini dikarenakan nilai *standard error Jackknife* lebih kecil dibandingkan dengan *Bootstrap* yang dapat dilihat pada Tabel 1 dan Tabel 2, sehingga menyebabkan interval konfidensi *Jackknife* memiliki rentang atau selisih interval yang sempit dibandingkan dengan interval konfidensi yang dimiliki *Bootstrap*.

Kesimpulan

Kesimpulan dari hasil perbandingan metode *bootstrap* dan*jackknife resampling* pada data posisi simpanan masyarakat adalah sebagai berikut.

Metode yang paling tepat untuk menentukan nilai estimasi parameter dan memperkirakan nilai interval konfidensi parameter regresi adalah metode *Jackknife* karena memiliki *standard error* yang lebih kecil dibanding *Bootstrap* sehingga interval konfidensi yang dihasilkan memiliki rentang yang sempit.

Daftar Pustaka

Crowley, PH. 1992. *Resampling Methods for Computation-Intensive Data Analysis in Ecology and Evolution*. Ann Rev Ecol Syst.

Efron, B. and Robert J. Tibshirani. 1993. *An Introduction to the Bootstrap*. New York and London: Chapman and Hall.

Green, S.B. 1991. *How Many Subjects Does It Take To Do a Regression Analysis? Multivariate Behavioral Research*. New York: McGraw-Hill.

Kutner, M.H., C.J. Nachtseim., dan J. Neter. 2004. *Applied Linear Regression Models 4th Edition.* New York: Mc-Graw Hill.

Estimation of Regression Parameters. *Journal of Applied Quantitative Methods.* Vol 2 : 188-199.

Sembiring, R. K. 1995. *Analisis Regresi*. Bandung: ITB

Sahinler, S. dan Topuz, D. 2007. Bootstrap and Jackknife Resampling Algorithm For

Sprent, P. 1989. *Applied Nonparametric Statistical Methods*. New York: Chapman & Hall.

Sudjana. 2005. *Metode Statistika*. Bandung: Tarsito.