Model-Model Regresi Weibull Univariat pada Indikator Pencemaran Air *Dissolved Oxygen* di Daerah Aliran Sungai Lingkungan Hutan Hujan Tropis Kalimantan Timur

Univariate Weibull Regression Models on Water Pollution Indicator of Dissolved Oxygen In Watersheds of East Borneo Tropical Rainforest Environment

Puspa Chairina[1], Suyitno[1], dan Meiliyani Siringoringo[2]
[1]Laboratorium Statistika Terapan FMIPA Universitas Mulawarman
[2]Laboratorium Statistika Komputasi FMIPA Universitas Mulawarman
E-mail: puspachairina1@gmail.com

Abstract

A Univariate Weibull Regression is a model of regression developed from univariate Weibull distribution with the parameter scale is stated in parameter regression. There are some of univariate Weibull regression model, namely Weibull survival regression, Weibull hazard regression and mean model. Univariate Weibull regression model in this research is applied to the water pollution indicator dissolved oxygen (DO data at Mahakam river in East Kalimantan. The purpose of this study is to find out the model of univariate Weibull regression based on the parameter estimation by using maximum likelihood estimation method (MLE) and to find out the factors which affect to univariate Weibull regression in Mahakam river. The result shows that the closed form of the maximum likelihood estimator can not be found analytically, and it can be approximed by using the Newton-Raphson iterative method. Based on the result of partial hypothesis test for all the parameter regression, it was found that detergent concentration and nitrate concentration had significant influence to the DO in the water of Mahakam river.

Keywords*: DO, MLE, Univariate Weibull Regression*

Pendahuluan

Distribusi Weibull merupakan salah satu distribusi kontinu dalam teori probabilitas dan statistika. Distribusi Weibull univariat memuat tiga parameter yaitu parameter lokasi, parameter bentuk, dan parameter skala. Salah satu bentuk khusus dari distribusi Weibull univariat adalah distribusi Weibull versi skala-bentuk (*scale-shape version*), yakni distribusi Weibull univariat yang memuat dua parameter skala dan bentuk. Aplikasi dari distribusi Weibull dan kerabatnya sangat luas dan mencakup hampir semua disiplin ilmu (Rinne, 2009).

Penelitian sebelumnya tentang distribusi Weibull dilakukan oleh A. Musdalifa, Raupong, dan Anna Islamiyati (2013) yaitu, Estimasi Parameter Distribusi Weibull dengan Transformasi Model Regresi Menggunakan Metode Kuadrat Terkecil Linier dengan studi kasus data kecepatan angin terbesar per bulan di Makassar pada tahun 2008 sampai tahun 2012.

Regresi Weibull merupakan pengembangan dari distribusi Weibull. Distribusi Weibull dapat memuat variabel kovariat (Rinne, 2009). Regresi Weibull univariat adalah distribusi Weibull univariat yang parameter skala dinyatakan dalam model regresi. Model-model regresi Weibull univariat antara lain model regresi *survival* Weibull, model *mean* variabel respon dan model regresi hazard Weibull (Lawless, 2003).

Pembahasan distribusi Weibull mudah didapat di berbagai literatur, tetapi hanya sedikit literatur yang membahas regresi Weibull. Penelitian yang membahas regresi Weibull antara lain adalah Hanagal, (2004 dan 2005) membahas regresi Weibull bivariat pada data sampel waktu tersensor (*consored survival time*). Model regresi Weibull univariat pada penelitian ini akan diaplikasikan pada data indikator pencemaran air daerah aliran sungai di lingkungan hutan hujan tropis kalimantan timur.

Daerah aliran sungai Mahakam membentang dari hulu hingga ke hilir sepanjang di lingkungan hutan hujan tropis. Sungai mahakam memiliki berbagai fungsi yaitu, fungsi ekosistem sebagai habitat flora dan fauna perairan, sumber air baku air minum dan air bersih, sarana transportasi serta pengendali banjir. Sepanjang daerah aliran sungai Mahakam terdapat banyak pabrik (industri), penambang batu bara, serta pemukiman penduduk, yang berpotensi menghasilkan limbah domestik maupun non domestik yang mengalir ke sungai Mahakam. Hal ini menyebabkan kualitas air sungai mahakam terancam tercemar. Pencemar kualitas air secara umum dapat dideteksi melalui indikator pencemar antara lain *dissolved oxygen* (DO), *biochemical oxygen demand* (BOD), dan *chemical oxygen demand* (COD). Indikator pencemar kualitas air sungai mahakam yang ditinjau dalam penelitian ini yaitu DO.

DO adalah konsentrasi oksigen yang terlarut dalam air. Konsentrasi DO pada air yang tidak tercemar menurut standar baku ialah minimal ebesar 6 mg/l. Kehadiran zat pencemar pada aliran sungai menyebabkan nilai DO menurun.

Berdasarkan uraian yang telah dipaparkan diatas, penulis tertarik untuk mengkaji model-model regresi weibull univariat pada indikator pencemaran air *dissolved oxygen* daerah aliran sungai di lingkungan hutan hujan tropis Kalimantan Timur.

Distribusi Weibull Univariat

Y merupakan variabel acak kontinu non-negatif berdistribusi Weibull *univariat* tiga parameter yang mempunyai Fungsi Kepadatan Peluang (FKP) yaitu

$$f(y)=\frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{y-\delta}{\lambda}\right)^{\gamma-1}\exp\left[-\left(\frac{y-\delta}{\lambda}\right)^{\gamma}\right], \quad (1)$$

dengan $y>\delta$, $0<\lambda<\infty$, $0<\gamma<\infty$, $0<\delta<\infty$, dimana γ , λ dan δ masing-masing adalah parameter bentuk (*shape*), parameter skala (*scale*), dan parameter lokasi (*location*), kemudian dinotasikan dengan $Y\sim W(\gamma, \lambda, \delta)$ (Rinne, 2009). Bentuk khusus distribusi Weibull dengan dua parameter adalah distribusi Weibull versi skala-bentuk, dengan FKP yaitu

$$f(y)=\frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma-1}\exp\left[-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma}\right]. \quad (2)$$

Fungsi *survival* distribusi Weibull versi skala-bentuk diberikan oleh

$$S(y)=P(Y>y)=\exp\left[-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma}\right], \quad (3)$$

dan fungsi distribusi kumulatif didefinisikan oleh

$$F(Y)=P(Y\le y)=1-S(y)=1-\exp\left[-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma}\right] \quad (4)$$

FKP yang diberikan oleh persmaan (2) dapat diperoleh dari fungsi *survival* pada persamaan (3) dan fungsi distribusi kumulatif melalui hubungan

$$f(y)=\frac{dF(y)}{dy}=-\frac{dS(y)}{dy}.$$

Berdasarkan persamaan (2) dan (3) diperoleh persamaan fungsi hazard yaitu

$$h(y)=\frac{f(y)}{S(y)}=\frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma-1}=\gamma\lambda^{-\gamma}y^{\gamma-1} \quad (5)$$

Momen ke r distribusi Weibull versi skala-bentuk dengan FKP yang diberikan oleh persamaan (2) dapat dinyatakan dalam bentuk umum

$$E(Y^r)=\lambda\Gamma_r. \quad (6)$$

dengan $\Gamma(.)$ adalah fungsi Gamma dan Γ_r didefinisikan oleh

$$\Gamma_r=\Gamma\left(\frac{r}{\gamma}+1\right).$$

Mean dan variansi dari peubah acak Y dapat diperoleh berdasarkan persamaan (6), yaitu berturut-turut adalah

$$\mu_Y=E(Y)=\lambda\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}+1\right), \quad (7)$$

dan

$$\operatorname{var}(Y)=E\left(Y^2\right)-\left[E\left(Y\right)\right]^2=\lambda^2\left(\Gamma_2-\Gamma_1^2\right) \quad (8)$$

(Rinne, 2009)

Salah satu metode penaksiran parameter distribusi Weibull adalah metode *maximum likelihood estimation* (MLE). Metode MLE merupakan metode penaksiran parameter dengan menentukan maksimum fungsi *likelihood*. Tahap awal metode MLE adalah mendefinisikan fungsi *likelihood*. Misalkan diketahui n sampel acak, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ saling bebas dan berdistribusi identik (*independent identical distributed*) yaitu $Y_i\sim W(\lambda,\gamma), i=1,2,3,\cdots,n.$ Berdasarkan FKP yang diberikan oleh persamaan (2), maka fungsi *likelihood* didefinisikan oleh

$$\ell(\boldsymbol{\theta}_1\mid y)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^{\gamma-1}\exp\left[-\frac{y_i}{\lambda}\right]^{\gamma}\right) \quad (9)$$

Penaksir $\boldsymbol{\theta}_1$ yang memaksimumkan *likelihood* $\ell(\boldsymbol{\theta}_1)$ juga memaksimumkan fungsi *logl-ikelihood*. Fungsi *log-likelihood* $L(\boldsymbol{\theta}_1\mid y)$ adalah

$$L(\boldsymbol{\theta}_1\mid y)=\ln[\ell(\boldsymbol{\theta}_1\mid y)]=\sum_{i=1}^{n}(\ln f(\boldsymbol{\theta}_1\mid y))=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(\gamma)-\ln(\lambda)+(\gamma-1)[\ln y_i-\ln\lambda]-\left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^{\gamma}\right] \quad (10)$$

Pada teori kalkulus diperoleh $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1=\left[\hat{\lambda}\ \hat{\gamma}\right]^T$ yang memaksimumkan fungsi *log-likelihood* $[L(\boldsymbol{\theta}_1\mid y]$ dari turunan pertama yakni fungsi $\ell(\boldsymbol{\theta}_1)$terhadap semua parameter kemudian disamakan dengan nol ($\mathbf{0}$) yaitu

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}_1\mid y)}{\partial\boldsymbol{\theta}_1}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\dfrac{\partial L(\boldsymbol{\theta}_1\mid y)}{\partial\lambda}\\[2mm]\dfrac{\partial L(\boldsymbol{\theta}_1\mid y)}{\partial\gamma}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}. \quad (11)$$

Ruas kiri dari persamaan (11), dinamakan vektor gradien ($\mathbf{g}$) yaitu

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_1) = \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}_1 \mid y)}{\partial \boldsymbol{\theta}_1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L(\boldsymbol{\theta}_1 \mid y)}{\partial \lambda} \\ \dfrac{\partial L(\boldsymbol{\theta}_1 \mid y)}{\partial \gamma} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Komponen-komponen vektor gradien berturut-turut adalah

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}_1 \mid y)}{\partial \lambda} =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{\lambda} - (\gamma - 1)\frac{1}{\lambda} - \left[-\gamma \left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^{\gamma-1} \cdot \left(\frac{y_i}{\lambda^2}\right) \right] \right) \quad (13)$$

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}_1 \mid y)}{\partial \gamma} =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\gamma} + \left[\ln y_i - \ln \lambda\right] - \left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^{\gamma} \left(\ln y_i - \ln \lambda\right) \right) \quad (14)$$

Dari persamaan (13) dan (14) didapat sistem persamaan *likelihood* (11), yaitu

$$\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{\lambda} - (\gamma - 1)\frac{1}{\lambda} - \left[-\gamma \left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^{\gamma-1} \cdot \left(\frac{y_i}{\lambda^2}\right) \right] \right) = 0$$

atau

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\gamma} + \left[\ln y_i - \ln \lambda\right] - \left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^{\gamma} \left(\ln y_i - \ln \lambda\right) \right) = 0 \quad (15)$$

Berdasarkan persamaan (15), untuk mendapatkan penaksiran maksimum *likelihood* (ML) $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1$ tidak dapat dilakukan secara analitis. Metode alternatif untuk menyelesaikan persamaan *likelihood* untuk mendapatkan penaksiran ML ($\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1$) adalah metode iteratif Newton-Raphson. Formulasi iterasi Newton-Raphson adalah :

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(q+1)} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(q)} - \left[\mathbf{H}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(q)}\right)\right]^{-1} \mathbf{g}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(q)}) \quad (16)$$

dengan $\mathbf{g}$ adalah vektor gradien yang diberikan oleh persamaan (12) dan matriks *Hessian* $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_1)$ yaitu matriks turunan parsial orde kedua dari fungsi *log-likelihood* terhadap semua parameter, bentuk umum matriks *Hessian* adalah

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_1) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}_1 \mid y)}{\partial \lambda^2} & \dfrac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}_1 \mid y)}{\partial \lambda \partial \gamma} \\ \dfrac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}_1 \mid y)}{\partial \gamma \partial \lambda} & \dfrac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}_1 \mid y)}{\partial \gamma^2} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Elemen-elemen matriks Hessian $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_1)$ adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}_1 \mid y)}{\partial \lambda^2} = \sum_{i=1}^{n}\left[-\left(\frac{\gamma^2+\gamma}{\lambda^2}\right)\left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^{\gamma} + \frac{\gamma}{\lambda^2} \right] \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}_1 \mid y)}{\partial \gamma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{1}{\gamma^2} - \left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^{\gamma} \ln\left[\frac{y_i}{\lambda}\right]^2 \right] \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}_1 \mid y)}{\partial \gamma \partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{1}{\lambda} + \left(\frac{\gamma}{\lambda}\ln\left(\frac{y_i}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda}\right)\left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^{\gamma} \right] \quad (20)$$

(Suyitno, 2017)

Pengujian Distribusi

Uji distribusi data dapat dilakukan dengan uji Kolmogorov-Smirnov sebagai berikut. Misalkan ingin diuji apakah data sampel dengan fungsi distribusi $F^*(y)$ yang tidak diketahui berasal dari suatu populasi yang berdistribusi $F(y)$ yang diketahui. Hipotesis uji adalah

$H_0 : F(y) = F^*(y)$
(Data sampel diambil dari suatu populasi dengan fungsi distribusi $F^*(y)$)
$H_1 : F(y) \neq F^*(y)$
(Data sampel diambil dari suatu populasi dengan fungsi distribusi bukan $F^*(y)$)

Statistik uji yang digunakan adalah

$$D = \max \mid F^*(y) - G(y) \mid \quad (21)$$

dengan:
$F^*(y)$: Fungsi distribusi teoritis yang diberikan oleh persamaan (4)
$G(y)$: Fungsi distribusi empiris, dengan menggunakan rumus

$$G(y) = \frac{i}{n},$$

dimana:
Daerah kritis adalah menolak H_0 jika nilai $D > D_{n,\alpha}$. Gagal menolak H_0 berarti data sampel diambil dari suatu populasi dengan fungsi distribusi $F^*(y)$.

(Suliyanto, 2014)

Pendeteksian Multikolinieritas

Multikolinieritas adalah hubungan yang kuat antara sebuah variabel bebas dengan variabel bebas yang lainnya. Multikolinieritas pada model regresi menyebabkan variansi penaksir parameter menjadi besar. Kasus multikolinieritas dapat dideteksi menggunakan nilai *Variance Inflation Factor* (VIF). Jika nilai VIF lebih besar dari 10, maka terjadi kasus multikolinieritas. Nilai VIF dapat ditentukan sebagai berikut

$$\text{VIF}_k = \frac{1}{1 - R_k^2}$$

dengan R_k^2 adalah koefisien determinasi yang diperoleh dengan melakukan regresi setiap variabel bebas ke-k dengan sisa variabel bebas lainnya (Widarjono, 2007). Nilai dari R_k^2 dapat dicari dengan menggunakan rumus:

$$R_k^2 = \frac{JKR}{JKT} = \frac{\hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T X_k - n\bar{X}_k^{\,2}}{X_k^{\,T} X_k - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T X_k} \qquad (22)$$

dimana :

R_k^2 = Koefisien determinasi pada variabel bebas ke-k

JKR = Jumlah Kuadrat Regresi

JKT = Jumlah Kuadrat Total

X = Matriks variabel bebas yang tidak memuat variabel bebas ke-k

X_k = Variabel bebas ke-k

$\bar{X}_k$ = Rata-rata variabel bebas ke-k

N = Banyak Sampel

$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{X}$

(Rencher & Schaalje, 2008)

Model Regresi Weibull Univariat (RWU)

Diketahui bahwa parameter skala adalah bilangan riil positif, sehingga dapat dinyatakan dalam hubungan

$$\lambda = \exp\left[\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}\right] \qquad (23)$$

dengan $\boldsymbol{\beta}^T = [\beta_0\ \beta_1 \ldots \beta_p]$ adalah vektor parameter regresi berdimensi $p + 1$ dan $\mathbf{x} = [X_0\, X_1 \ldots X_p]^T$ adalah vektor kovariat atau variabel bebas dengan $X_0 = 1$ (Hanagal, 2004, 2005; Suyitno, 2017).

Model regresi untuk mean variabel acak Y adalah

$$\mu_Y(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) = \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right)\exp\left[\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}\right]. \qquad (24)$$

Model regresi Weibull untuk fungsi *survival* adalah

$$S(y, \boldsymbol{\theta}) = \exp\left[-y^{\gamma}\exp\left[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}\right]\right], \qquad (25)$$

model regresi Weibull untuk FKP adalah

$$f\left(y, \boldsymbol{\theta}\right) = \gamma y^{\gamma-1}\exp\left[-\gamma\left[\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}\right]\right] \times \exp\left[-y^{\gamma}\exp\left[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}\right]\right] \qquad (26)$$

dan model regresi *hazard* Weibull adalah

$$h(y) = \gamma y^{\gamma-1}\exp\left[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}\right], \qquad (27)$$

dengan $\boldsymbol{\theta} = \left[\gamma\ \beta_0\ \beta_1 \cdots \beta_p\right]^T$ adalah vector parameter berdimensi p+2.

(Suyitno, 2017)

Penaksiran Parameter Model RWU

Penaksiran parameter model regresi Weibull univariat terdiri dari penaksiran parameter-parameter model $\mu_Y(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x})$ yang diberikan oleh persamaan (24) dan model fungsi *survival* $S(y,\boldsymbol{\theta})$ yang diberikan oleh persamaan (25) serta model regresi *hazard* Weibull $h(y)$ yang diberikan oleh persamaan (27) dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Tahap awal metode MLE adalah mendefinisikan fungsi *likelihood*. Misalkan diberikan n sampel acak $(Y_i, \mathbf{x}_i)$, i = 1, 2, ⋯, n dengan Y_i adalah sampel acak respon yang independen dan berdistribusi identik, yakni $Y_i \sim W(\gamma, \exp(\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i))$ dan $\mathbf{x}_i = [X_0\ X_{1i}\ X_{2i} \cdots X_{pi}]^T$ adalah sampel acak kovariat untuk i = 1, 2, ⋯, n. Berdasarkan FKP yang diberikan oleh persamaan (26) fungsi *likelihood* didefinisikan oleh

$$\ell\left(\boldsymbol{\theta}\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(\gamma y_i^{\gamma-1}\exp\left[-\gamma\left[\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i\right]\right]\right) \times \prod_{i=1}^{n}\left(\exp\left[-y_i^{\gamma}\exp\left[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i\right]\right]\right) \qquad (28)$$

dengan $\mathbf{x}_i = [X_0\ X_{1i}\ X_{2i} \cdots X_{pi}]^T$.

Penaksir ML model regresi Weibull adalah nilai vektor $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ yang memaksimumkan fungsi *likelihood* $\ell(\boldsymbol{\theta})$ yang diberikan oleh persamaan (28) dan juga memaksimumkan fungsi logaritma natural (*log-likelihood*) dari fungsi *likelihood* $\ell(\boldsymbol{\theta})$. Fungsi logaritma natural dari fungsi *likelihood* (28) diberikan oleh

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\ln\gamma + (\gamma-1)\ln y_i - \gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(y_i^{\gamma}\exp\left[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i\right]\right) \qquad (29)$$

Penaksir ML $(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$ diperoleh dengan menyelesaikan persamaan *likelihood* yang diberikan oleh

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}} = 0 \qquad (30)$$

dengan **0** adalah vektor nol berdimensi p + 2 dan ruas kiri persamaan (30) adalah vektor gradien berdimensi p + 2, yaitu

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \left[\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\gamma}\ \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta_0}\ \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta_1} \cdots \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta_p}\right]. \qquad (31)$$

Komponen-komponen vektor gradien (31) dapat dinyatakan dalam bentuk umum, yaitu masing-masing adalah

$$\frac{\partial L\left(\boldsymbol{\theta}\right)}{\partial\gamma} = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i^{\gamma}\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i\exp\left[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i\right]\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\gamma} + \ln y_i - \boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i - y_i^{\gamma}\ln y_i\exp\left[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i\right]\right) \qquad (32)$$

dengan $\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \cdots + \beta_p X_{pi}$ dan

$$\frac{\partial L\left(\boldsymbol{\theta}\right)}{\partial\beta_k} = \sum_{i=1}^{n}\left(-\gamma X_{ki} + \gamma y_i^{\gamma} X_{ki}\exp\left[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i\right]\right) \qquad (33)$$

untuk k = 0, 1, ⋯, p . Diketahui bahwa komponen-komponen vektor gradient tidak dapat ditemukan secara analitis. Metode alternatif dalam menyelesaikan persamaan (30) untuk mendapatkan penaksir ML ($\hat{\boldsymbol{\theta}}$) adalah metode iteratif Newton Raphson.

Penentuan penaksir ML dengan metode Newton-Raphson diperlukan penghitungan vektor gradien dan matriks *Hessian*. Vektor gradien $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$ diberikan oleh persamaan (31) dan matriks *Hessian* $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$ adalah matriks simetri orde $p+2$, yaitu matriks turunan orde kedua dari fungsi *log-likelihood* (29). Bentuk umum matriks *Hessian* adalah

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma^2} & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma \partial \beta_0} & \cdots & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma \partial \beta_p} \\ \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_0 \partial \gamma} & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_0^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_0 \partial \beta_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_p \partial \gamma} & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_p \partial \beta_0} & \cdots & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_p^2} \end{bmatrix} \quad (34)$$

Berdasarkan turunan orde pertama yang diberikan oleh persamaan (32) dan (33), elemen-elemen matriks *Hessian* $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$ yang diberikan oleh persamaan (34) dapat dinyatakan dalam bentuk umum. Elemen-elemen diagonal utama adalah

$$\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{1}{\gamma^2} - y_i^{\gamma} \left(\ln y_i\right)^2 \exp\left[-\gamma \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i\right] \right) - \sum_{i=1}^{n} \left(y_i^{\gamma} \left(\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i\right)^2 \exp\left[-\gamma \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i\right] \right) + 2\sum_{i=1}^{n} \left(y_i^{\gamma} \left(\ln y_i\right) \left(\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i\right) \exp\left[-\gamma \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i\right] \right) \quad (35)$$

$$\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_k^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(-\gamma^2 y_i^{\gamma} \left(X_{ki}\right)^2 \exp\left[-\gamma \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i\right] \right) \quad (36)$$

untuk $k = 0, 1, \cdots, p$. Elemen-elemen nondiagonal utama dapat dinyatakan dalam bentuk umum, yaitu untuk $k \neq m$; $k = 0, 1, \cdots, p$ dan $m = 0, 1, \cdots, p$ didapat

$$\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma \partial \beta_k} = \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_k \partial \gamma}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(-X_{ki} + \gamma y_i^{\gamma} \ln y_i X_{ki} \exp\left[-\gamma \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}} \mathbf{x}_i\right] \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(y_i^{\gamma} X_{ki} \exp\left[-\gamma \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}} \mathbf{x}_i\right] \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(-\gamma y_i^{\gamma} X_{ki} \left(\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}} \mathbf{x}_i\right) \exp\left[-\gamma \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}} \mathbf{x}_i\right] \right) \quad (37)$$

dan

$$\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_m \partial \beta_k} = \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_k \partial \beta_m} = \sum_{i=1}^{n} \left(-\gamma^2 y_i^{\gamma} X_{mi} X_{ki} \exp\left[-\gamma \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}} \mathbf{x}_i\right] \right). \quad (38)$$

Berdasarkan hasil perhitungan komponen-komponen vektor gradien $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$ yang diberikan oleh persamaan (32) dan (33), serta elemen-elemen matriks *Hessian* $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$ yang diberikan oleh persamaan (35) sampai dengan (38), sekarang penaksir parameter model RWU ($\hat{\boldsymbol{\theta}}$) dapat ditemukan melalui algoritma iterasi Newton-Raphson yang diberikan oleh

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q)} - \left[\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q)}\right)\right]^{-1} \mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q)}\right), \quad q = 0, 1, \cdots \quad (39)$$

(Khuri, 2003)

Langkah-langkah iterasi Newton Raphson adalah sebagai berikut

1. Menentukan nilai awal,
$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)} = \left[\hat{\gamma}^{(0)}\ \hat{\beta}_0^{(0)}\ \hat{\beta}_1^{(0)} \cdots \hat{\beta}_p^{(0)}\right]^T.$$
2. Menghitung $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)} - \left[\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}\right)\right]^{-1} \mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}\right)$, begitu seterusnya.
3. Iterasi dilakukan sampai memperoleh nilai konvergen, $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q+1)} \cong \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q)}$ jika $\left|\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q)}\right| < \varepsilon$, dengan ε adalah bilangan positif yang cukup kecil.

(Hosmer, 2008)

Pengujian Hipotesis Parameter RWU Secara Serentak

Pengujian parameter regresi secara serentak bertujuan untuk mengkonfirmasi apakah parpameter-parameter yang telah ditaksir memberikan model regresi yang *fit* atau belum. Hipotesis pengujian parameter regresi secara serentak adalah

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_p = 0$
(Model RWU tidak *fit*)
H_1 : paling sedikit satu $\beta_k \neq 0$; $k = 1, 2, ..., p$
(Model RWU *fit*)

Statistik uji ditentukan dengan *likelihood ratio test*, yang disimbolkan dengan G, rumusnya adalah sebagai berikut:

$$G = 2\left[\ln L\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) - \ln L\left(\hat{\beta}_0\right)\right] \approx \hat{\mathbf{B}}^T \left[\mathbf{I}^{22}\left(\hat{\mathbf{B}}\right)\right]^{-1} \hat{\mathbf{B}} \quad (40)$$

dengan $\hat{\mathbf{B}} = \left[\hat{\beta}_1\ \hat{\beta}_2 ... \hat{\beta}_p\right]^T$. $\left[\mathbf{I}^{22}\left(\hat{\mathbf{B}}\right)\right]$ pada persamaan (34) diperoleh dari invers matriks informasi Fisher $\left[\mathbf{I}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right]^{-1} = -\left[\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right]^{-1}$ dengan menghapus baris ke-1 dan ke-2 serta kolom ke-1 dan ke-2. Statistik uji H_0 akan ditolak pada taraf signifikansi α apabila nilai $G \geq \chi^2_{(\alpha,p)}$ atau $P_{value} \leq$

α, dimana $P_{value} = P(G_v > G)$ dengan G_v adalah variabel acak berdistribusi $\chi^2_{(\alpha,p)}$. Pada pengujian ini jika H_0 ditolak berarti disimpulkan bahwa model RWU fit atau model sudah dapat digunakan.

(Pawitan, 2001)

Pengujian Hipotesis Parameter RWU Secara Parsial

Pengujian hipotesis parameter regresi secara parsial untuk mengetahui apakah kovariat tertentu secara individual berpengaruh terhadap model regresi. Hipotesis pengujian secara parsial untuk k tertentu (k = 0, 1, ..., p) adalah

$H_0 : \beta_k = 0$
(Variabel bebas X_k tidak berpengaruh terhadap model RWU)
$H_1 : \beta_k \neq 0$
(Variabel bebas X_k berpengaruh terhadap model RWU)

Statistik uji pengujian hipotesis nol adalah statistik Wald yang diberikan oleh

$$W_0 = \frac{\hat{\beta}_k}{SE\left(\hat{\beta}_k\right)} \sim N\left(0,1\right), \qquad (41)$$

dimana $SE(\hat{\beta}_k) = \sqrt{var(\hat{\beta}_k)}$ dengan $var(\hat{\beta}_k)$ adalah elemen diagonal utama ke k+2 invers matriks informasi Fisher. Daerah kritis pengujian hipotesis adalah menolak H_0 pada taraf uji α , jika nilai $|W_0| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ atau $P_{value} \leq \alpha$, dimana $P_{value} = P(|W_{0v}| > W_0) = 2P(W_{0v} > |W_0|)$ dengan W_{0v} adalah variabel acak berdistribusi $\chi^2_{(\alpha,p)}$.

(Pawitan, 2001)

Interpretasi Model RWU

Interpretasi model RWU dapat menggunakan perhitungan rasio. Rumusan untuk *hazard ratio* dalam regresi Weibull untuk variabel bebas kontinu dapat ditunjukkan dalam persamaan sebagai berikut.

$$HR = \frac{h(t \mid x = \hat{\beta} + 1)}{h(t \mid x = \hat{\beta})} = e^{\hat{\beta}} \qquad (43)$$

(Hosmer, 2008)

Berdasarkan persamaan (27) dan (43), rasio regresi *hazard* Weibull untuk variabel bebas ke-k adalah

$$Rh_{X_k} = \frac{\exp[\hat{\beta}_k (X_k + 1)]}{\exp[\hat{\beta}_k X_k]} = \exp(\hat{\beta}_k) \qquad (44)$$

Berdasarkan persamaan (25) dan (43), rasio regresi *survival* Weibull pada X ke-k adalah

$$RS_{X_k} = \exp\{[-y_i^{\hat{\gamma}} \exp(-\hat{\gamma}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_k (X_k + 1) + \hat{\beta}_p X_p)] - [-y_i^{\hat{\gamma}} \exp(-\hat{\gamma}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_k X_k + \hat{\beta}_p X_p)]\} \qquad (45)$$

dan berdasarkan persamaan (24) dan (43), rasio regresi *mean* variabel terikat pada X ke-k adalah

$$R\mu_{X_k} = \frac{\exp[\hat{\beta}_k (X_k + 1)]}{\exp[\hat{\beta}_k X_k]} = \exp(\hat{\beta}_k) \qquad (46)$$

Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Indikator DO dalam Air Sungai

Amonia apabila terkandung pada sistem perairan dapat merupakan racun bagi kehidupan air, terutama bagi kehidupan ikan karena adanya amonia dapat mengurangi kandungan oksigen dalam air. Amonia berasal dari beberapa sumber antara lain limbah domestik yang termasuk didalamnya sampah, kotoran manusia dan binatang, kemudian berasal dari limbah industri dan dapat pula berasal dari alam yang terpapar oleh sisa-sisa tumbuhan.

Suhu perairan tropis lebih umumnya lebih tinggi daripada suhu perairan sub tropis utamanya pada musim dingin. Suhu air sangat berpengaruh terhadap jumlah oksigen terlarut di dalam air. Jika suhu tinggi, air akan lebih cepat jenuh dengan oksigen dibanding dengan suhunya rendah.

Deterjen merupakan limbah pemukiman yang paling potensial mencemari air. Penggunaan deterjen secara besar-besaran juga meningkatkan pertumbuhan ganggang dan eceng gondok. Pertumbuhan ganggang dan eceng gondok yang tidak terkendali menyebabkan permukaan air danau atau sungai tertutup sehingga menghalangi masuknya cahaya matahari dan mengakibatkan terhambatnya proses fotosintesis. Jika tumbuhan air ini mati, akan terjadi proses pembusukan yang menghabiskan persediaan oksigen.

Nitrat (NO_3) adalah bentuk utama nitrogen di perairan alami, bersifat stabil, dan mudah larut dalam air. Bila terjadi hujan lebat, air akan membawa nitrat dari tanah masuk ke dalam aliran sungai, danau, dan waduk (Manampiring, 2009).

Fenol secara umum sumber pencemarannya berasal dari batubara, kilang minyak dan air limbah yang berasal dari resin, plastik, fiber, lem, besi, baja, alumunium, karet serta *effluent* industri bahan bakar sintetik. Sedangkan sumber alamiah dari keberadaan fenol di air adalah dari kotoran binatang dan dekomposisi bahan organik. Di dalam perairan senyawa fenol dapat mengurangi kandungan oksigen di dalam air akibat penguraian senyawa-senyawa fenol oleh mikroorganisme (Slamet, 2005).

Derajat keasaman (pH) sangat erat hubungannya dengan kandungan logam berat yang terdapat di dalam sungai semakin banyak bahan pencemar yang berada di dalam sungai maka akan mengakibatkan rendahnya nilai (pH). Fluktuasi nilai pH dipengaruhi oleh adanya buangan limbah organik dan anorganik ke sungai. (Suharto, 2011).

Hasil Penelitian dan Pembahasan

1. Statistika Deskriptif

Deskripsi data penelitian dapat dilihat berdasarkan statistik deskriptif dari masing-masing data yang terdiri dari nilai rata-rata (*mean*), simpangan baku (deviasi standar), nilai minimum dan maksimum. Statistik deskriptif data penelitian disajikan pada Tabel 1.

Berdasarkan statistik deskriptif pada Tabel 1, rata-rata konsentrasi DO adalah 5,4200 *mg/l* yang berarti bahwa air sungai mahakam berada di bawah ambang batas angka baku yaitu 6 *mg/l* (golongan IA sebagai bahan baku air bersih).

2. Penaksiran Parameter Distribusi Weibull Univariat

Penaksiran parameter distribusi Weibull untuk data variabel DO menggunakan metode MLE yang diselesaikan dengan metode iteratif Newton-Raphson. Hasil perhitungan ditunjukan pada Tabel 2.

Tabel 1. Analisis Statistika Deskriptif Masing-Masing Variabel

Variabel	Rata-Rata	Deviasi Standar	Minimum	Maksi Mum
DO	5,4200	1,3442	2,2000	7,7400
Amonia	0,1189	0,2381	0,0050	1,2380
Suhu	27,1641	1,1836	24,5500	29,0000
Deterjen	35,5362	20,0282	18,0000	91,9500
Nitrat	0,3206	0,3607	0,0010	1,8200
Fenol	13,8209	18,1296	0,1390	81,1000
Ph	6,8706	0,4884	5,6600	7,7300

Tabel 2 Parameter Distribusi Weibull Univariat

Parameter	Taksiran
Skala (λ)	5,9095
Bentuk (γ)	5,0598

Berdasarkan hasil penaksiran parameter distribusi Weibull pada Tabel 2 diperoleh persamaan fungsi distribusi kumulatif adalah

$$F^*(Y) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{y}{5,9095}\right)^{5,0598}\right] \qquad (47)$$

3. Pengujian Distribusi

Diketahui fungsi distribusi kumulatif $F^*(Y)$ yang diberikan oleh persamaan (47) adalah fungsi distribusi Weibull data sampel variabel DO. Rumusan hipotesis pengujian distribusi adalah

$H_0 : F(y) = F^*(y)$
(Data variabel DO berdistribusi Weibull dengan fungsi distribusi $F^*(y)$)

$H_1 : F(y) \neq F^*(y)$
(Data variabel DO bukan berdistribusi Weibull)

Statistik uji diberikan pada persamaan (21) dan hasil perhitungan dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3 Pengujian Distribusi Weibull Variabel DO

Statistik Uji	$D_{29,(0,05)}$	Keputusan
D = 0,0868	0,2460	Gagal Menolak H_0

4. Pendeteksian Multikolinieritas

Pendeteksian multikolinieritas bertujuan untuk melihat apakah ada hubungan yang kuat antar variabel bebas dalam model regresi. Pendeteksian dapat dilihat dari nilai VIF. Nilai VIF > 10 mengindikasikan terdapat multikolinieritas antar variabel bebas. Hasil perhitungan nilai VIF setiap variabel bebas dapat dilihat pada Tabel 4.

5. Penaksiran Parameter Model Regresi Weibull Univariat (RWU)

Model-model RWU pada penelitian ini adalah model regresi *survival* Weibull yang diberikan oleh persamaan (25), regresi *hazard* Weibull yang diberikan oleh persamaan (27) dan regresi untuk *mean* yang diberikan oleh persamaan (24). Penaksiran parameter RWU menggunakan metode MLE yang diselesaikan dengan metode iteratif Newton-Raphson. Hasil penaksiran parameter disajikan pada Tabel 5.

Tabel 4 Nilai VIF Setiap Variabel Bebas

Variabel	VIF
Amonia	1,2148
Suhu	2,2553
Deterjen	1,1856
Nitrat	1,1754
Fenol	1,9534
pH	1,1195

Tabel 5 Penaksiran Parameter Model RWU

Parameter	Taksiran
γ	-4,7328
β_0	5,5847
β_1	-0,2300
β_2	-0,1176
β_3	-0,0063
β_4	-0,5905
β_5	0,0047
β_6	-0,0708

Berdasarkan hasil penaksiran parameter pada model RWU pada Tabel 4 dan pada persamaan (25) diperoleh model regresi *survival* Weibull adalah

$$\hat{S}(y) = \exp[-y^{-4,7328} \exp[26,4310 - 1,0885X_1 - 0,5566X_2 - 0,0298X_3 - 2,7947X_4 + 0,0222X_5 - 0,3351X_6],$$

Model regresi *hazard* Weibull berdasarkan persamaan (27) adalah

$$\hat{h}(y) = -4,7328y^{-5,7328} \exp[26,4310 - 1,0885X_1 - 0,5566X_2 - 0,0298X_3 - 2,7947X_4 + 0,0222X_5 - 0,3351X_6],$$

dan model regresi untuk *mean* berdasarkan persamaan (24) adalah

$$\hat{\mu}_Y = 0,2113\exp[5,5847 - 0,2300X_1 - 0,1176X_2 - 0,0063X_3 - 0,5905X_4 + 0,0047X_5 - 0,0708X_6]$$

7. Pengujian Hipotesis Parameter RWU Secara Serentak

Pengujian parameter regresi secara serentak bertujuan untuk melihat apakah variabel-variabel bebas (konsentrasi amonia, suhu, konsentrasi deterjen, konsentrasi nitrat, konsentrasi Fenol dan pH) secara bersama-sama berpengaruh terhadap model RWU. Hipotesis pengujian parameter regresi secara serentak adalah

Hipotesis
$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0$
(Model RWU yang diperoleh tidak *fit*)
H_1 : paling sedikit satu $\beta_k \neq 0$; k = 1, 2, 3, 4, 5, 6
(Model RWU yang diperoleh *fit*)

Statistik uji diberikan pada persamaan (40). Hasil pengujian hipotesis parameter RWU secara serentak disajikan pada Tabel 6.

Tabel 6 Pengujian Hipotesis Parameter RWU Secara Serentak

Statistik Uji	$\chi^2_{0,05(6)}$	*P-Value*	Keputusan
G = 56,3552	12,59	0,00	Menolak H_0

8. Pengujian Hipotesis Parameter RWU Secara Parsial

Pengujian hipotesis parameter regresi secara parsial untuk mengetahui apakah kovariat tertentu secara individual berpengaruh terhadap model RWU. Hipotesis pengujian secara parsial untuk k tertentu (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) adalah
$H_0 : \beta_k = 0$
(Variabel bebas X_k tidak berpengaruh terhadap model RWU)
$H_1 : \beta_k \neq 0$
(Variabel bebas X_k berpengaruh terhadap model RWU)

Statistik uji diberikan pada persamaan (41). Hasil pengujian hipotesis parameter RWU secara parsial disajikan pada Tabel 7.

Tabel 7 Pengujian Hipotesis Parameter RWU Secara Parsial

Variabel	Koefisien	W_0	$Z_{0,975}$	*P-Value*	Keputusan
Konstanta	β_0	3,4794	1,96	0,0005	Menolak H_0
Amonia	β_1	-0,4627		0,6436	Gagal Menolak H_0
Suhu	β_2	-1,8693		0,0616	Gagal Menolak H_0
Deterjen	β_3	-2,1299		0,0332	Menolak H_0
Nitrat	β_4	-2,4294		0,0151	Menolak H_0
Fenol	β_5	1,1711		0,2416	Gagal Menolak H_0
pH	β_6	-0,7542		0,4507	Gagal Menolak H_0

9. Interpretasi Model RWU

Interpretasi model RWU diperoleh dari hasil perhitungan rasio regresi *survival*, regresi *hazard*, dan *mean* pada variabel bebas yang berpengaruh yaitu konsentrasi deterjen dan konsentrasi nitrat.

Berdasarkan persamaan (45), nilai rasio regresi *survival* untuk masing-masing variabel bebas yang berpengaruh. Sebagai contoh pada daerah sampel air sungai Muara Pahu di titik sampel ke-3 adalah

- Konsentrasi Deterjen

$$RS_{X_3} = \exp\left(-1,1763\right) = 0,3082$$

Berdasarkan nilai rasio pada regresi *survival*, setiap kenaikan 1 *mg/l* konsentrasi deterjen dan dianggap nilai variabel yang lainnya tetap akan menurunkan peluang konsentrasi DO air sungai Mahakam di daerah Muara Pahu menjadi 0,3082 kali. Ini berarti peluang tercemarnya air sungai Mahakam di Muara Pahu meningkat.

- Konsentrasi Nitrat

$$RS_{X_4} = \exp(-1,1739) = 0,3092$$

Berdasarkan nilai rasio pada regresi *survival*, setiap kenaikan 1 *mg/l* konsentrasi nitrat dan dianggap nilai variabel yang lainnya tetap, akan menurunkan peluang konsentrasi DO air sungai Mahakam di daerah Muara Pahu menjadi 0,3092 kali. Ini berarti peluang tercemarnya air sungai Mahakam di Muara Pahu meningkat.

Berdasarkan persamaan (44), nilai rasio regresi *hazard* adalah

- Konsentrasi Deterjen

$$Rh_{X_3} = \exp[-\hat{\gamma}(\hat{\beta}_3)] = \exp[-0,0298] = 0,9706$$

Berdasarkan nilai rasio regresi *hazard*, setiap kenaikan 1 *mg/l* konsentrasi deterjen dan dianggap nilai variabel yang lainnya tetap, akan menurunkan konsentrasi DO air sungai Mahakam menjadi 0,9706 kali. Ini berarti potensi (*rate*) tidak tercemarnya air sungai Mahakam menurun.

- Konsentrasi Nitrat

$$Rh_{X_4} = \exp[-\hat{\gamma}(\hat{\beta}_4)] = \exp[-2{,}7947] = 0{,}0611$$

Berdasarkan nilai rasio regresi *hazard*, setiap kenaikan 1 *mg/l* konsentrasi nitrat dan dianggap nilai variabel yang lainnya tetap, akan menurunkan konsentrasi DO air sungai Mahakam menjadi 0,0611 kali. Ini berarti potensi (*rate*) tidak tercemarnya air sungai Mahakam menurun.

Berdasarkan persamaan (46), nilai rasio regresi untuk *mean* adalah

- Konsentrasi Deterjen

$$R\mu_{X_3} = \exp[(\hat{\beta}_3)] = \exp[-0{,}0063] = 0{,}9937$$

Berdasarkan nilai rasio pada regresi untuk *mean* dapat diinterpretasikan bahwa setiap kenaikan 1 *mg/l* konsentrasi deterjen dan dianggap nilai variabel yang lainnya tetap, akan menurunkan rata-rata konsentrasi DO air sungai Mahakam menjadi 0,9937 kali.

- Konsentrasi Nitrat

$$R\mu_{X_4} = \exp[(\hat{\beta}_4)] = \exp[-0{,}5905] = 0{,}5541$$

Berdasarkan nilai rasio pada regresi untuk *mean* dapat diinterpretasikan bahwa setiap kenaikan 1 *mg/l* konsentrasi nitrat dan dianggap nilai variabel yang lainnya tetap, akan menurunkan rata-rata konsentrasi DO air sungai Mahakam menjadi 0,5541 kali.

Kesimpulan

1. Berdasarkan hasil penaksiran parameter pada model RWU diperoleh model regresi *survival* Weibull pada data DO air sungai Mahakam adalah

$$\hat{S}(y) = \exp[-y^{-4{,}7328}\exp[26{,}4310 - 1{,}0885X_1 - 0{,}5566X_2 - 0{,}0298X_3 - 2{,}7947X_4 + 0{,}0222X_5 - 0{,}3351X_6],$$

dengan y adalah DO, X_1 adalah konsentrasi amonia, X_2 adalah suhu, X_3 adalah konsentrasi deterjen, X_4 adalah konsentrasi nitrat, X_5 adalah konsentrasi fenol dan X_6 adalah pH.

Model regresi *hazard* Weibull pada data DO air sungai Mahakam adalah

$$\hat{h}(y) = -4{,}7328y^{-5{,}7328}\exp[26{,}4310 - 1{,}0885X_1 - 0{,}5566X_2 - 0{,}0298X_3 - 2{,}7947X_4 + 0{,}0222X_5 - 0{,}3351X_6],$$

dan model regresi untuk *mean* DO air sungai Mahakam adalah

$$\hat{\mu}_Y = 0{,}2113\exp[5{,}5847 - 0{,}2300X_1 - 0{,}1176X_2 - 0{,}0063X_3 - 0{,}5905X_4 + 0{,}0047X_5 - 0{,}0708X_6]$$

2. Berdasarkan pengujian hipotesis parameter RWU diperoleh faktor yang berpengaruh terhadap model RWU adalah konsentrasi deterjen dan konsentrasi nitrat.
3. Berdasarkan nilai rasio pada regresi *survival*, setiap kenaikan 1 *mg/l* masing-masing konsentrasi deterjen dan konsentrasi nitrat akan menurunkan peluang konsentrasi DO air sungai Mahakam di daerah Muara Pahu menjadi 0,3082 kali dan 0,3092 kali. Ini berarti peluang tercemarnya air sungai Mahakam di Muara Pahu meningkat. Berdasarkan nilai rasio regresi *hazard*, setiap kenaikan 1 *mg/l* masing-masing konsentrasi deterjen dan konsentrasi nitrat akan menurunkan konsentrasi DO air sungai Mahakam 0,9706 kali dan 0,0611 kali. Ini berarti potensi (*rate*) tidak tercemarnya air sungai Mahakam menurun. Berdasarkan nilai rasio pada regresi untuk *mean* didapatkan setiap kenaikan 1 *mg/l* masing-masing konsentrasi deterjen dan konsentrasi nitrat, akan menurunkan rata-rata konsentrasi DO air sungai Mahakam menjadi 0,8366 kali dan 0,5541 kali.

Daftar Pustaka

Hanagal, D.D. (2004). "Parametric Bivariate Regression Analysis Based on Censored Samples: A Weibull Model". *Economic Quality Control*, 19(1). ISSN 0940-5151.

__________. (2005). "A Bivariate Weibull Regression Model". *Economic Quality Control*, 20(1). ISSN 0940-5151.

__________. (2005). "Weibull Extension of a Bivariate Exponential Regression Model". *Economic Quality Control*, 20(2), 149, ISSN 09405151.

Hosmer, D. W., Lemeshow, S. and May, S. (2008). *Applied Survival Analysis: Regression Modelling of Time to Event Data*. New Jersey: *John Wiley*.

Khuri, A. I. (2003). *Advanced Calculus with Applications in Statistics 2nd Edition*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., Hoboken..

Lawless, J. F. (2003). *Statistical Models and Methods for lifetime Data 2nd Edition*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., Hoboken.

Manampiring, Aaltje E. (2009). "Studi Kandungan Nitrat Pada Sumber Air Minum Masyarakat Kelurahan Rurukan

Kecamatan Tomohon Timur Kota Tomohon". *Karya Ilmiah FK UNSRAT Manado*.

Musdalifa, A., Raupong, dan Islamiyati, Anna. (2013). "Estimasi Parameter Distribusi Weibull Dengan Transformasi Model Regresi Menggunakan Metode Kuadrat Terkecil Linier". *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi, September 2013*.

Pawitan, Y. (2001). *In All Likelihood. Statistical Modelling and Inference Using Likelihood*. England: Clarendon Press-Oxford.

Rencher, A.C., & Schaalje, G.B. (2008). *Linier Models in Statistics: Second Edition.* New Jersey: John Wiley & Sons.

Suharto, Ign. (2011). *Limbah Kimia dalam Pencemaran Air dan Udara*. Yogyakarta: CV. Andi Offset

Suliyanto, Dr. (2014). *Statistika Non Parametrik* (*Dalam Aplikasi Penelitian*). Yogyakarta: CV. Andi Offset

Suyitno. (2017). "Penaksiran Parameter dan Pengujian Hipotesis Model Regresi Weibull Univariat". *Jurnal EKSPONENSIAL Vol 8, No 2, Nopember 2017*. Diperoleh dari http://jurnal.fmipa.unmul.ac.id.

Rinne, H. (2009). *The Weibull Distribution A Handbook*. New York: CRC Press Taylor and Francis Group.

Safitri, S. B., Yozza, H., dan HG, I. R. "Penerapan Model Regresi *Cox-Weibull* Untuk Menentukan Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Lama Kesembuhan Pasien *Tuberculosis*". *Jurnal Matematika UNAND Vol. 5 No. 4 Hal. 62-71*.

Sastrawijaya (2009). *Pencemaran Lingkungan (Edisi Revisi)*. Jakarta: Rineka Cipta.

Slamet, R Arbianti, dan Daryanto (2005). "Pengolahan Limbah Organik (Fenol) dan Logam Berat (Cr^{6+} atau Pt^{4+} Secara Simultan dengan Fotokatalis Tio2, Zno-Tio2, dan Cds-Tio2). *Jurnal Makara Teknologi Vol. 9 No. 2 Hal. 66-71*.

Widarjono, A. (2007). *Ekonometrika: Teori dan Aplikasi Untuk Ekonomi dan Bisnis Edisi Kedua*. Yogyakarta: Ekonisia.