p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

Model Regresi Weibull Pada Data Kontinu yang Diklasifikasikan (Studi Kasus: Indikator Pencemaran Air BOD di DAS Mahakam Tahun 2016)

Weibull Regression Model on Classified Continuous Data (*Case Study: BOD Water Pollution Indicator at Mahakam Watersheds in 2016*)

Hesty Dwiyugo Panduwinata[1], Suyitno[2], Moh. Nurul Huda[3]
[1,2] Laboratorium Statistika Terapan FMIPA Universitas Mulawarman
[3] Laboratorium Matematika Komputasi FMIPA Universitas Mulawarman
Email: [1]hestypanduwinata8@gmail.com

ABSTRACT

Weibull Regression is a model of regression developed from Weibull distribution in which scale parameter is expressed in the regression parameters. The Weibull regression models discussed in this study are the Weibull survival regression, Weibull hazard regression and regression model for the mean. The Weibull survival regression model is a model of the probability that the Mahakam River water is polluted. The Weibull hazard regression model is a model of velocity of the polluted Mahakam River water, and the Weibull regression for the mean is the model used to predict the average value of BOD (Biochemical Oxygen Demand). The purpose of this study was to obtain the Weibull regression model on BOD water pollution indicator data in the Mahakam River basin, to determine the factors that influence the Weibull regression model. The parameter method is maximum likelihood estimation (MLE). Based on the parameter estimation results, the maximum likelihood estimator is obtained by using the method of Newton-Raphson iteration. The results of hypothesis testing, it is concluded that the factors that influence the Weibull regression model are pH, Total Dissolved Solid (TDS) and water discharge.

Keywords: *BOD, MLE, Weibull survival regression model, Weibull hazard regression model, Weibull regression model for the mean*

Pendahuluan

Distribusi Weibull merupakan salah satu distribusi variabel acak kontinu yang banyak digunakan untuk menganalisis data waktu kegagalan ataupun data tentang lingkungan. Distribusi Weibull univariat memuat tiga parameter yaitu parameter bentuk, parameter skala dan parameter lokasi. Salah satu bentuk khusus distribusi Weibull tiga parameter adalah distribusi Weibull versi skala-bentuk (*scale-shape version*), yaitu distribusi yang memuat parameter skala dan parameter bentuk. Pembahasan tentang distribusi Weibull terbatas pada penaksiran parameter distribusi data respon (fungsi kepadatan peluang, fungsi *survival*, dan fungsi *hazard*). Data respon dilapangan pada banyak kasus dipengaruhi oleh faktor-faktor eksternal (variabel bebas atau kovariat), sehingga diperlukan pemodelan distribusi. Distribusi Weibull yang memuat peubah bebas dinamakan model regresi Weibull (Rinne, 2009).

Regresi Weibull merupakan pengembangan dari distribusi Weibull, yaitu distribusi yang memuat kovariat atau peubah bebas sehingga parameter skala atau parameter bentuk pada distribusi Weibull dapat dinyatakan dalam model regresi (Lawless, 2003). Model-model regresi Weibull univariat antara lain adalah model regresi *survival* Weibull, model regresi *hazard* Weibull dan model regresi Weibull untuk *mean* (Suyitno, 2017).

Pembahasan terkait distribusi Weibull mudah didapat di berbagai literatur, tetapi literatur yang membahas tentang regresi Weibull terbatas. Beberapa penelitian yang membahas tentang regresi Weibull antara lain Penaksiran Parameter dan Pengujian Hipotesis Model Regresi Weibull Univariat (Suyitno, 2017) dan Analisis Survival Pada Pasien Demam Berdarah Dengue (DBD) di RSU Haji Surabaya Menggunakan Model Regresi Weibull (Alifa, 2016).

Sungai Mahakam memiliki peranan penting dalam kehidupan masyarakat yang tinggal disepanjang aliran sungai antara lain sebagai sarana transportasi dan sumber air bersih. Disepanjang aliran sungai Mahakam terdapat banyak kegiatan mulai dari sektor industri, pertambangan, kehutanan, pertanian, hingga pusat kegiatan ekonomi masyarakat. Aktifitas yang dilakukan tersebut menghasilkan bahan pencemar berupa limbah domestik dan non domestik yang langsung mengalir ke aliran sungai. Hal ini mempengaruhi kelangsungan hidup masyarakat disekitaran sungai karena air sungai berpotensi tercemar oleh limbah. Efek

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

samping dari air sungai yang tercemar antara lain timbulnya penyakit kulit dan sistem pencernaan tergganggu, oleh karena itu perlu upaya yang dilakukakan untuk mencegah pencemaran air sungai Mahakam. Salah satu upaya pencegahan pencemaran air sungai Mahakam secara statistika adalah melakukan analisis terhadap kualitas air sungai Mahakam yang berpotensi tercemar. Untuk mendeteksi kualitas air sungai Mahakam digunakan indikator pencemar *biochemical oxygen demand* (BOD) yang dianalisis menggunakan model regresi weibull. Berdasarkan model regresi weibull dapat ditemukan faktor-faktor yang mempengaruhi pencemaran air yang berguna bagi masyarakat dan pemerintah dalam mengurangi pencemaran air sungai Mahakam. Faktor-faktor yang dimaksud adalah suhu, pH, *total dissolved solid* (TDS), konsentrasi amonia dan debit air.

Distribusi Weibull Univariat

Fungsi kepadatan peluang (FKP) peubah acak kontinu non negatif Y berdistribusi Weibull dengan tiga parameter adalah

$$f(y) = \frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{y-\delta}{\lambda}\right)^{\gamma-1} exp\left[-\left(\frac{y-\gamma}{\lambda}\right)^{\gamma}\right], \quad (1)$$

dengan $y > \delta$; $0 < \lambda$; $\gamma, \delta < \infty$, dimana γ, λ dan δ berturut-turut adalah parameter bentuk, skala dan lokasi (Rinne, 2009). Bentuk khusus distribusi Weibull dengan dua parameter yaitu parameter skala-bentuk , FKP dinyatakan dalam persamaan berikut

$$f(y) = \frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma-1} exp\left[-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma}\right]. \quad (2)$$

Fungsi *survival* distribusi Weibull dengan versi skala-bentuk diberikan oleh

$$S(y) = P(Y \geq y) = exp\left[-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma}\right], \quad (3)$$

dan fungsi distribusi kumulatif didefinisikan oleh

$$F(y) = 1 - exp\left[-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma}\right]. \quad (4)$$

Berdasarkan persamaan 3 dan 4 diperoleh FKP pada persamaan 2 melalui hubungan

$$f(y) = \frac{dF(y)}{dy} = -\frac{dS(y)}{dy}. \quad (5)$$

Fungsi *hazard* diperoleh melalui persamaan 2 dan 3 dan dinyatakan sebagai berikut (Suyitno, 2017)

$$h(y) = \frac{f(y)}{S(y)} = \frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma-1}. \quad (6)$$

Momen ke – r distribusi Weibull versi skala-bentuk dapat dinyatakan dalam bentuk umum sebagai berikut

$$E(X^r) = \lambda^{\gamma}\Gamma_r \quad (7)$$

dengan $\Gamma(.)$ adalah fungsi gamma dan Γ_r didefinisikan oleh

$$.\Gamma_r = \Gamma\left(\frac{r}{\gamma} + 1\right).$$

Berdasarkan persamaan 7 diperoleh *mean* dan variansi peubah acak Y berturut-turut sebagai berikut (Lawless, 2003)

$$\mu_Y = E(Y) = \lambda\Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right), \quad (8)$$

dan

$$var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \lambda^2(\Gamma_2 - \Gamma_1^2). \quad (9)$$

Salah satu metode penaksir parameter distribusi Weibull adalah MLE. Tahap awal metode MLE adalah mendefinisikan fungsi likelihood. Misal diketahui data berukuran n dengan $y_1, y_2, \dots, y_n$ saling bebas dan berdistibusi $y_i \sim W(\lambda,\gamma)$, $i = 1,2,\dots,n$. Berdasarkan FKP yang diberikan persamaan 2, fungsi *likelihood* didefinisikan sebagai berikut

$$\ell(\boldsymbol{\theta_1}, \boldsymbol{y}) = \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^{\gamma-1} exp\left(-\left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^{\gamma}\right)\right]. \quad (10)$$

Penerapan logaritma natural di kedua ruas pada persamaan 10, diperoleh fungsi *log-likelihood* yaitu

$$L(\boldsymbol{\theta_1}, \boldsymbol{y}) = \ell(\boldsymbol{\theta_1}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n}[\ln(\gamma) - \ln(\lambda) + (\gamma-1)[\ln(y_i) - \ln(\lambda)] - \left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^{\gamma}] \quad (11)$$

Penaksir ML ($\hat{\boldsymbol{\theta}}_1$) yang memaksimumkan fungsi *log-likelihood* ($L(\boldsymbol{\theta_1}, \mathbf{y})$) adalah $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 = [\lambda \quad \gamma]$, didapat dari turunan pertama fungsi $\ell(\boldsymbol{\theta_1}, \mathbf{y})$ terhadap semua parameter disamakan dengan nol (0) sehingga diperoleh

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta_1}, y)}{\partial \boldsymbol{\theta_1}} = 0. \quad (12)$$

Ruas kiri dari persamaan 12 dinamakan vektor gradien (**g**) yaitu

$$\mathrm{g}(\boldsymbol{\theta_1}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta_1}, y)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta_1}, y)}{\partial \gamma} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Komponen-komponen vektor gradien berturut-turut adalah

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta_1}, y)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\gamma}{\lambda} - \left[-\gamma\left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^{\gamma-1}\left(\frac{y_i}{\lambda^2}\right)\right]\right), \quad (14)$$

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta_1}, y)}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\gamma} + \ln\left(\frac{y_i}{\lambda}\right) - \left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^{\gamma}[\ln(y_i) - \ln(\lambda)]\right). \quad (15)$$

Sistem persamaan likelihood yang didapat dari persamaan 14 dan 15 sebagai berikut

$$\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\gamma}{\lambda} - \left[-\gamma\left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^{\gamma-1}\left(\frac{y_i}{\lambda^2}\right)\right]\right) = 0 \quad (16)$$

Berdasarkan persamaan 16, untuk mendapatkan penaksir maksimum *likelihood* (ML) tidak dapat diselesaikan secara analitik. Metode alternatif yang digunakan untuk mendapatkan penaksir ML adalah metode iteratif Newton-Raphson. Algoritma iterasi Newton-Raphson adalah

$$\hat{\theta}_1^{(q+1)} = \hat{\theta}_1^{(q)} - \left[H\left(\hat{\theta}_1^{(q)}\right)\right]^{-1} g\left(\hat{\theta}_1^{(q)}\right), \quad (17)$$

dengan **g** sebagai vektor gradien yang diberikan oleh persamaan 12 dan matriks Hessian $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta_1})$

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

yaitu matriks turunan parsial orde kedua yang diperoleh dari fungsi *log-likelihood* terhadap komponen-komponen tiap parameter. Bentuk umum matriks Hessian adalah

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\theta_1}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\theta_1},\boldsymbol{y})}{\partial\lambda^2} & \frac{\partial^2 \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\theta_1},\boldsymbol{y})}{\partial\lambda\partial\gamma} \\ \frac{\partial^2 \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\theta_1},\boldsymbol{y})}{\partial\gamma\partial\lambda} & \frac{\partial^2 \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\theta_1},\boldsymbol{y})}{\partial\gamma^2} \end{bmatrix}. \qquad (18)$$

Elemen-elemen matriks Hessian $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_1)$ adalah (Suyitno, 2017)

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\theta_1},\boldsymbol{y})}{\partial\lambda^2} = \sum_{i=1}^{n}\left[-\left(\frac{\gamma^2+\gamma}{\lambda^2}\right)\left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^2 + \frac{\gamma}{\lambda^2}\right], \qquad (19)$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\theta_1},\boldsymbol{y})}{\partial\gamma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{1}{\gamma^2} - \left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^{\gamma} \ln\left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^2\right], \qquad (20)$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\theta_1},\boldsymbol{y})}{\partial\gamma\partial\lambda} = \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{1}{\gamma} + \left(\frac{\gamma}{\lambda}\ln\left(\frac{y_i}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda}\right)\left(\frac{y_i}{\lambda}\right)\right]. \qquad (21)$$

Pengujian Distribusi

Pengujian distribusi dilakukan menggunakan pendekatan uji Kolmogorov-Smirnov. Misalkan ingin menguji apakah data sampel berdistribusi Weibull dengan fungsi distribusi $\tilde{F}(y)$. Hipotesis pengujian adalah

$H_0 : F(y) = \tilde{F}(y)$

(Data berdistribusi Weibull dengan fungsi distribusi $\tilde{F}(y)$ yang diberikan oleh persamaan 4)

$H_1 : F(y) \neq \tilde{F}(y)$

(Data tidak berdistribusi Weibull dengan fungsi distribusi $\tilde{F}(y)$)

Statistik uji adalah

$$\text{D} = \max \left|A(y) - \tilde{F}(y)\right| \qquad (22)$$

dengan

$\tilde{F}(y)$: fungsi distirbusi teoritis yang dihipotesiskan

$A(y)$: fungsi distribusi empiris yaitu

$$A(\text{y}_i) = \frac{\text{banyak data} \leq \text{y}_i}{n},$$

H_0 ditolak pada taraf signifikansi α jika $D > D_\alpha$ yang berarti data tidak berdistribusi weibull. (Suliyanto, 2014)

Pendeteksian Multikolinearitas

Multikolinearitas adalah suatu hubungan yang kuat antar variabel bebas dalam model regresi. Salah satu kriteria yang digunakan untuk mendeteksi adanya multikolinearitas suatu model adalah mencari nilai *Variance Inflation Factors* (VIF). Nilai VIF lebih besar dari 10 menunjukkan adanya multikolinearitas antar variabel bebas. Nilai VIF dirumuskan sebagai berikut

$$VIF = \frac{1}{1 - R_k^2}$$

Nilai R_k^2 dapat dicari menggunakan rumus :

$$R_k^2 = \frac{\widehat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T x_k - n\bar{x}_k^2}{x_k^T x_k - \widehat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T x_k}, \qquad (23)$$

Dimana (Rencher & Schaalje, 2008):

R_k^2 : Koefisien determinasi model regresi variabel bebas ke – k

$\mathbf{X}$: Matriks data variabel bebas setelah variabel bebas X_k dikeluarkan

X_k : Variabel bebas ke – k

$\overline{X}_k$: Rata-rata variabel bebas ke – k

n : Ukuran sampel

$\hat{\boldsymbol{\beta}}$: $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{X}$

Model Regresi Weibull Univariat

Sebagai pengembangan dari distribusi Weibull, diketahui parameter skala (λ) pada persamaan 2 bernilai riil positif, sehingga dapat dinyatakan dalam fungsi parameter regresi sebagai berikut

$$\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta}) = exp[\boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x}], \qquad (24)$$

dengan $\boldsymbol{\beta}^T = [\beta_0 \;\; \beta_1 \;\; \cdots \;\; \beta_p]$ adalah vektor parameter regresi berdimensi *p+1* dan $\boldsymbol{x} = [X_0 \;\; X_1 \;\; \cdots \;\; X_p]^T$ adalah peubah bebas dengan $X_0 = 1$ (Hanagal, 2004, 2005; Suyitno, 2017).

Berdasarkan persamaan 8 dan 24 diperoleh model regresi weibull untuk *mean* yaitu

$$\mu_Y(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{x}) = \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) exp[\boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x}]. \qquad (25)$$

Berdasarkan persamaan 3 dan 24 diperoleh model regresi *survival* Weibull yaitu

$$S(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\theta}) = exp[-y^{\gamma} \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x}]]. \qquad (26)$$

Berdasarkan persamaan 6 dan 24 diperoleh model regresi *hazard* Weibull yaitu

$$h(y) = \gamma y^{\gamma-1} exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x}]. \qquad (27)$$

dan berdasarkan persamaan 2 dan 24 didapat FKP yang memuat parameter regresi yaitu

$$f(y, \theta) = \gamma y^{\gamma-1} exp[-\gamma \exp[\boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x}]] \times \exp[-y^{\gamma} \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x}]]. \qquad (28)$$

dengan $\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta_0 & \beta_1 & \ldots & \beta_p \end{bmatrix}^T$ adalah vektor berdimensi *p+2*. (Suyitno, 2017)

Penaksiran Parameter Model Regresi Weibull Univariat

Penaksiran parameter model RWU terdiri dari penaksiran parameter-parameter model regresi Weibull untuk *mean* $\mu_Y(\boldsymbol{\theta}, \text{x})$ yang diberikan oleh persamaan 25, model regresi *survival* Weibull $S(y, \boldsymbol{\theta})$ dan model regresi *hazard* Weibull $h(y)$ yang diberikan oleh persamaan 26 dan 27 menggunakan penaksir ML untuk mendefinisikan fungsi *likelihood*.

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

Misalkan diberikan data sampel berukuran n yaitu $(y_i, \delta_i, \mathbf{x}_i)$, $y_i, i = 1, 2, \cdots, n$ adalah sampel acak yang independen berdistribusi identik. $W(\gamma, \exp[\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i]$ $\quad \boldsymbol{x_i} = [X_0 \quad X_{1i} \quad X_{1i} \quad \cdots \quad X_{pi}]^T$ dan δ_i adalah status, dimana $\delta_i = 1$ jika $y_i \le y^*$ dan $\delta_i = 0$ jika $y_i > y^*$, y^* adalah bilangan riil positif yang diketahui. Peluang individu ke-i dengan $y_i < y^*$ adalah $P(y_i) = f(y_i)$, dan peluang $y_i > y^*$ adalah $S(y_i)$. Berdasarkan FKP yang diberikan persamaan 28 fungsi likelihood didefinisikan sebagai

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i)^{\delta_i} (S(y_i))^{1-\delta_i}$$
$$= \prod_{i=1}^{n} h(y_i)^{\delta_i} S(y_i) \tag{29}$$

dengan $\boldsymbol{\theta} = [\gamma \quad \beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_p]^T$.

Penaksir ML $(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ yang memaksimumkan fungsi *likelihood* pada persamaan 29 juga memaksimumkan fungsi *log-likelihood*. Berdasarkan persamaan 26, 27, 28 dan 29 fungsi *log-likelihood* adalah

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \delta_i \left[(\ln\gamma)(\gamma-1)\ln(y_i)\right]\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}\left[(\gamma\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{x_i}) - y_i^{\gamma}\exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{x_i}]\right]\right) \tag{30}$$

Penaksir ML $(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ diperoleh dengan memaksimumkan fungsi *log-likelihood* yaitu dengan menyelesaikan persamaan *likelihood* yang diberikan oleh

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0, \tag{31}$$

dimana **0** adalah vektor nol yang berdimensi p+2. Ruas kanan pada persamaan 31 adalah vektor gradien. Vektor gradien dapat dinyatakan dalam bentuk umum yaitu

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma} & \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_0} & \cdots & \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_p} \end{bmatrix}^T. \tag{32}$$

Komponen-komponen vektor gradien berturut-turut dinyatakan dalam bentuk umum yaitu

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^{n}\left(\delta_i\left[\frac{1}{\gamma} + \ln(y_i) - \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{x_i}\right]\right) + \sum_{i=1}^{n}\left([\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{x_i} - \ln(y_i)]y_i^{\gamma} exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{x_i}]\right), \tag{33}$$

dan

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_k} = \sum_{i=1}^{n}(-\delta_i\gamma X_{ki}) + \sum_{i=1}^{n}\left(y_i^{\gamma}\exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{x_i}]\right), \tag{34}$$

k = 0,1,2,…,p. Diketahui bahwa komponen-komponen vektor gradien tidak dapat diselesaikan secara eksak untuk mendapatkan penaksir ML. Metode alternatif yang dapat digunakan adalah iteratif Newton-Raphson.

Penerapan ML menggunakan metode iteratif Newton-Raphson diperlukan perhitungan vektor gradien dan matriks Hessian. Vektor gradien diberikan oleh persamaan 32, sedangkan matriks Hessian adalah matriks yang elemen-elemennya turunan orde kedua dari fungsi *log-likelihood* yang didefinisikan sebagai berikut

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma^2} & \frac{\partial^2 \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma \partial \beta_0} & \cdots & \frac{\partial^2 \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma \partial \beta_p} \\ \frac{\partial^2 \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_0 \partial \gamma} & \frac{\partial^2 \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_0^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_0 \partial \beta_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_p \partial \gamma} & \frac{\partial^2 \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_p \partial \beta_0} & \cdots & \frac{\partial^2 \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_p^2} \end{bmatrix}. \tag{35}$$

Berdasarkan persamaan 33 dan 34, elemen-elemen diagonal utama matriks Hessian dapat dinyatakan dalam bentuk umum yaitu

$$\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\delta_i}{\gamma^2} + [\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{x_i} - \ln(y_i)]^2 y_i^{\gamma}\exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{x_i}]\right), \tag{36}$$

$$\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_k^2} = \sum_{i=1}^{n}(-\delta_i\gamma^2 y_i^{\gamma}(X_{ki})^2\exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{x_i}], \tag{37}$$

dan elemen-elemen non diagonal dinyatakan dalam bentuk umum yaitu

$$\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_k \partial \beta_t} = \sum_{i=1}^{n}(-\delta_i\gamma^2 X_{ki}X_{ti}y_i^2\exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{x_i}] \tag{38}$$

$t, k = 0, 1, 2, ..., p$ dan $t \neq k$.

Berdasarkan hasil perhitungan vektor gradien pada persamaan 32 dan matriks Hessian pada persamaan 35 dengan elemen-elemen matriks berturut-turut pada persamaan 35, 36, 37, dan 38 penaksir parameter model RWU dapat dicari menggunakan algoritma iterasi Newton-Raphson yaitu (Khuri, 2003)

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(m+1)} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(m)} - [\boldsymbol{H}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(m)})]^{-1}\boldsymbol{g}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(m)}) \tag{39}$$

Langkah-langkah iterasi Newton-Raphson sebagai berikut

1. Menentukan nilai awal parameter
$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)} = \begin{bmatrix}\gamma^{(0)} & \beta_0^{(0)} & \beta_1^{(0)} & \cdots & \beta_p^{(0)}\end{bmatrix} \tag{40}$$
2. Menghitung iterasi $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(1)}$ dan seterusnya.
3. Menjalankan iterasi Newton-Raphson hingga konvergen $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(m+1)} \cong \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(m)}; \left\|\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(m+1)} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(m)}\right\| \le \varepsilon; \varepsilon$ merupakan bilangan riil positif kecil 10^{-12}.

Berdasarkan matriks Hessian pada persamaan 35 diperoleh informasi matriks informasi Fisher sebagai berikut (Hosmer, 2008)

$$[\boldsymbol{I_f}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I_{11}}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) & \boldsymbol{I_{12}}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) \\ \boldsymbol{I_{21}}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) & \boldsymbol{I_{22}}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) \end{bmatrix} \tag{41}$$

Pengujian Hipotesis Parameter RWU Secara Serentak

Bertujuan untuk mengetahui apakah parameter-parameter yang telah ditaksir sudah memberikan model regresi yang layak digunakan atau belum. Hipotesis pengujian adalah

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_p = 0$ (model RWU tidak layak digunakan)

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

$H_1: minimal\ ada\ satu\ \beta_k \neq 0; k = 1,2,\ldots,p$ (model RWU layak digunakan)

Statistik uji yang digunakan adalah statistik Wilk's *likelihood ratio* (G) adalah

$$G = 2(L(\hat{\boldsymbol{\beta}}) - L(\hat{\beta}_0)). \quad (42)$$

Statistik uji pada persamaan 42 dapat dihampiri oleh

$$G \approx \hat{\boldsymbol{\beta}}^T [\boldsymbol{I}_{22}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1} \hat{\boldsymbol{\beta}} \quad (43)$$

Dimana $G \sim \chi^2_p$ dengan $\hat{\boldsymbol{\beta}} = [\hat{\beta}_1 \quad \hat{\beta}_2 \quad \cdots \quad \hat{\beta}_p]^T$ dan $[\mathbf{I}_{22}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]$ adalah partisi matriks invers informasi Fisher. H_0 ditolak pada taraf signifikansi α jika nilai $G > \chi^2_{(\alpha,p)}$ atau $P_{value} < \alpha$ dimana $P_{val} = P(G_v > G)$, G_v adalah peubah acak berdistribusi $\chi^2_{(\alpha,p)}$. (Pawitan, 2001)

Pengujian Hipotesis Parameter RWU Secara Parsial

Bertujuan untuk mengetahui apakah variabel bebas tertentu secara individual berpengaruh terhadap model regresi. Hipotesis untuk bentuk parameter $\beta_k; k = 0,1,2,\ldots,p$ adalah

$H_0: \beta_k = 0$ (Variabel bebas X_k tidak berpengaruh terhadap model RWU)

$H_1: \beta_k \neq 0$ (Variabel bebas X_k berpengaruh terhadap model RWU)

Statistik uji yang digunakan adalah kuadrat statistik Wald sebagai berikut

$$W_0^2 = \frac{\hat{\beta}_k^2}{var(\hat{\beta}_k)}. \quad (44)$$

Dengan $W_0^2 \sim \chi^2_1$ dan $var(\hat{\beta}_k)$ adalah elemen diagonal utama ke $k+1$ dari invers matriks Fisher. H_0 ditolak pada taraf signifikansi α jika nilai $W_0^2 > \chi^2_{(1-\alpha)}$. (Pawitan, 2001)

Interpretasi Model Regresi Weibull Univariat (RWU)

Interpretasi model RWU diperoleh melalui perhitungan rasio. *Hazard ratio* (HR) adalah ukuran yang digunakan untuk mengetahui tingkat resiko yang dilihat dari perbandingan antar individu dengan variabel bebas *X*. Nilai HR untuk regresi Weibull variabel bebas kontinu dinyatakan dalam persamaan berikut

$$HR = \frac{h(y,x|X_k+1)}{h(y,x)} = \exp(\hat{\beta}). \quad (45)$$

Berdasarkan persamaan 25 dan 45 rasio regresi Weibull untuk *mean* adalah

$$R\mu_{Xk} = \frac{\exp[\hat{\beta}_k(X_k+1)]}{\exp[\hat{\beta}_k X_k]} = \exp(\hat{\beta}_k) \quad (46)$$

Berdasarkan persamaan 26 dan 45 rasio regresi *survival* Weibull adalah

$$RS_{X_k} = \frac{S(y|X_k+1)}{S(y)}. \quad (47)$$

Berdasarkan persamaan 27 dan 45 rasio regresi *hazard* Weibull adalah

$$Rh_{X_k} = \frac{\exp[\beta_k(X_k+1)]}{\exp[\beta_k X_k]}. \quad (48)$$

Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh Ulfah, faktor-faktor yang diduga mempengaruhi indikator pencemaran air BOD pada daerah aliran sungai mahakam antara lain faktor suhu, pH atau derajat keasaman, *total dissolved solid* (TDS), konsentrasi amonia dan debit air.

Hasil dan Pembahasan

Deskripsi data dinyatakan dalam statistik deskriptif yang meliputi nilai rata-rata, standar deviasi, nilai maksimum dan nilai minimum. Perhitungan statistik deskriptif disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Statistik Deskriptif Variabel Bebas

Variabel	*Mean*	Deviasi Standar	Min	Max
BOD	4,8767	3,9914	1,2	13,66
Suhu	28,933	1,999	23,6	34
pH	7,0711	0,977	5,1	9,2
TDS	102,04	61,739	16	236,5
Amonia	0,462	0,6923	0,008	3,14
Debit Air	395,11	615,97	10	2030

Berdasarkan hasil perhitungan pada Tabel 1, diperoleh nilai rata-rata BOD sebesar 4,8767 mg/l artinya air sungai Mahakam di indikasikan tercemar karena nilai rata-rata BOD berada di atas ambang batas baku yaitu 2 mg/l.

Penaksiran Parameter Distribusi Weibull Univariat

Penaksiran parameter distribusi Weibull univariat dilakukan menggunakan metode MLE yang diselesaikan dengan metode iteratif Newton-Raphson. Hasil perhitungan disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Parameter Distribusi Weibull Univariat

Parameter	Taksiran
Skala *(λ)*	7,7546
Bentuk *(γ)*	1,5321

Berdasarkan hasil penaksiran parameter pada Tabel 2, diperoleh persamaan fungsi *survival* dari persamaan 3 adalah

$$\hat{S}(y) = exp\left[-\left(\frac{y}{7,7546}\right)^{1,5321}\right] \quad (49)$$

dan dari persamaan 4 fungsi distribusi kumulatif adalah

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

$$\hat{F}(y) = 1 - exp\left[-\left(\frac{y}{7{,}7546}\right)^{1{,}5321}\right] \quad (50)$$

Pengujian Distribusi

Pengujian distribusi dilakukan untuk mengetahui apakah data BOD berdistribusi Weibull dengan fungsi distribusi $\hat{F}(y)$. Hipotesis pengujian distribusi adalah

$H_0: F(y) = \hat{F}(y)$ (data variabel BOD berdistribusi Weibull dengan fungsi distribusi $\hat{F}(y)$ diberikan oleh persamaan 50)

$H_1: F(y) \neq \hat{F}(y)$ (data variabel BOD tidak berdistribusi Weibull)

Statistik uji diberikan oleh persamaan 22 dan hasil perhitungan disajikan pada Tabel 3.

Tabel 3. Pengujian Distribusi Weibull Variabel BOD

Statistik Uji (D)	$D_{(0,05)}$	Keputusan
0,2058	0,430	Menerima H_0

Berdasarkan hasil perhitungan pada Tabel 3, diketahui nilai D=0,2058 < $D_{(0,05)}$ = 0,430 diputuskan menerima H_0. Dapat disimpulkan bahwa data variabel BOD berdistribusi Weibull dengan fungsi distribusi $\hat{F}(y)$.

Pendeteksian Multikolinearitas

Pendeteksian multikolinearitas dilihat dari besarnya nilai VIF tiap variabel. Nilai VIF > 10 menunjukkan adanya multikolinearitas antar variabel bebas. Nilai VIF tiap variabel disajikan pada Tabel 4.

Tabel 4. Nilai VIF Setiap Variabel Bebas

Variabel	VIF
Suhu	1,094
pH	1,527
TDS	1,662
Amonia	1,330
Debit Air	1,130

Berdasarkan nilai VIF pada Tabel 4, nilai VIF < 10 untuk tiap variabel bebas artinya tidak terjadi multikolinearitas antar variabel bebas.

Penaksiran Parameter Model Regresi Weibull Univariat

Penaksiran parameter RWU dilakukan menggunakan metode MLE yang diselesaikan dengan metode alternatif 128 terative Newton-Raphson. Hasil penaksiran parameter RWU disajikan pada Tabel 5.

Berdasarkan hasil perhitungan pada Tabel 5, diperoleh model-model regresi Weibull yaitu Model regresi *survival* Weibull berdasarkan persamaan 26 adalah

$$\hat{S}(y) = \exp\left[-y^{1{,}2905}\exp\left[14.4792 - 0{,}3736X_1 - 1{,}1444X_2 + 0{,}0165X_3 - 2{,}2000X_4 + 0{,}0010X_5\right]\right] \quad (51)$$

Tabel 5. Penaksiran Parameter Model RWU

Parameter	Taksiran
γ	1,2905
β_0	-11,2198
β_1	0,2895
β_2	0,8868
β_3	-0,0128
β_4	1,7048
β_5	-0,0008

Berdasarkan hasil perhitungan pada Tabel 5, diperoleh model-model regresi Weibull yaitu Model regresi *survival* Weibull berdasarkan persamaan 26 adalah

$$\hat{S}(y) = \exp\left[-y^{1{,}2905}\exp\left[14.4792 - 0{,}3736X_1 - 1{,}1444X_2 + 0{,}0165X_3 - 2{,}2000X_4 + 0{,}0010X_5\right]\right] \quad (51)$$

Model regresi *hazard* Weibull berdasarkan persamaan 27 adalah

$$\hat{h}(y) = 1{,}2905y^{0{,}2905}\exp\left[14{,}4792 - 0{,}3736X_1 - 1{,}1444X_2 + 0{,}0615X_3 - 2{,}2000X_4 + 0{,}0010X_5\right]\right] . \quad (52)$$

Model regresi Weibull untuk *mean* berdasarkan persamaan 25 adalah

$$\hat{\mu}(y) = 0{,}92496\exp\left[-11{,}2198 + 0{,}2895X_1 + 0{,}8868X_2 - 0{,}0128X_3 + 1{,}7084X_4 - 0{,}0008X_5\right]. \quad (53)$$

Pengujian Parameter RWU Secara Serentak

Hipotesis pengujian parameter regresi secara serentak adalah

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$ (Model RWU tidak layak)

H_1 : minimal satu $\beta_k \neq 0; k = 1,2,3,4,5$ (Model RWU layak)

Statistik uji diberikan oleh persamaan 44 dan hasil pengujian parameter RWU secara serentak dapat dilihat pada Tabel 6.

Tabel 6. Pengujian Parameter RWU Secara Serentak

G	$\chi^2_{(5;0,05)}$	P_{value}	Keputusan
17,7858	11,0705	0,0032	Menolak H_0

Berdasarkan hasil perhitungan pada Tabel 6, diputuskan menolak H_0 dengan nilai P_{value} = 0,0032 < 0,05 artinya model RWU layak digunakan.

Pengujian Parameter RWU Secara Parsial

Bertujuan untuk mengetahui apakah setiap variabel bebas secara individu berpengaruh

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

terhadap model regresi. Hipotesis pengujian untuk $k = 0,1,2,3,4,5$ adalah

$H_0 : \beta_k = 0$ (Variabel bebas X_k tidak berpengaruh terhadap model RWU)

$H_1 : \beta_k \neq 0$ (Variabel bebas X_k berpengaruh terhadap model RWU)

Statistik uji diberikan oleh persamaan 46 dan hasil perhitungan disajikan pada Tabel 7.

Tabel 7. Pengujian Parameter RWU Secara Parsial

Koefisien	W_0	$Z_{0,975}$	P_{value}	Keputusan
β_0	2,3804	1,96	0,0173	Menolak H_0
β_1	1,9204		0,0548	Gagal menolak H_0
β_2	2,5966		0,0094	Menolak H_0
β_3	2,1798		0,0293	Menolak H_0
β_4	1,7662		0,0293	Gagal menolak H_0
β_5	1,9996		0,0455	Menolak H_0

Berdasarkan hasil perhitungan pada Tabel 7, variabel yang berpengaruh terhadap model RWU adalah variabel pH (X_2), TDS (X_3) dan debit air (X_5).

Interpretasi Model RWU Data BOD

Interpretasi model RWU data BOD menggunakan hasil perhitungan rasio regresi *survival* Weibull dan rasio regresi *hazard* Weibull berdasarkan variabel bebas yang berpengaruh yaitu pH, TDS dan debit air.

Sebagai contoh rasio regresi survival weibull di lokasi pengamatan kedang kepal hilir berdasarkan variabel bebas yang berpengaruh adalah sebagai berikut :

Rasio regresi *survival* weibull berdasarkan variabel pH (X_2) diperoleh dari persamaan 48 adalah

$$RS_{X_2} = \frac{\hat{S}(y|X_2+1)}{\hat{S}(y)} = \frac{\exp\left[-1{,}4^{1{,}2905}x(-5{,}8526)\right]}{\exp\left[-1{,}4^{1{,}2905}x(-2{,}7415)\right]} = 1{,}4791$$

Berdasarkan nilai rasio regresi *survival*, setiap kenaikan 1 satuan pH dan nilai variabel bebas lainnya tetap, peluang air sungai Mahakam di lokasi kedang kepal hilir tidak tercemar meningkat menjadi 1,4791 kali.

Rasio regresi *survival* weibull berdasarkan variabel TDS (X_3) diperoleh dari persamaan 48 adalah

$$RS_{X_3} = \frac{\hat{S}(y|X_3+1)}{\hat{S}(y)} = \frac{\exp\left[-1{,}4^{1{,}2905}x\ 3{,}4195\right]}{\exp\left[-1{,}4^{1{,}2905}x(-2{,}7415)\right]} = 0{,}9905$$

Berdasarkan nilai rasio regresi *survival*, setiap kenaikan 1 satuan TDS dan nilai variabel bebas lainnya tetap, peluang air sungai Mahakam di lokasi kedang kepal hilir tidak tercemar meningkat menjadi 0,9905 kali.

Rasio regresi *survival* weibull berdasarkan variabel debit air (X_5) diperoleh dari persamaan 48 adalah

$$RS_{X_5} = \frac{\hat{S}(y|X_5+1)}{\hat{S}(y)} = \frac{\exp\left[-1{,}4^{1{,}2905}x\ (-2{,}73881)\right]}{\exp\left[-1{,}4^{1{,}2905}x(-1{,}00855)\right]} = 0{,}9994$$

Berdasarkan nilai rasio regresi *survival*, setiap kenaikan 1 satuan debit air dan nilai variabel bebas lainnya tetap, peluang air sungai Mahakam di lokasi kedang kepal hilir tidak tercemar meningkat menjadi 0,9994 kali.

Rasio regresi hazard weibull berdasarkan variabel pH diperoleh dari persamaan 49 adalah

$$Rh_{X_2} = \exp[-\hat{\gamma}\beta_2] = \exp(-1{,}2905x0{,}8868) = 0{,}3184$$

dan interpretasinya setiap kenaikan 1 satuan pH dan nilai variabel bebas lainnya tetap, laju (*rate*) air sungai Mahakam tercemar menurun menjadi 0,3184 kali.

Rasio regresi *hazard* weibull berdasarkan variabel TDS diperoleh dari persamaan 49 adalah

$$Rh_{X_3} = \exp[-\hat{\gamma}\beta_3] = \exp\big(-1{,}2905x(-0{,}0128)\big) = 1{,}0167$$

dan interpretasinya setiap kenaikan 1 satuan TDS, laju (rate) air sungai Mahakam tercemar meningkat menjadi 1,0167 kali.

Rasio regresi *hazard* weibull berdasarkan variabel debit air diperoleh dari persamaan 49 adalah

$$Rh_{X_5} = \exp[-\hat{\gamma}\beta_5] = \exp(-1{,}2905x0{,}0010) = 1{,}0010$$

dan interpretasinya setiap kenaikan 1 satuan debit air dan nilai variabel bebas lainnya tetap, laju (*rate*) air sungai Mahakam tidak tercemar meningkat menjadi 1,0010 kali.

Rasio regresi untuk *mean* berdasarkan variabel pH diperloeh dari persamaan 47 adalah

$$R\mu_{X_2} = \exp\big(\hat{\beta}_2\big) = 2{,}4274$$

Dan interpretasinya setiap kenaikan 1 satuan pH dan nilai variabel bebas lainnya tetap akan meningkatkan rata-rata BOD menjadi 2,4274 kali.

Rasio regresi untuk *mean* berdasarkan variabel TDS diperoleh dari persamaan 47 adalah

$$R\mu_{X_3} = \exp\big(\hat{\beta}_3\big) = 0{,}9872$$

dan interpretasinya setiap kenaikan 1 satuan TDS dan nilai variabel bebas lainnya tetap akan menurunkan rata-rata BOD menjadi 0,9872 kali.

Rasio regresi untuk *mean* berdasarkan variabel debit air diperoleh dari persamaan 47 adalah

$$R\mu_{X_5} = \exp\big(\hat{\beta}_5\big) = 0{,}9992$$

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

dan interpretasinya setiap kenaikan 1 satuan debit air dan nilai variabel bebas lainnya tetap akan menurunkan rata-rata BOD air sungai Mahakam menjadi 0,9992 kali.

Kesimpulan

1. Berdasarkan hasil penaksiran parameter model RWU pada data BOD diperoleh model regresi *survival* Weibull adalah
   $\hat{S}(y) = \exp\,[-y^{1,2905}\exp\,[14.4792 - 0,3736X_1 - 1,1444X_2 + 0,0165X_3 - 2,2000X_4 + 0,0010X_5]].$
   Model regresi *hazard* Weibull adalah
   $\hat{h}(y) = 1,2905y^{0,2905}\exp\,[14,4792 - 0,3736X_1 - 1,1444X_2 + 0,0615X_3 - 2,2000X_4 + 0,0010X_5].$
   Model regresi untuk *mean* adalah
   $\hat{\mu}(y) = 0,92496\exp\,[-11,2198 + 0,2895X_1 + 0,8868X_2 - 0,0128X_3 + 1,7084X_4 - 0,0008X_5].$
2. Faktor-faktor yang berpengaruh terhadap model regresi Weibull pada data BOD adalah variabel pH (X_2), TDS (X_3) dan debit air (X_5).
3. Berdasarkan nilai rasio pada regresi *survival*, setiap kenaikan 1 satuan pH dan nilai variabel bebas lainnya tetap akan meningkatkan peluang air sungai mahakam tidak tercemar menjadi 1,4791 kali. Berdasarkan nilai rasio regresi *hazard* setiap kenaikan 1 satuan pH, laju (*rate*) air sungai Mahakam tercemar menurun menjadi 0,3184 kali. Berdasarkan nilai rasio regresi *mean* setiap kenaikan 1 satuan pH akan meningkatkan rata-rata BOD menjadi 2,4274 kali. Berdasarkan nilai rasio regresi *survival*, setiap kenaikan 1 mg/l TDS dan nilai variabel bebas lainnya tetap akan meningkatkan peluang air sungai Mahakam tercemar menjadi 0,9905 kali. Berdasarkan nilai rasio regresi *hazard* setiap kenaikan 1 mg/l TDS, laju (*rate*) air sungai Mahakam tidak tercemar meningkat menjadi 1,0167 kali. Berdasarkan nilai rasio regresi untuk *mean*, setiap kenaikan 1 mg/l TDS akan menurunkan rata-rata BOD menjadi 0,9872 kali. Berdasarkan nilai rasio regresi *survival*, setiap kenaikan 1 m^3/s debit air dan nilai variabel bebas lainnya tetap akan meningkatkan peluang air sungai Mahakam tidak tercemar menjadi 0,9994 kali. Berdasarkan nilai rasio regresi *hazard*, setiap kenaikan 1 m^3/s debit air maka laju (*rate*) air sungai Mahakam tidak tercemar meningkat menjadi 1,0010 kali. Berdasarkan nilai rasio regresi untuk *mean*, setiap kenaikan 1 m^3/s debit air akan menurunkan rata-rata BOD menjadi 0,9992 kali.

Daftar Pustaka

Hanagal, D.D. (2004). *Parametric Bivariat Regression Analysis Based on Censored Samples: A Weibull Model*. Econometric Quality Control, 19(1).

Hanagal, D.D (2005). *Bivariate Weibull Regression Model*. Economic Quality Control, 20(1).

Hosmer, D.W, Lemeshow,S & May, S. (2008). *Applied Survival Analysis Regression Modelling of Time-to-Event Data 2nd Edition*. New Jersey: John Wiley & Sons.

Khuri, A.I. (2003). *Advanced Calculus with Application in Statistics 2nd Edition*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., Hoboken.

Lawless, J.F. (2003). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data 2nd Edition*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., Hoboken.

Mufidah, S.A., & Purhadi. (2016). *Analisis Survival Pada Pasien Demam Berdarah Dengue (DBD) di RSU Haji Surabaya Menggunakan Model Regresi Weibull*. Jurnal Sains dan Seni ITS, 5(2).

Pawitan, Y. (2001). *In All Likelihood Statistical Modelling and Inference Using Likelihood*. Sweden: Clarendon Press-Oxford.

Rencher, A.C., & Schaalje, G.B. (2008). *Linier Models in Statistics:Second Edition*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., Hoboken.

Rinne, H. (2009). *The Weibull Distribution A Handbook*. New York: CRC Press Taylor and Francis Group.

Suliyanto, Dr. (2014). *Statistika Non Parametrik (Dalam Aplikasi Penelitian).* Yogyakarta:CV. Andi Offset.

Suyitno. (2017). *Penaksiran Parameter dan Pengujian Hipotesis Model Regresi Weibull Univariat*. Jurnal Eksponensial, 8(2), Nopember 2017.