Jurnal EKSPONENSIAL Volume **13**, *Nomor* **2**, *Nopember* **2022**

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

Model *Geographically Weighted Weibull Regression* Pada Indikator Pencemaran Air COD di Daerah Aliran Sungai Mahakam Kalimantan Timur

Geographically Weighted Weibull Regression Model on COD Water Pollution Indicators in Watershed of Mahakam River East Kalimantan

Ullimaz Sam Primadigna[1], Suyitno[2], Meiliyani Siringoringo[3]

[1,2] Laboratorium Statistika Terapan FMIPA Universitas Mulawarman

[3]Laboratorium Statistika Ekonomi dan Bisnis FMIPA Universitas Mulawarman

E-mail: [1]usprimadigna@gmail.com

ABSTRACT

The Geographically Weighted Weibull Regression (GWWR) model is a Weibull regression model applied to spatial data. Parameter estimation is carried out at each observation location using spatial weighting. This study aimed to determine the GWWR model on the Chemical Oxygen Demand (COD) water pollution indicator data and to obtain the factors that influence COD in the Mahakam watershed. The parameter estimation method was Maximum Likelihood Estimation (MLE). Spatial weighting in parameter estimation has been determined using the adaptive tricube weighting function and the criteria for determining the optimum bandwidth was Generalized Cross-Validation (GCV). The research sample was 20 location points of the Mahakam river determined by the Environmental Department of East Kalimantan Province. The results showed that the factors that influence COD locally was temperature, while the factors that influence globally were temperature, Total Suspended Solids (TSS), and Fecal Coli.

Keywords: *Adaptive Tricube, COD, GCV, GWWR*, *Mahakam River*

Pendahuluan

Distribusi Weibull adalah salah satu distribusi yang banyak diaplikasikan dalam teori keandalan dan analisis data uji hidup. Distribusi ini dapat memodelkan data waktu kegagalan pada sampel kecil dengan akurasi tinggi. Distribusi ini diperkenalkan oleh Waloddi Weibull pada tahun 1939 (Otaya, 2016).

Pembahasan distribusi Weibull pada umumnya terbatas pada estimasi parameter dan pengujian distribusi data respon. Data respon di lapangan pada umumnya dipengaruhi oleh faktor lain (faktor eksternal), sehingga perlu pengembangan model distribusi. Pengembangan dari distribusi Weibull dimana parameter skala dinyatakan dalam parameter regresi dinamakan regresi Weibull (Lawless, 2003).

Data lingkungan seperti indikator COD pada umumnya berdistribusi Weibull dan seringkali berupa data spasial karena COD di setiap lokasi berbeda-beda (heterogenitas spasial). Lingkungan daerah aliran sungai pada setiap pengamatan akan mempengaruhi nilai data COD.

Pemodelan regresi Weibull data spasial kurang cocok menggunakan model regresi Weibull biasa (global) dikarenakan lokasi geografis setiap pengamatan berbeda-beda, oleh karena itu yang sesuai adalah model GWR. Model GWR dari regresi Weibull dinamakan *Geographically Weighted Weibull Regression* (GWWR).

Model-model GWWR yang dibahas pada penelitian ini adalah model GWWR *survival* Weibull, hazard Weibull dan model *mean* Weibull. Melalui model GWWR survival Weibull dapat ditemukan model peluang air sungai Mahakam tercemar pada setiap lokasi dan melalui pemodelan hazard Weibull dapat dimodelkan laju air sungai Mahakam tidak tercemar serta melalui model *mean* Weibull dapat dihitung prediksi rata-rata COD pada setiap lokasi pengamatan.

Model GWWR pada penelitian diaplikasikan pada data COD di sungai Mahakam dengan tujuan memperoleh model GWWR dan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap peluang meningkatnya COD. Informasi ini berguna bagi masyarakat dan pemerintah agar dapat berkontribusi dan membuat kebijakan dalam pencegahan pencemaran air sungai.

Distribusi Weibull

Fungsi Kepadatan Peluang (FKP) suatu variabel acak kontinu non-negatif Y berdistribusi Weibull dengan tiga parameter adalah

$$f(y) = \frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{y-\delta}{\lambda}\right)^{\gamma-1} \exp\left[-\left(\frac{y-\delta}{\lambda}\right)^{\gamma}\right] \quad (1)$$

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

dengan $y > \delta, 0 < \lambda, \gamma, \delta < \infty$, dimana γ adalah parameter bentuk (*shape*),λadalah parameter skala (*scale*) dan δadalah parameter lokasi (*location*) (Rinne, 2009).

Bentuk khusus distribusi Weibull dengan dua parameter adalah distribusi Weibull versi skala-bentuk (*scale-shape*), dengan FKP dinyatakan dalam persamaan berikut

$$f(y) = \frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma-1} \exp\left[-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma}\right]. \quad (2)$$

Fungsi *survival* distribusi Weibull versi skala-bentuk diberikan oleh

$$S(y) = P(Y > y) = \exp\left[-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma}\right], \quad (3)$$

dan fungsi distribusi kumulatif didefinisikan oleh

$$F(y) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma}\right]. \quad (4)$$

FKP diberikan oleh persamaan (2) dapat diperoleh dari fungsi *survival* (3) dan fungsi distribusi kumulatif melalui hubungan

$$f(y) = \frac{dF(y)}{dy} = -\frac{dS(y)}{dy}.$$

Berdasarkan FKP yang diberikan oleh persamaan (2) dan fungsi *survival* pada persamaan (3) maka dapat diperoleh persamaan fungsi hazard yaitu

$$h(y) = \gamma\lambda^{-\gamma}y^{\gamma-1} \quad (5)$$

dan persamaan fungsi *Mean* adalah

$$\mu_Y = E(Y) = \lambda\Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right). \quad (6)$$

Penaksiran distribusi Weibull menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Penaksir ML eksak tidak dapat ditemukan secara analitikal. Berdasarkan persamaan *likelihood,* hampiran penaksir ML ditentukan menggunakan metode iterasi Newton-Raphson (Suyitno, 2017).

Model Regresi Weibull

Model Regresi Weibull (RW) adalah model regresi yang dikembangkan dari distribusi Weibull. Sebagai pengembangan distribusi Weibull, parameter skala (λ) dapat dinyatakan dalam fungsi kovariat atau fungsi dari parameter regresi. Diketahui parameter skala adalah bilangan riil positif, sehingga dapat dinyatakan dalam hubungan

$$\lambda = \exp[\,\beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_p X_p]$$

$$\text{atau } \lambda = \exp[\,\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}] \quad (7)$$

dengan $\boldsymbol{\beta}^T = [\beta_0\; \beta_1 \cdots \beta_p]$ adalah vektor parameter regresi berdimensi p+1 dan untuk $\mathbf{x} = [X_0\; X_1 \ldots X_p]^T$ adalah variabel prediktor dengan $X_0 = 1$. Model-model regresi Weibull dapat diperoleh dari persamaan (3), (5), dan (6) dengan parameter skala dinyatakan dalam parameter regresi yang didefinisikan oleh persamaan (7), sehingga diperoleh model regresi *mean* sebagai berikut,

$$\mu_y(\boldsymbol{\varphi}, x) = \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right)\exp\left[\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}\right], \quad (8)$$

model regresi *survival* adalah

$$S(y, \boldsymbol{\varphi}) = \exp[-y^{\gamma}\exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}]\,], \quad (9)$$

dan model regresi hazard Weibull adalah

$$h(y, \boldsymbol{\varphi}) = \gamma y^{\gamma-1}\exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}]. \quad (10)$$

Berdasarkan persamaan (7), FKP yang diberikan oleh persamaan (2) yang memuat kovariat didefinisikan sebagai berikut (Suyitno, 2017)

$$f(y, \boldsymbol{\varphi}) = \gamma y^{\gamma-1}\left(\exp\left[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}\right]\right)$$
$$\times (\exp[-y^{\gamma}\exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}]\,]). \quad (11)$$

Penaksiran parameter model regresi Weibull menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Berdasarkan FKP yang diberikan oleh persamaan (11), fungsi *likelihood* didefinisikan oleh

$$L(\boldsymbol{\varphi}) = \prod_{i=1}^{n}(\gamma y_i{}^{\gamma-1}(\exp[\,-\gamma\exp[\,\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}]]) \times$$
$$(\exp[\,-y_i{}^{\gamma}\exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}]]) \quad (12)$$

Penaksir ML model regresi Weibull yang memaksimumkan fungsi *likelihood* $L(\boldsymbol{\varphi})$ sulit diperoleh berdasarkan fungsi *likelihood*. Penaksir ML dapat diperoleh dengan memaksimumkan fungsi logaritma natural dari fungsi *likelihood* $L(\boldsymbol{\varphi})$ atau disebut dengan fungsi *log-likelihood*. Fungsi *log-likelihood* berdasarkan fungsi *likelihood* pada persamaan (12) adalah

$$l(\boldsymbol{\varphi}) = \sum_{i=1}^{n}(\ln\gamma + (\gamma-1)\ln\, y_i - \gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i) -$$
$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i^{\gamma}\,exp\,[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i]\right). \quad (13)$$

Penaksir ML diperoleh dengan menyelesaikan persamaan *likelihood* yang diberikan oleh

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{0}, \quad (14)$$

dengan **0** adalah vektor nol berdimensi p+2, sedangkan ruas kiri adalah vektor gradien $g(\boldsymbol{\varphi})$ berdimensi p+2, yang didefinisikan oleh

$$g(\boldsymbol{\varphi}) = \left[\frac{\partial l(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\gamma}\;\frac{\partial l(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\beta_0}\;\frac{\partial l(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\beta_1}\cdots\frac{\partial l(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\beta_p}\right]^T \quad (15)$$

Diketahui bahwa komponen-komponen vektor gradien pada persamaan (15) terdiri persamaan-persamaan nonlinier yang saling bergantungan, sehingga solusi eksak untuk mendapatkan penaksir eksak ML tidak dapat ditemukan secara analitis. Metode alternatif dalam menyelesaikan persamaan (14) untuk mendapatkan penaksir ML adalah metode iteratif Newton-Raphson (Suyitno, 2017).

Pengujian parameter dilakukan melalui uji hipotesis yang mana dibedakan menjadi dua yaitu uji serentak dan parsial. Pengujian ini dilakukan sebagai alat pengambil keputusan. Hipotesis pengujian parameter regresi secara serentak adalah sebagai berikut

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_p = 0$

$H_1 : \beta_k \neq 0$, untuk k=1,2,…, p

Statistik uji yang diberikan oleh

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

$$G = \widehat{\mathbf{B}}^T[\mathbf{I}_{22}(\widehat{\mathbf{B}})]^{-1}\widehat{\mathbf{B}} \qquad (16)$$

dengan $\widehat{\mathbf{B}} = [\hat{\beta}_1\ \hat{\beta}_2 \cdots \hat{\beta}_p]^T$ dan $[\mathbf{I}_{22}(\widehat{\mathbf{B}})]^{-1}$ merupakan invers matriks informasi Fisher. Matriks informasi Fisher dapat dinyatakan dengan

$$[\mathbf{I}(\widehat{\boldsymbol{\varphi}})] = -[\mathbf{H}(\widehat{\boldsymbol{\varphi}})]\,. \qquad (17)$$

Daerah kritis pengujian hipotesis ini adalah menolak H_0 pada taraf uji α jika $G > \chi^2_{(\alpha;p)}$ atau *p-value* $< \alpha$ dengan *p-value*$= P(G_v > G)$ dan G_v adalah variabel acak berdistribusi $\chi^2_{(\alpha,p)}$ (Pawitan, 2001).

Pengujian hipotesis parameter regresi secara parsial adalah untuk mengetahui variabel prediktor mana secara individual yang berpengaruh terhadap model RW. Adapun hipotesis pengujian secara parsial sebagai berikut.

$H_0 : \beta_k = 0$

$H_1 : \beta_k \neq 0$, untuk k=0,1,2,…, p

Statistik uji adalah Statistik Wald yang dinyatakan dalam bentuk

$$W_0 = \frac{\hat{\beta}_k}{SE(\hat{\beta}_k)}, \qquad (18)$$

H_0 ditolak jika $W_{0hitung} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ atau *p-value* $<\alpha$ dengan *p-value*$= 2(1 - P(Z < |W_{0hitung}|))$ dengan Z adalah variabel acak berdistribusi $N(0,1)$ (Pawitan, 2001).

Pendeteksian Multikolinieritas

Salah satu syarat yang harus dipenuhi dalam regresi adalah tidak adanya multikolinieritas antara satu variabel prediktor dengan variabel prediktor yang lain. Salah satu cara untuk mendeteksi adanya multikolinieritas adalah melihat nilai *Variance Inflation Factors* (VIF) dengan rumus:

$$VIF_k = \frac{1}{1-R_k^2} \qquad (19)$$

denganR_k^2 merupakan koefisien determinasi model regresi dari variabel prediktorX_k yang diregresikan terhadap variabel prediktor lainnya.

VIF_k yang lebih kecil dari 10 menunjukkan tidak adanya multikolinieritas antar variabel prediktor. Jika nilai VIF_k lebih besar dari 10, maka solusi untuk mengatasinya adalah dengan cara mengeluarkan variabel prediktor yang tidak signifikan dan meregresikan kembali variabel-variabel prediktor yang signifikan (Gujarati, 2003).

Pengujian Heterogenitas Spasial

Pengujian heterogenitas spasial merupakan syarat agar bisa dilakukan pemodelan GWWR. Salah satu metode untuk mendeteksi heterogenitas spasial dalam data respon adalah menggunakan uji Glejser dengan hipotesis sebagai berikut

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots \sigma_n^2 = \sigma^2$

$H_1 : Minimal\ ada\ satu\ \sigma_i^2 \neq \sigma^2\ ;\ i = 1,2,\ldots,n$

Statistik uji pada pengujian heterogenitas spasial adalah

$$F_1 = \frac{\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^T\mathbf{X}^T\mathbf{e} - n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i\right)^2\right)}{(\mathbf{y}^T\mathbf{y} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}^T\mathbf{X}^T\mathbf{e})/(n-p-1)} \qquad (20)$$

dimana $\mathbf{e} = [|e_1||e_2|\cdots|e_n|]^T$. Statistik F yang diberikan oleh persamaan (20) berdistribusi $F_{(p,n-p-1)}$. H_0 ditolak jika $F_1 > F_{(\alpha,(n-p-1))}$ (Rencher, 2000).

Fungsi Pembobot Spasial

Prinsip pembobotan spasial model GWR adalah data di titik lokasi pengamatan yang berdekatan diberi bobot yang lebih besar daripada titik-titik yang berjauhan. Pembobot spasial dapat dihitung menggunakan fungsi pembobot *Adaptive Tricube* dengan rumus sebagai berikut

$$w_{ij} = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{d_{ij}}{b_i}\right)^3\right]^3 & , untuk\ d_{ij} \leq b \\ 0 & , untuk\ d_{ij} > b \end{cases} \qquad (21)$$

dengan w_{ij} adalah pembobot spasial dan b_i adalah *bandwidth* adaptif untuk penaksiran model GWWR pada lokasi pengamatan ke-i dan d_{ij} adalah jarak *euclidean* antara lokasi (u_i, v_i) ke lokasi (u_j, v_j) dengan rumus sebagai berikut

$$d_{ij} = \sqrt{(u_i - u_j)^2 + (v_i - v_j)^2} \qquad (22)$$

Salah satu metode untuk memilih *bandwidth* optimum adalah metode *Generalized Cross-Validation* (GCV) yang secara matematis dituliskan sebagai berikut

$$GCV = n\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i(b))^2/(n-p)^2 \quad (23)$$

dimana p adalah banyaknya parameter dalam model. Nilai *bandwidth* yang optimal diperoleh dari *bandwidth* yang menghasilkan nilai GCV yang minimum (Fotheringham, 2002).

Model GWWR

Model *Geographically Weighted Weibull Regression* (GWWR) adalah pengembangan dari model regresi Weibull yang diaplikasikan pada data spasial dimana setiap titik lokasi mempunyai nilai parameter regresi yang berbeda-beda. Model-model GWWR dapat diperoleh berdasarkan persamaan (8), (9), dan (10). Model regresi *mean* Weibull di lokasi ke-i dengan koordinat $u_i = [u_i, v_i]$ adalah

$$\mu_{y_i} = \Gamma\left(\frac{1}{\gamma(\mathbf{u}_i)} + 1\right)\exp\left[\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i\right], \quad (24)$$

model regresi *survival* Weibull pada lokasi ke-i adalah

$$S(y_i) = \exp\left(-y_i^{\gamma(\mathbf{u}_i)}\exp[-\gamma(\mathbf{u}_i)\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i]\right), \quad (25)$$

dan model regresi hazard Weibull pada lokasi ke-i adalah

$$h(y_i) = \gamma(\mathbf{u}_i){y_i}^{\gamma(\mathbf{u}_i)-1}\exp[-\gamma(\mathbf{u}_i)\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i] \quad (26)$$

FKP pada lokasi ke-i adalah

$$f(y_i) = \gamma(\mathbf{u}_i){y_i}^{\gamma(\mathbf{u}_i)-1} \times \exp[-\gamma(\mathbf{u}_i)[\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i]] \times \exp\left[-{y_i}^{\gamma(\mathbf{u}_i)}\exp[-\gamma(\mathbf{u}_i)[\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i]]\right]. \quad (27)$$

(Suyitno dan Sari, 2019).

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

Penaksiran Parameter Model GWWR menggunakan MLE. Berdasarkan FKP yang diberikan oleh persamaan (27) fungsi *likelihood* didefinisikan sebagai berikut

$$L(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_i)) = \prod_{i=1}^{n}\left(\gamma(\mathbf{u}_i)y_i^{\gamma(\mathbf{u}_i)-1}(\exp[-\gamma(\mathbf{u}_i)\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i]\,)\right)^{w_{ij}} \times \prod_{i=1}^{n}\left(\exp\left(-y_i^{\gamma(\mathbf{u}_i)}(\exp[-\gamma(\mathbf{u}_i)\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i]\,)\right)\right)^{w_{ij}} \quad (28)$$

Penaksiran ML GWWR lebih mudah diperoleh dengan memaksimumkan fungsi *log-likelihood.* Fungsi *log-likelihood* berdasarkan fungsi *likelihood* (28) adalah

$$l(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_i)) = ln\,\left(L(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_i))\right) \quad (29)$$

Penaksir ML diperoleh dengan menyelesaikan persamaan *likelihood* yang diberikan oleh

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_i)} = 0 \quad (30)$$

dengan **0** merupakan vektor nol. Ruas kiri berdasarkan persamaan (30) adalah vektor gradien $g(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_i))$ berdimensi p+2, yang didefinisikan

$$g(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_i)) = \left[\frac{\partial l(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_i))}{\partial \gamma(\mathbf{u}_i)}\ \frac{\partial l(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_0(\mathbf{u}_i)} \cdots \frac{\partial l(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_p(\mathbf{u}_i)}\right]^T \quad (31)$$

Komponen-komponen vektor gradien (31) dapat dinyatakan dalam bentuk umum, yaitu masing-masing adalah

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_i))}{\partial \gamma(\mathbf{u}_i)} = \sum_{i=1}^{n} w_{ij}\left(\frac{1}{\gamma(\mathbf{u}_i)} + \ln y_i - \boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i\right) - \sum_{i=1}^{n} w_{ij}\left(y_i^{\gamma(u_i)}\ln y_i \exp[-\gamma(\mathbf{u}_i)\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i]\right) + \sum_{i=1}^{n} w_{ij}\left(y_i^{\gamma(u_i)}\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i \exp -\gamma(\mathbf{u}_i)\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i\right) \quad (32)$$

dan

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_k(\mathbf{u}_i)} = \sum_{i=1}^{n} w_{ij}\left(-\boldsymbol{\beta}_k(u_i)X_{ki} + \gamma(u_i)y_i^{\gamma(u_i)}X_{ki} \times \exp[-\gamma(u_i)\beta^T(u_i)x_i]\right) \quad (33)$$

Metode alternatif untuk mendapatkan penaksir ML adalah metode iteratif Newton-Raphson. Vektor gradien $g(\varphi(u_i))$ diberikan oleh persamaan (31) dan matriks Hessian $H(\varphi(u_i))$ adalah matriks simetri orde p+2, yaitu matriks turunan orde kedua dari fungsi *log-likelihood* dengan bentuk umum matriks Hessian adalah sebagai berikut

$$H(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_i)) = \left[\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_i)\partial \boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{u}_i)}\right]_{(p+2)\times(p+2)} \quad (34)$$

Elemen-elemen matriks Hessian $H(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}_i))$ yang diberikan oleh persamaan (34) dapat dinyatakan dalam bentuk umum

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_i))}{\partial \gamma^2(\mathbf{u}_i)} = \sum_{i=1}^{n} w_{ij}\left(\frac{1}{\gamma^2(\mathbf{u}_i)} - y_i^{\gamma(\mathbf{u}_i)}(\ln y_i)^2 \exp\ [-\gamma(\mathbf{u}_i)\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i]\right) + 2\sum_{i=1}^{n} w_{ij}\left(y_i^{\gamma(\mathbf{u}_i)}(\ln y_i)(\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i)\exp\ [-\gamma(\mathbf{u}_i)\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i]\right) - \sum_{i=1}^{n} w_{ij}\left(y_i^{\gamma(\mathbf{u}_i)}(\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i)^2 \exp[-\gamma(u_i)\beta^T(u_i)x_i]\ \right) \quad (35)$$

dan

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_k^2(\mathbf{u}_i)} = \sum_{i=1}^{n} w_{ij}\left(-\gamma^2(\mathbf{u}_i)y_i^{\gamma(\mathbf{u}_i)}(X_{ki})^2 \exp[-\gamma(\mathbf{u}_i)\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i]\right) \quad (36)$$

Elemen-elemen nondiagonal dapat dinyatakan dalam bentuk umum, yaitu

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_i))}{\partial \gamma(\mathbf{u}_i)\partial \beta_k(\mathbf{u}_i)} = \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_k(\mathbf{u}_i)\partial \gamma(\mathbf{u}_i)} = \sum_{i=1}^{n} w_{ij}\left(-X_{ki} + \gamma(\mathbf{u}_i)y_i^{\gamma(\mathbf{u}_i)}\ln y_i\, X_{ki}\exp[-\gamma(\mathbf{u}_i)\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i]\right) + \sum_{i=1}^{n} w_{ij}\left(y_i^{\gamma(\mathbf{u}_i)}X_{ki}\exp[-\gamma(\mathbf{u}_i)\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i]\right) + \sum_{i=1}^{n} w_{ij}\left(-\gamma(\mathbf{u}_i)y_i^{\gamma(\mathbf{u}_i)}X_{ki}(\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i)\exp[-\gamma(\mathbf{u}_i)\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i]\right) \quad (37)$$

dan

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_t(\mathbf{u}_i)\partial \beta_k(\mathbf{u}_i)} = \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_k(\mathbf{u}_i)\partial \beta_t(\mathbf{u}_i)} = \sum_{i=1}^{n} w_{ij}\left(-\gamma^2(\mathbf{u}_i)y_i^{\gamma(\mathbf{u}_i)}X_{ki}X_{ti}\exp[-\gamma(\mathbf{u}_i)\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i]\right) \quad (38)$$

Penaksiran parameter model GWWR dapat ditemukan melalui algoritma Newton-Raphson sebagai berikut

$$\widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{(q+1)}(\mathbf{u}_i) = \hat{\varphi}^{(q)}(\mathbf{u}_i) - [\mathbf{H}(\widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{(q)}(\mathbf{u}_i))]^{-1}\mathbf{g}(\widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{(q)}(\mathbf{u}_i)) \quad (39)$$

Iterasi dihentikan pada iterasi ke q+1, jika $\|\widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{(q+1)}(\mathbf{u}_i) - \widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{(q)}(\mathbf{u}_i)\| < \varepsilon$, dengan ε adalah nilai riil positif yang cukup kecil (Suyitno dan Sari, 2019).

Pengujian hipotesis kesesuaian model GWWR dan RW bertujuan untuk mengetahui apakah terdapat perbedaan antara model GWWR dan model RW. Hipotesis pengujian ini adalah

$H_0: \beta_k(\mathbf{u}_i) = \beta_k, untuk\ k = 1,2,\ldots,p$

$H_1\ :\ Paling\ sedikit\ ada\ satu\ \beta_k(\mathbf{u}_i) \neq \beta_k$

Statistik uji pada pengujian ini adalah

$$F_2 = \frac{D_1/db_1}{D_2/db_2} \quad (39)$$

Berdasarkan distribusi D_1 dan distribusi D_2, F_2berdistribusi F dengan derajat bebas $db_1 = p$dan $db_2 = np$. Kriteria pengujian kesesuaian model adalah menolak H_0 jika $F_2 > F_{(\alpha,db_1,db_2)}$ atau jika$p - value < \alpha$, dengan *p-value*= $P(F_v > F_2)$, dimana $F_v$adalah variabel acak berdistribusi $F_{(db_1,db_2)}$ (Suyitno, 2017).

Pengujian parameter model GWWR dilakukan secara serentak dan parsial. Hipotesis pengujian serentak adalah sebagai berikut:

$H_0 : \beta_1(\mathbf{u}_i) = \beta_2(\mathbf{u}_i) = \cdots = \beta_p(\mathbf{u}_i) = 0$

$H_1\ :\ Paling\ sedikit\ ada\ satu\ \beta_k(u_i) \neq 0$

Statistik uji pada pengujian ini adalah

$$G_2 = \sum_{i=1}^{n}\widehat{\mathbf{B}}^T(\mathbf{u_i})[\mathbf{I}_{22}(\widehat{\mathbf{B}})(\mathbf{u}_i)]^{-1}\widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{u}_i) \quad (40)$$

dengan $[\mathbf{I}_{22}(\widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{u}_i))]^{-1}$ merupakan invers matriks informasi Fisher lokasi $(\mathbf{u}_i)$ yang dinyatakan dengan

$$[\mathbf{I}(\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}_i))] = -[\mathbf{H}(\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}_i))] \quad (41)$$

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

Kriteria pengujian ini adalah menolak H_0 pada taraf uji α jika $G > \chi^2_{(\alpha;np)}$ atau jika *p-value* $< \alpha$ dengan *p-value*$= P(G_v > G_2)$ dan G_v adalah variabel acak berdistribusi $\chi^2_{(\alpha,p)}$.

Pengujian parsial parameter model GWWR digunakan untuk mengetahui signifikansi pada masing-masing parameter $\beta_k(\mathbf{u}_i)$ dengan hipotesis sebagai berikut

$H_0: \beta_k(\mathbf{u}_i) = 0$

$H_1: \beta_k(\mathbf{u}_i) \neq 0$

dengan statistik uji pada pengujian hipotesis parameter secara parsial adalah statistik Wald, yang diberikan oleh

$$Z_{hit} = \frac{\hat{\beta}_k(\mathbf{u}_i)}{SE(\hat{\beta}_k(\mathbf{u}_i))} \qquad (42)$$

Kriteria pengujian parameter model secara parsial menolak H_0 jika $|Z_{hit}| > Z_{\alpha/2}$ atau jika *p-value* $< \alpha$, *p-value*$= 2(1 - P(Z > |Z_{hit}|)$, dimana Z adalah variabel acak berdistribusi normal baku (Pawitan, 2001).

Ukuran Kebaikan Model

Salah satu metode yang digunakan untuk memilih model terbaik adalah *Akaike's Information Criterion* (AIC). Kriteria AIC digunakan apabila pemodelan regresi bertujuan untuk mengidentifikasi faktor-faktor yang berpengaruh terhadap model. Perhitungan nilai AIC didefinisikan sebagai berikut

$$AIC = 2p - 2l(\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}_i)) \qquad (43)$$

dimana p merupakan banyak parameter dalam model dan $l(\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}_i))$ untuk $i = 1,2,\dots,n$ adalah penaksir ML model lokal pada semua lokasi. Model regresi terbaik adalah model dengan nilai AIC terkecil (Pawitan, 2001).

Interpretasi Model GWWR

Interpretasi model GWWR dapat menggunakan perhitungan rasio. Nilai rasio regresi untuk *mean* didefinisikan:

$$R\mu_{xk}(\mathbf{u}_i) = \exp[\,\hat{\beta}_k(\mathbf{u}_i)] \qquad (44)$$

Nilai rasio regresi *survival* Weibull didefinisikan

$RS_{xk}(u_i) =$

$$\frac{\exp\left[-y^{\hat{\gamma}(u_i)}\exp[-\hat{\gamma}(u_i)(\hat{\beta}_0(u_i)+\hat{\beta}_1(u_i)X_1+\dots+\hat{\beta}_k(u_i)(X_k+1)+\dots+\hat{\beta}_p(u_i)X_p)]\right]}{\exp[-y^{\hat{\gamma}(u_i)} expexp\,[-\hat{\gamma}(u_i)(\hat{\beta}_0(u_i)+\hat{\beta}_1(u_i)X_1+\dots+\hat{\beta}_k(u_i)X_k+\dots+\hat{\beta}_p(u_i)X_p)]\,]} \qquad (45)$$

dan nilai rasio regresi *hazard* Weibull didefinisikan sebagai berikut (Hosmer, 2008)

$$Rh_{xk}(u_i) = \exp[-\hat{\gamma}(u_i)(\hat{\beta}_k(u_i))] \qquad (46)$$

Chemical Oxygen Demand

Chemical Oxygen Demand (COD) adalah jumlah oksigen yang dibutuhkan oleh bahan oksidan (misalnya kalium dikromat) untuk mengoksidasi bahan-bahan organik yang terdapat di dalam air (Nugroho, 2006). Jumlah oksigen yang diperlukan untuk reaksi oksidasi terhadap bahan buangan organik sama dengan jumlah kalium dikromat yang dipakai pada reaksi tersebut. Semakin banyak kalium dikromat yang dipakai pada reaksi oksidasi, maka semakin banyak oksigen yang diperlukan (Wardhana, 2001).

Indikator yang umum digunakan dalam penentuan pencemaran air sungai adalah *Chemical Oxygen Demand* (COD). Limbah rumah tangga dan limbah industri merupakan penyebab tingginya COD. Batas baku mutu air kelas 1 untuk parameter COD maksimal adalah 10 mg/liter, 25 mg/liter untuk air kelas 2, 50 mg/liter untuk air kelas 3 dan 100 mg/liter untuk air kelas 4 (PP RI Nomor 82, 2001).

Hasil Penelitian dan Pembahasan

Data penelitian diperoleh dari Dinas Lingkungan Hidup (DLH) Provinsi Kalimantan Timur pada tahun 2019. Data variabel respon penelitian ini adalah data *Chemical Oxygen Demand* (COD) dan variabel prediktor terdiri dari Suhu (X_1), TDS (X_2), TSS (X_3), Nitrit (X_4), dan *Coli Fecal* (X_5) dengan 20 data koordinat lokasi titik sampel. Statistik deskriptif meliputi rata-rata (*mean*), nilai minimum, nilai maksimum yang disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Analisis Statistik Deskriptif

Variabel	*Mean*	Maks	Min
COD (Y)	3,1790	5,830	0,700
Suhu (X_1)	27,770	29,00	26,00
TDS (X_2)	29,800	69,00	22,00
TSS (X_3)	23,200	72,00	3,000
Nitrit (X_4)	0,0024	0,009	0,001
Coli Fecal (X_5)	364,50	1600	13,00

Berdasarkan Tabel 1 diketahui rata-rata COD di 20 lokasi pengamatan adalah 3,1790 *mg/l* yang berarti air sungai Mahakam diindikasikan tidak tercemar dan dapat dikategorikan sebagai air bersih layak minum karena masih berada di bawah ambang batas angka baku untuk kelas I sebesar 10 *mg/l*. Kadar COD tertinggi ditemukan di wilayah Pulau Kumala sebesar 5,830 *mg/l*, sedangkan COD terendah berada di lokasi Sungai Mahakam Nyan, Sungai Boh, dan Mahakam-Boh sebesar 0,700 *mg/l*.

Penaksiran Parameter Distribusi Weibull

Penaksiran parameter distribusi Weibull untuk data COD menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) yang diselesaikan dengan metode iteratif Newton-Raphson. Berdasarkan hasil penaksiran parameter distribusi Weibull diperoleh nilai taksiran parameter skala (λ) sebesar 3,5656 dan nilai taksiran parameter bentuk (γ) sebesar 2,4966 sehingga penaksiran fungsi distribusi kumulatif adalah

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

$$\hat{F}(y) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{y}{3,5656}\right)^{2,4966}\right]$$

Pengujian Distribusi

Pengujian distribusi menggunakan pendekatan Kolmogorov-Smirnov untuk menentukan apakah data respon (COD) mengikuti distribusi Weibull. Berdasarkan hasil perhitungan diperoleh D_{hitung} sebesar 0,1330 yang mana lebih kecil dari D_{tabel} sebesar 0,2940 maka diputuskan gagal menolak H_0 dengan taraf signifikansi α = 0,05 sehingga dapat disimpulkan bahwa data indikator pencemaran air COD berdistribusi Weibull.

Pendeteksian Multikolinieritas

Hasil perhitungan setiap variabel prediktor dapat dilihat pada Tabel 2

Tabel 2. Nilai VIF Variabel Prediktor

Variabel	VIF
Suhu (X_1)	1,7072
TDS (X_2)	1,4033
TSS (X_3)	1,7003
Nitrit (X_4)	1,3346
Coli Fecal (X_5)	1,4751

Berdasarkan nilai VIF pada Tabel 2 dapat disimpulkan bahwa tidak terjadi multikolinieritas antar variabel prediktor. Hal ini ditunjukkan oleh nilai VIF masing-masing variabel kurang dari 10, sehingga pemodelan regresi Weibull pada penelitian melibatkan 5 variabel prediktor

Pemodelan Regresi Weibull

Penaksiran parameter model regresi Weibull menggunakan metode MLE yang diselesaikan dengan metode iteratif Newton-Raphson. Hasil penaksiran parameter ditunjukkan pada Tabel 3.

Tabel 3. Penaksiran Parameter Model RW

Parameter	Taksiran
γ	3,1594
β_0	-9,2069
β_1	0,3604
β_2	-0,0129
β_3	0,0187
β_4	75,9071
β_5	0,0005

Berdasarkan penaksiran parameter model RW pada Tabel 3, maka diperoleh estimasi model regresi *survival* Weibull adalah

$$\hat{S}(y) = \exp[-y^{3,1594} \exp[-3,1594(-9,2069 + 0,3604X_1 - 0,0129X_2 + 0,0187X_3 + 75,9071X_4 + 0,0005X_5)]]$$

Model regresi *hazard* Weibull adalah

$$\hat{h}(y) = 3,1594y^{2,1594} \exp[-3,1594(-9,2069 + 0,3604X_1 - 0,0129X_2 + 0,0187X_3 + 75,9071X_4 + 0,0005X_5)]$$

Model regresi Weibull untuk *mean* adalah

$$\hat{\mu}(y) = 0,8951 \exp(-9,2069 + 0,3604X_1 - 0,0129X_2 + 0,0187X_3 + 75,9071X_4 + 0,0005X_5)$$

Pengujian parameter secara serentak bertujuan untuk mengetahui apakah variabel-variabel prediktor (Suhu, TDS, TSS, Nitrit, dan *Coli Fecal*) secara serentak berpengaruh pada model RW. Hipotesis pengujian parameter secara serentak adalah

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$
$H_1: Paling\ sedikit\ ada\ satu\ \beta_k \neq 0;$
$k = 1,2,3,4,5$

Berdasarkan hasil perhitungan statistik uji diperoleh G_{hitung} sebesar 13,2549 lebih besar dari $\chi^2_{(0,05;5)}$ sebesar dan *p-value* sebesar 0,0211 lebih kecil dari α =0,05 maka diputuskan untuk menolak H_0 sehingga dapat disimpulkan bahwa Suhu, TDS, TSS, Nitrit, dan *Coli Fecal* secara serentak berpengaruh terhadap model RW.

Pengujian parameter secara parsial bertujuan untuk mengetahui apakah variabel-variabel prediktor tertentu secara individual berpengaruh terhadap model RW.

$H_0: \beta_k = 0$

$H_1: \beta_k \neq 0\ ;\ k = 1,2,3,4,5$

Hasil perhitungan statistik uji *Wald, p-value* dan keputusan uji secara parsial untuk seluruh parameter ditunjukkan pada Tabel 4.

Tabel 4. Pengujian Hipotesis Parameter Regresi Weibull Secara Parsial

Variabel	$\lvert W_0 \rvert$	*p-value*	Keputusan
X_0	2,7553	0,0059	Menolak H_0
X_1	2,9875	0,0028	Menolak H_0
X_2	1,4186	0,1560	Gagal menolak H_0
X_3	2,3904	0,0168	Menolak H_0
X_4	1,6944	0,0902	Gagal menolak H_0
X_5	2,2800	0,0226	Menolak H_0

Berdasarkan statistik uji yang diperoleh pada Tabel 7 diperoleh variabel Suhu (X_1), TSS (X_3), dan *Coli Fecal* (X_5) secara individual berpengaruh terhadap model RW karena *p-value* ketiga variabel kurang dari 0,05. Variabel TDS (X_2) dan Nitrit (X_4) secara individual tidak berpengaruh terhadap model RW.

Pengujian Heterogenitas Spasial

Pengujian heterogenitas spasial bertujuan untuk mengetahui apakah data COD merupakan

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

data spasial. Pengujian heterogenitas spasial menggunakan metode Glejser. Hipotesis pengujian heterogenitas spasial adalah

$H_0 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_{20}^2 = \sigma^2$

$H_1 = Minimal\ ada\ satu\ \sigma_i^2 \neq \sigma^2; i = 1,2,..,20$

Berdasarkan hasil pengujian heterogenitas spasial diperoleh F_{hitung} sebesar 6,8010 yang mana lebih besar dari $F_{tabel(0,05;5;14)}$ sebesar 2,9582 maka diputuskan menolak H_0 yang berarti terdapat heterogenitas spasial. Berdasarkan hasil pengujian diduga pemodelan yang sesuai adalah pemodelan yang bersifat lokal, yaitu GWWR.

Pemodelan GWWR

Metode penaksiran parameter model GWWR menggunakan metode MLE yang diselesaikan dengan metode iteratif Newton-Raphson. Sebagai contoh hasil penaksiran parameter model GWWR untuk lokasi pengamatan ke-13 (Batuq) ditampilkan pada Tabel 5 dan nilai-nilai regresi disajikan pada Tabel 6.

Tabel 5. Penaksiran Parameter Model GWWR

Parameter	**Taksiran**
$\hat{\gamma}$	3,4636
$\hat{\beta}_0$	-7,4384
$\hat{\beta}_1$	0,3019
$\hat{\beta}_2$	-0,0099
$\hat{\beta}_3$	0,0141
$\hat{\beta}_4$	52,7672
$\hat{\beta}_5$	0,0004

$\hat{S}(y_{13}) =$

$\exp(-y_{13}{}^{3,4636} \exp[\,3,4636(-7,4384 + 0,3019X_{13,1} -$

$0,0099X_{13,2} + 0,0141X_{13,3} + 52,7672X_{13,4} +$

$0,0004X_{13,5})])$

$\hat{h}(y_{13}) = 3,4636 y_{13}{}^{2,4636} \exp[\,-3,4636(-7,4384 +$

$0,3019X_{13,1} - 0,0099X_{13,2} +$

$0,0141X_{13,3} \quad 52,7672X_{13,4} + 0,0004X_{13,5})]$

$\hat{\mu}(y_{13}) = 0,8993\ exp\ exp\ (\,-7,4384 + 0,3019X_{13,1} -$

$0,0099X_{13,2} + 0,0141X_{13,3} + 52,7672X_{13,4} +$

$0,0004X_{13,5})$

Tabel 6. Nilai Regresi *Survival,* Regresi *Hazard,* dan Regresi *Mean*

Lokasi (i)	$\hat{S}(y\|x)$	$\hat{h}(y\|x)$	$\hat{\mu}(y\|x)$
1	0,9826	0,0756	2,3829
2	0,8699	0,6018	1,200
3	0,1128	1,9413	2,4825
⋮	⋮	⋮	⋮
20	0,8120	0,8750	1,0647

Berdasarkan hasil perhitungan yang diberikan pada Tabel 6, nilai regresi *survival* pada lokasi ke-1 yaitu Sungai Mahakam Nyan pada saat COD sebesar 0,7 mg/l adalah 0,9826 yang artinya peluang air sungai Mahakam di lokasi Sungai Mahakam Nyan sebesar 0,9826. Nilai regresi *hazard* sebesar 0,0756 yang artinya laju (*rate*) air sungai Mahakam di lokasi Sungai Mahakam Nyan pada saat COD sebesar 0,7 mg/l sebesar 0,0756. Untuk regresi *mean* sebesar 2,3829 yang artinya rata-rata COD di lokasi Sungai Mahakam Nyan sebesar 2,3829.

Pengujian Kesesuaian Model RW dan Model GWWR

Pengujian kesesuaian model dilakukan dengan tujuan untuk mengetahui apakah model RW berbeda dari model GWWR. Berdasarkan hasil pengujian kesesuaian model RW dan model GWWR diperoleh bahwa $F_{1hitung}$ sebesar 15,1857 yang mana lebih besar dari $F_{tabel(0,05;5;100)}$ sebesar 2,3053 atau *p-value* sebesar $4,399\times10^{-11}$, maka diputuskan menolak H_0 dan disimpulkan bahwa model RW berbeda dengan model GWWR. Perbandingan ukuran kebaikan model RW dan model GWWR dapat dilihat pada Tabel 7

Tabel 7. Ukuran Kebaikan Model RW dan Model GWWR

Model	**GCV**	**AIC**
RW	7,0275	72,1835
GWWR	3,5982	67,0949

Berdasarkan ukuran kebaikan model, model GWWR lebih baik daripada model RW karena memiliki nilai GCV dan AIC yang lebih kecil.

Pengujian Parameter Model GWWR

Pengujian parameter secara serentak bertujuan untuk mengetahui apakah variabel prediktor berpengaruh terhadap variabel respon secara serentak. Berdasarkan hasil pengujian parameter model GWWR secara serentak dengan nilai statistik uji sebesar 190,9451 lebih besar dari $\chi^2_{0,05(100)}$sebesar 124,3421, maka diputuskan menolak H_0 pada taraf signifikansi 0,05 yang berarti bahwa variabel suhu, TDS, TSS, nitrit, *Coli Fecal* secara serentak berpengaruh terhadap model GWWR.

Hasil pengujian parameter model GWWR secara parsial dapat dikelompokkan menjadi 3 kelompok berdasarkan variabel yang berpengaruh dan disajikan pada Tabel 8. Variabel prediktor yang berpengaruh di kelompok pertama adalah suhu, TSS dan *Coli Fecal.* Variabel prediktor yang berpengaruh di kelompok kedua adalah suhu dan TSS. Sedangkan variabel prediktor yang berpengaruh di kelompok ketiga adalah suhu. Variabel prediktor yang berpengaruh secara lokal adalah suhu sedangkan variabel yang berpengaruh secara global adalah suhu, TSS, dan *Coli Fecal*.

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

Tabel 8. Kelompok Model GWWR Berdasarkan Variabel Prediktor yang Berpengaruh

Kelompok	Variabel berpengaruh	Lokasi Pengamatan
1	X_1, X_3 dan X_5	Sungai Mahakam Nyan Mahakam-Boh Long Bagun Bloro Kantor Gubernur Anggana Belayan Hilir Sungai Boh
2	X_1 dan X_3	Tering Belayan Hulu
3	X_1	Pulau Kumala Kalamur Palaran Melak Muara Pahu Batuq Muara Muntai Kota Bangun Kedang Kepala Hulu Kedang Kepala Hilir

Interpretasi Model GWWR

Interpretasi model GWWR pada salah satu lokasi pengamatan yaitu lokasi ke-1 (Sungai Mahakam Nyan) diperoleh dari hasil perhitungan rasio fungsi *survival*, fungsi *hazard*, dan fungsi *mean* pada variabel bebas yang berpengaruh di setiap lokasi pengamatan yang ditampilkan pada Tabel 9.

Tabel 9. Salah Satu Nilai Rasio Fungsi *Survival*, Fungsi *Hazard*, dan Fungsi *Mean*

Rasio	Parameter				
	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
Survival	-	-	1,0010	-	-
Hazard	-	-	0,9403	-	-
Mean	-	-	1,0206	-	-

Interpretasi model GWWR pada kelompok 1 yaitu lokasi pengamatan ke-1 (Sungai Mahakam Nyan). Berdasarkan hasil perhitungan nilai rasio *survival* untuk variabel TSS menunjukkan bahwa setiap kenaikan 1 *mg/l* TSS dan dianggap nilai variabel lainnya tetap, maka peluang COD meningkat menjadi 1,0010 kali atau meningkat sebesar 0,1%. Nilai rasio fungsi *hazard* untuk variabel TSS menunjukkan setiap kenaikan 1 mg/l TSS dan dianggap nilai variabel lainnya tetap, maka laju potensi (*rate*) peluang COD menurun menjadi 0,9403 kali atau 5,97%. Nilai rasio fungsi *mean* untuk variabel TSS adalah 1,0206, menunjukkan setiap kenaikan 1 *mg/l* TSS dan dianggap nilai variabel lainnya tetap akan meningkatkan rata rata COD air sungai mahakam di lokasi pengamatan Sungai Mahakam Nyan menjadi 1,0206 kali.

Kesimpulan

Berdasarkan hasil pengujian yang telah dilakukan maka kesimpulan yang diperoleh adalah
1. Salah satu model *Geographically Weighted Weibull Regression* adalah model regresi untuk fungsi *survival,* fungsi *hazard,* dan fungsi *mean* pada lokasi ke-1 (Sungai Mahakam Nyan) berturut-turut adalah

$$\begin{aligned}\hat{S}(y_1) = \exp(-{y_1}^{3,0233} \exp[-3,0233(-9,3648 &+ 0,3646X_{1,1} - 0,0138X_{1,2} \\ &+ 0,0204X_{1,3} + 82,7746X_{1,4} \\ &+ 0,0005X_{1,5})])\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{h}(y_1) = 3,0233{y_1}^{2,0233} \exp[-3,0233(-9,3648 &+ 0,3646X_{1,1} - 0,0138X_{1,2} \\ &+ 0,0204X_{1,3} + 82,7746X_{1,4} \\ &+ 0,0005X_{1,5})]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(y_1) = 0,8933 \exp(-9,3648 + 0,3646X_{1,1} &- 0,0138X_{1,2} + 0,0204X_{1,3} \\ &+ 82,7746X_{1,4} + 0,0005X_{1,5})\end{aligned}$$

2. Faktor-faktor yang berpengaruh dari kelima variabel prediktor (suhu, TDS, TSS, Nitrit, dan *Coli Fecal*) terhadap indikator pencemaran air COD pada model GWWR adalah suhu, TSS, dan *Coli Fecal.* Faktor yang berpengaruh pada model GWWR dikelompokkan menjadi 3 kelompok berdasarkan variabel yang berpengaruh.

Daftar Pustaka

Fotheringham, A.S. (2002). *Geographically Weighted Regression: The Analysis of Spatially Varying Relationships.* England: John Wiley & Sons.

Gujarati, D. (2003). *Basic Econometrics 4th Edition.* New York: McGraw-Hill Inc.

Hosmer, D.W., Lemeshow, S., & May, S. (2008), *Applied Survival Analysis. Regression Modeling of Time-to-Event Data*. New Jersey: John Wiley.

Khuri, A.I. (2003), *Advanced Calculus with Applications in Statistics*, *2nd Edition*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Lawless, J.F. (2003). *Statistical Model and Methods for Lifetime Data. 2nd Edition.* New Jersey: John Wiley & Sons.

Nugroho, A. (2006). *Bioindikator Kualitas Air.* Jakarta: Universitas Trisakti.

Otaya, L.G. (2016). Distribusi Probabilitas Weibull dan Aplikasinya. *Jurnal Manajemen Pendidikan Islam*, 4(2), 44-66.

Pawitan, Y. (2001). *In All Likelihood. Statistical Modelling and Inference Using Likelihood.* Sweden: Clarendon Press-Oxford.

Peraturan Pemerintah Republik Indonesia Nomor 82 Tahun 2001 Tentang Pengelolaan Kualitas Air dan Pengendalian Pencemaran Air.

Rinne, H. (2009). *The Weibull Distribution A Handbook.* London: CRC Press Taylor and Francis Group.

Rencher, A.C. (2000). *Linear Model in Statistics*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Suyitno. (2017). Penaksiran Parameter dan Pengujian Hipotesis Model Regresi Weibull Univariat. *Jurnal Eksponensial*, 8 (2), 179-183.

Suyitno. (2017). *Model Geographically Weighted Multivariate Weibull Regression* (Disertasi). ITS Surabaya

Suyitno & Sari, N W W. (2019). Parameter Estimation of Mixed Geographically Weighted Weibull Regression Model. *Journal of Physic*, 1-13, DOI: 10.1088/1742-6596/1277/1/012046

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455