# Penerapan Metode Adams-Bashforth-Moulton pada Persamaan Logistik Dalam Memprediksi Pertumbuhan Penduduk di Provinsi Kalimantan Timur

## *The Application of the Adams-Bashforth-Moulton Method to the Logistic Equation in Predicting Population Growth in the Province of East Kalimantan*

**Dewi Apriani[1], Wasono[2], dan Moh. Nurul Huda[3]**
Laboratorium Matematika Komputasi FMIPA Universitas Mulawarman
E-mail: [1]dewiapriani2304@gmail.com

***ABSTRACT***

*Logistic equation is a nonlinear ordinary differential equation that describes the population. Nonlinear ordinary differential equations can be solved by one of the numerical methods, namely the Adams-Bashforth-Moulton method. Adams-Bashforth-Moulton method is a multistep method which consists of Adams-Bashforth method as predictor and Adams-Moulton method as corrector. The logistic equation is solved first by using the Runge-Kutta method to obtain the four initial solutions, then followed by the Adams-bashforth-Moulton method. This study aims to predict population growth in the province of East Kalimantan using the Adams-Bashforth-Moulton method. Based on the calculation results obtained a numerical solution of the logistic equation for population growth at* $t = 2021$, *with a step size of* $h = \frac{1}{4}$, *the capacity of the province of East Kalimantan is* $K = 10.000$ *and the growth rate of* $m = 0{,}109$ *is 3,856,564 inhabitants.*

**Keywords:** *Adams-Bashforth-Moulton Method, Runge-Kutta Method, Logistic Equations*

**Pendahuluan**

Persamaan diferensial adalah persamaan yang menghasilkan fungsi yang tidak diketahui terhadap turunannya terhadap satu atau lebih peubah bebas. Berdasarkan sifat kelinearannya persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu persamaan diferensial *linear* dan *nonlinear*. Model logistik adalah model persamaan diferensial *nonlinear* yang menggambarkan pertumbuhan populasi. Solusi dari persamaan diferensial nonlinear sebagian besar sulit ditemukan secara analitik sehingga penyelesaian secara numerik dapat digunakan untuk mendapatkan solusi dari persamaan diferensial *nonlinear* tersebut misalnya dengan metode Adams-Bashforth-Moulton (Wahyuni dkk, 2019).

Metode Adams-Bashforth-Moulton termasuk kedalam metode *multi-step* yaitu metode yang membutuhkan beberapa solusi awal yang dapat diperoleh dari metode *one-step*. Metode Adams-Bashforth-Moulton dapat digunakan tanpa mencari turunan-turunan fungsinya terlebih dahulu, melainkan langsung menggunakan persamaan prediktor-korektor yang terdiri dari metode Adams-Bashforth sebagai prediktor dan metode Adams-Moulton sebagai korektor. Metode Adams-Bahforth-Moulton ini memberikan solusi yang cukup akurat dalam penyelesaian masalah nilai awal persamaan diferensial biasa non linear (Apriadi dkk, 2014).

Penelitian metode Adams-Bashforth-Moulton sebelumnya pernah dilakukan oleh Apriadi, Bayu Prihandono dan Evi Noviani (2014), penelitian ini membahas penyelesaian numerik menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat pada persamaan bandul sederhana yang menunjukkan besarnya sudut yang dibentuk oleh tali bandul dengan garis vertikal pada waktu tertentu. Penelitian metode Adams-Bashforth-Moulton juga pernah dilakukan oleh Wika oktavia Mawarni (2017), penelitian ini membahas penyelesaian persamaan logistik pada pertumbuhan penduduk Provinsi Lampung dengan metode Adams-Bashfoth-Moulton. Pada penelitian memprediksi pertumbuhan penduduk juga pernah dilakukan oleh Sumarni Abdullah (2016), penelitian ini membahas tentang persamaan logistik dalam memprediksi pertumbuhan penduduk di Provinsi Sulawesi Selatan.

Menurut beberapa kalangan jumlah penduduk yang besar merupakan suatu hal yang positif karena dapat dijadikan sebagai subjek pembangunan, perekonomian akan lebih berkembang jika jumlah tenaga kerjanya banyak. Namun menurut beberapa kalangan jika jumlah penduduk besar maka akan menjadi beban bagi pembangunan karena pemenuhan kebutuhan yang semakin lama semakin banyak seiring dengan perkembangan jumlah penduduk tersebut dan juga akan menimbulkan berbagai masalah seperti tingkat pengangguran yang tinggi, kemiskinan serta kelaparan sehingga bukan kesejahteraan yang didapat tapi justru kemelaratan yang akan ditemui apabila jumlah penduduk tidak dikendalikan dengan baik (Rochaida, 2016). Pada tahun 2020 Badan Pusat Statistik Provinsi Kalimatan Timur mencatat jumlah penduduk Provinsi Kalimantan Timur pada bulan September 2020 sebanyak 3,77

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

juta jiwa. BPS Provinsi Kalimantan Timur juga mencatat jumlah penduduk miskin di Kalimantan Timur pada September 2020 mengalami kenaikan sebesar 0,54 persen atau bertambah sebanyak 13,73 ribu orang. Hal tersebut dapat dikurangi dengan mempersiapkan sarana yang cukup, seperti diketahui bahwa semua rencana pembangunan dibuat berdasarkan data jumlah penduduk yang dapat diproyeksikan melalui pemodelan secara matematis (BPS Provinsi Kalimantan Timur, 2020).

Penerapan pemodelan matematika pada penelitian ini adalah pemodelan pada pertumbuhan populasi. Dalam hal ini akan menggunakan pemodelan pertumbuhan populasi dengan persamaan diferensial yang bertujuan untuk mengetahui jumlah penduduk dan pertambahan penduduk setiap tahunnya pada masa yang akan datang dengan menggunakan data-data dari tahun sebelumnya (Ahmad, 2019).

Tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah untuk memprediksi jumlah penduduk Provinsi Kalimantan Timur pada masa yang akan datang dengan menggunakan data-data dari tahun sebelumnya yaitu tahun 2010-2020. Oleh karena itu pada penelitian ini akan dibahas mengenai solusi numerik model logistik yang merupakan persamaan diferensial nonlinear dengan menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat, untuk mencari nilai-nilai awal yang dibutuhkan pada metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat dapat diperoleh dari metode one-step yaitu metode Runge-Kutta orde empat.

**Persamaan Diferensial Biasa**

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat tanda turunan (*derivative*) $\frac{dy}{dx}$ dimana dalam persamaan tersebut terdapat paling sedikit satu turunan dari suatu fungsi yang belum diketahui. Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan yang turunan fungsinya hanya bergantung pada satu variabel bebas misalnya $\frac{dy}{dx}$. Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan yang turunan fungsinya tergantung pada lebih dari satu variabel bebas misalnya $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ (Purnomo, 2012).

**Model Pertumbuhan Penduduk**

Model pertumbuhan penduduk sering disebut juga sebagai metode tingkat pertumbuhan penduduk (*Growth Rates*). Model pertumbuhan penduduk dibagi menjadi tiga yaitu model aritmatika, geometrik dan ekponensial dengan mengasumsikan pertumbuhan yang konstan untuk mengestimasi jumlah penduduk. (Handiyatmo dkk, 2010).

**Persamaan Diferensial Biasa *Linear* dan *Non Linear***

Persamaan diferensial linier disebut juga sebagai persamaan diferensial tingkat satu derajat satu. Persamaan diferensial nonlinear adalah persamaan diferensial biasa yang tak linear. Persamaan diferensial dikatakan nonlinear apabila tidak sesuai dengan syarat dan bentuk umum persamaan diferensial linear yaitu apabila derajatnya lebih dari satu dan terdapat perkalian antar variabel, (Purnomo, 2012).

**Pencocokan Kurva (*Curve Fitting*)**

Data yang diperoleh dari hasil pengamatan di lapangan, pengukuran di laboratorium, atau tabel yang diambil dari buku acuan. Misalkan tersedia data-data $y$ pada berbagai $x$ (sejumlah $n$ pasang), maka dapat dicari suatu persamaan $y = f(x)$ yang memberikan hubungan $y$ dengan $x$ yang mendekati data. Pendekatan seperti ini dalam metode numerik disebut Pencocokan Kurva (*Curve Fitting*). Ada dua metode pencocokan kurva yaitu interpolasi dan regresi (Rindengan dkk, 2017).

**Model Logistik**

Model logistik adalah model yang menggambarkan pertumbuhan populasi yang dirasa lebih realistis. Laju pertumbuhan instrinsik (m) adalah kapasitas suatu populasi untuk meningkat yang besarnya ditentukan oleh berbagai aspek. Laju pertumbuhan intrinsik dalam model logistik digunakan untuk mengetahui daya tumbuh populasi dan kapasitas batas lingkungan digunakan sebagai penghambat pertumbuhan populasi. Berikut adalah persamaan model logistik

$$\frac{dP}{dt} = m\left(1 - \frac{P}{K}\right)P \tag{1}$$

Berikut adalah solusi analitiknya

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-mt}} \tag{2}$$

dengan:

*K* : kapasitas tampung
*P(t)* : jumlah penduduk pada tahun t
*A* : nilai awal
*m* : laju pertumbuhan penduduk
*t* : periode waktu

(Pudjaprasetya, 2011).

**Metode Numerik**

Metode numerik adalah metode yang digunakan untuk menyelesaikan persoalan yang tidak mungkin diselesaikan secara matematis (analitik) karena tidak ada teorema analisa matematik yang dapat digunakan. Metode numerik menggunakan pendekatan analisis matematis dengan mempertimbangkan pemakaian grafis dan teknik perhitungan yang mudah. Algoritma yang digunakan dalam metode numerik adalah algoritma pendekatan dimana pada algoritma pendekatan akan muncul istilah iterasi yaitu pengulangan

**p-ISSN 2085-7829**
**e-ISSN 2798-3455**

proses perhitungan. Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial yaitu metode Euler, metode pendekatan deret Taylor, metode Runge-Kutta dan metode prediktor-korektor seperti metode Adam Moulton. Dalam metode numerik, hasil yang diperoleh bukanlah hasil yang sama dengn nilai sejatinya tetapi selisih yang ditimbulkan antara nilai sebenarnya dengan nilai yang dihasilkan atau biasa disebut galat (Munir, 2003).

**Galat dan Angka Signifikan**

Galat dapat dikelompokkan berdasarkan sumber galat menjadi tiga kategori yaitu galat bawaan (percobaan), galat pemotongan dan galat pembulatan. Angka signifikan bisa disebut juga sebagai angka bena dan yang dapat digunakan secara pasti. Angka bena adalah angka yang dikembangkan untuk menandakan keandalan suatu nilai numerik. Berikut ini adalah contoh dari angka signifikan yaitu $a^* = 23.049$ memiliki 5 angka signifikan yaitu 2, 3, 0, 4, 9. Bilangan $a^*$ dikatakan menghampiri a sampai d angka signifikan jika d merupakan bilangan bulat positif terbesar yang memenuhi

$$\frac{|a^* - a|}{|a|} < \frac{10^{-d}}{2}. \tag{3}$$

(Susila, 1993)

**Metode Runge-Kutta**

Metode Runge-Kutta adalah metode yang cukup akurat dan sederhana yang sering digunakan. Metode ini dibuat untuk mendapatkan tingkat ketelitian yang lebih tinggi dan untuk mendapatkan hasil tersebut diperlukan nilai-nilai fungsi dari titik-titik sebarang yang dipilih pada suatu interval bagian (Nugroho, 2009). Metode Runge-Kutta orde empat juga termasuk metode yang terkenal dan sering dipakai dalam praktek. Metode Runge-Kutta orde empat juga digunakan sebagai pendahuluan untuk mendapatkan nilai awal yang nantinya akan dibutuhkan pada metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat. Berikut adalah bentuk dari metode Runge-Kutta orde empat

$$k_1 = hf(x_r, y_r)$$
$$k_2 = hf\left(x_r + \frac{1}{2}h, y_r + \frac{1}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = hf\left(x_r + \frac{1}{2}h, y_r + \frac{1}{2}k_2\right)$$
$$k_4 = hf(x_r + h, y_r + k_3)$$
$$y_{r+1} = y_r + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{4}$$

(Triatmodjo, 2002).

**Metode Adams-Bashforth-Moulton**

Metode Adams-Bashforth-moulton adalah metode yang termasuk kedalam metode *multi-step*. Untuk memperoleh solusinya metode *multi-step* memerlukan beberapa solusi awal yang dapat diperoleh dari metode *one-step* (seperti metode Euler, metode Heun, metode deret Taylor dan metode Runge-Kutta). Metode *multi-step* juga disebut sebagai metode prediktor-korektor karena dalam penyelesaiannya langsung menggunakan persamaan prediktor dan persamaan korektor tanpa mencari turunan-turunan fungsinya terlebih dahulu. Persamaan prediktor atau persamaan pertama biasanya digunakan untuk memprediksi (memperoleh aproksimasi pertama untuk $y_{r+1}$) sedangkan persamaan korektor atau persamaan kedua biasanya digunakan untuk memperoleh nilai hasil koreksi (aproksimasi kedua untuk $y_{r+1}$). Metode *multi-step* yang paling terkenal adalah metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat. Galat pemotongan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat lebih kecil daripada galat pemotongan metode Adams-Bashforth-Moulton orde dua dan orde tiga sehingga dapat memberikan solusi yang cukup akurat. Pada metode ini $y_{r+1}$ diperoleh dari $y_{r+3}, y_{r+2}, y_{r+1}$ dan $y_r$ dengan nilai-nilai 4 data awal $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$ harus sudah ada dapat dihitung dengan menggunakan metode *one-step* yaitu metode Runge-Kutta orde empat untuk menghitung $(x_r, y_r)$ untuk $r \geq 4$ (Bronson dan Costa, 2007).

Persamaan prediktor dari metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat adalah

$$\begin{aligned} y^*_{r+1} = y_r + \frac{h}{24}(&-9f_{r-3} \\ &+37f_{r-2} - 59f_{r-1} \\ &+55f_r) \end{aligned} \tag{5}$$

Persamaan korektor dari Metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat adalah

$$\begin{aligned} y_{r+1} = y_r + \frac{h}{24}(&f_{r-2} - 5f_{r-1} \\ &+19f_r + 9f^*_{r+1}) \end{aligned} \tag{6}$$

dengan $f^*_{r+1} = f(x_{r+1}, f^*_{r+1})$ (Erwin, 1999).

**Pengendalian Ukuran Langkah *h***

Pengendalian perkiraan ukuran langkah *h* terlebih dahulu ditinjau galat pemotongan untuk metode Adams-Bashforth orde empat dan galat pemotongan untuk metode Adams-Moulton orde empat. Kesalahan pemotongan prediktor metode Adam Bashforth adalah

$$E_{AB} = \frac{251}{720}h^5 y^v(\xi) \tag{7}$$

Kesalahan pemotongan korektor metode Adams Moulton adalah

$$E_{AM} = -\frac{19}{720}h^5 y^v(\xi) \tag{8}$$

(Erwin, 1999).

Jika ukuran langkah *h* yang dipilih tepat maka solusi numeriknya akan diperoleh dengan jumlah iterasi yang sedikit. Persamaan diatas dapat digunakan untuk menganalisis kriteria ukuran langkah *h* (Conte dan Door, 1993).

Metode Adams-Bashforth-Moulton orde

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

empat dapat diselesaikan secara iterasi, iterasi akan diberhentikan apabila galat relatif lebih dari kriteria pemberhentiannya.

$$\frac{|y_{r+1} - y_{r+1}^*|}{|y_{r+1}|} < \varepsilon \quad (9)$$

untuk $k = 1,2,3, \dots$ dan $\varepsilon$ adalah kriteria pemberhentian yang dikehendaki (Apriadi dkk, 2014).

**Pertumbuhan Penduduk di Provinsi Kalimantan Timur**

Kalimantan Timur adalah sebuah provinsi Indonesia di Pulau Kalimantan bagian ujung timur yang berbatasan dengan Malaysia, Kalimantan Utara, Kalimantan Tengah, Kalimantan Selatan, Kalimantan Barat dan Sulawesi. Luas total Kalimantan Timur adalah 127.346,92 $km^2$. Pada sensus penduduk 2020 Badan Pusat Statistik Provinsi Kalimantan Timur mencatat jumlah penduduk Kalimantan Timur sebanyak 3,77 juta jiwa. Sejak tahun 2010, jumlah penduduk Kalimantan Timur mengalami penambahan sekitar 737.552 jiwa dengan rata-rata sebanyak 73.755 jiwa setiap tahunnya. Sebaran penduduk Kalimantan Timur pada tahun 2020 masih terkonsentrasi di Kota Samarinda, dengan luas wilayah sebesar 0,56 persen dari wilayah Kalimantan Timur. (BPS Provinsi Kalimantan Timur, 2020).

**Metode Penelitian**

Penelitian tugas akhir ini dilakukan di Laboratorium Matematika Komputasi, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Mulawarman, Samarinda. Pengambilan data dilakukan di Badan Pusat Statistik Provinsi Kalimantan Timur. Populasi pada penelitian ini menggunakan data jumlah penduduk di Provinsi Kalimantan Timur. Adapun sampel dari penelitian ini menggunakan data jumlah penduduk Kabupaten atau Kota di Provinsi Kalimantan Timur pada Tahun 2010-2020.

Pada penelitian ini, variabel penelitian yang digunakan adalah semua data jumlah penduduk Kabupaten atau Kota yang ada di Provinsi Kalimantan Timur yaitu Paser, Kutai Barat, Kutai Kartanegara, Kutai Timur, Berau, Penajam Paser Utara, Mahakam Ulu, Balikpapan, Samarinda dan Bontang. Pada penelitian ini, teknik pengambilan data yang dilakukan adalah teknik pengambilan data yang diperoleh langsung dari instansi terkait. Data yang diambil berasal dari *website* Badan Pusat Statistik provinsi Kalimantan Timur yaitu www.kaltim.bps.go.id.

Adapun teknik analisis data yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Menentukan data yang akan digunakan yaitu data jumlah penduduk, laju pertumbuhan dan Kapasitas Tampung Provinsi Kalimantan Timur.
2. Menentukan persamaan logistik
$$\frac{dP}{dt} = m\left(1 - \frac{P}{K}\right)P$$
3. Menghitung empat solusi awal $P_0, P_1, P_2$ dan $P_3$ menggunakan metode Runge-Kutta orde empat.
4. Menghitung nilai-nilai $f_r, f_{r-1}, f_{r-2}$ dan $f_{r-3}$ dengan $r = 3, 4 \dots n$.
5. Menghitung solusi numerik dengan metode Adams-Bashforth yaitu persamaan prediktor.
6. Menghitung $f_{r+1} = f(t_{r+1}, P_{r+1})$ dan disubstitusikan pada metode Adams-Moulton yaitu persamaan korektor.
7. Koreksi Adams-Moulton diiterasikan pada $r$ sampai memenuhi
$$\frac{|P_{r+1} - P_{r+1}^*|}{|P_{r+1}|} < \varepsilon$$
Untuk $k = 1,2,3, \dots$ dan $\varepsilon$ adalah kriteria pemberhentian yang dikehendaki.
8. Jika kriteria pemberhentian tidak dapat dipenuhi, maka dilakukan analisis kriteria pemilihan ukuran langkah *h* sebagai berikut:
   a. Jika $10^{-1} < \frac{19}{270} \cdot \frac{|P_{r+1} - P_{r+1}^*|}{|P_{r+1}|} < 10^{-9}$, maka langkah berikutnya digunakan nilai *h* yang sama.
   b. Jika $\frac{19}{270} \cdot \frac{|P_{r+1} - P_{r+1}^*|}{|P_{r+1}|} > 10^{-9}$, maka *h* diganti $\frac{h}{2}$ dan kembali ke langkah 3.
   c. Jika $\frac{19}{270} \cdot \frac{|P_{r+1} - P_{r+1}^*|}{|P_{r+1}|} < 10^{-10}$, maka *h* diganti dengan $2h$ kemudian kembali ke langkah 3.
9. Jika kriteria terpenuhi maka didapatkan hasil solusi numeriknya.

**Hasil dan Pembahasan**

**Data Penduduk Provinsi Kalimantan Timur**

Langkah pertama yang harus dilakukan untuk mendapatkan hasil prediksi jumlah penduduk di Provinsi Kalimantan Timur adalah menentukan data yang akan digunakan yaitu data jumlah penduduk, laju pertumbuhan dan kapasitas tampung Provinsi Kalimantan Timur yang disajikan pada Tabel 1.

**Tabel 1.** Tabel Akumulasi Data Penduduk Provinsi Kalimantan Timur

| No | Tahun | Jumlah Penduduk | No | Tahun | Jumlah Penduduk |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2010 | 3.047.479 | 7 | 2016 | 3.501.232 |
| 2 | 2011 | 3.123.369 | 8 | 2017 | 3.575.449 |
| 3 | 2012 | 3.199.696 | 9 | 2018 | 3.648.835 |
| 4 | 2013 | 3.275.844 | 10 | 2019 | 3.721.389 |
| 5 | 2014 | 3.351.432 | 11 | 2020 | 3.793.152 |
| 6 | 2015 | 3.426.638 | | | |

Sumber : BPS Provinsi Kalimantan Timur

**Penentuan Laju Pertumbuhan**

Penentuan laju pertumbuhan menggunakan

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

metode *Curve Fitting* pada MATLAB dengan menggunakan solusi analitik dari persamaan logistiknya. Hasil dari perhitungan tersebut dapat dilihat pada Tabel 2.

**Tabel 2.** Hasil *Curve Fitting*

| | *A* | *e* | *m* |
|---|---|---|---|
| Hasil *Curve Fitting* | 2,328 | 1,341 | 0,109 |

Berdasarkan Tabel 2 dengan nilai kapasitas tampung Provinsi Kalimantan Timur adalah $K = 10.000.000$ didapatkan laju pertumbuhannya yaitu $m = 0{,}109$ dan $P(0) = 3.047.479$ sebagai nilai awal. Pada interval [0,63], dengan banyak iterasi *n* = 63

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{63-0}{63} = 1$$

dengan ukuran langkah *h* = 1.

**Penentuan Persamaan Logistik**

Nilai-nilai yang diperoleh yaitu laju pertumbuhan dan kapasitas tampung Provinsi Kalimantan Timur disubstitusikan ke persamaan logistik sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\frac{dP}{dt} = m\left(1 - \frac{P}{K}\right)P$$
$$= 0{,}109\left(1 - \frac{P}{10.000.000}\right)P$$

Setelah mendapatkan persamaan logistiknya maka selanjutnya adalah mencari nilai solusi awal dengan menggunakan metode Runge-Kutta Orde Empat.

**Penentuan Solusi Awal $P_0$, $P_1$, $P_2$ dan $P_3$ Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat**

Setelah menentukan persamaan logistiknya, selanjutnya adalah menentukan nilai solusi awal yaitu $P_0$, $P_1$, $P_2$ dan $P_3$ dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat, serta telah diketahui persamaan logistik, nilai awal dan intervalnya. Diketahui

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}109\left(1 - \frac{P}{10.000.000}\right)P$$

dengan nilai awal $P(0) = 3.047.479$ pada interval [0,63] dan ukuran langka $h = 1$.

a) Untuk $r = 0,\ t_0 = 0,\ P_0 = 3.047.479$

Menghitung solusi awal $P_1$, terlebih dahulu menghitung $K_1, K_2, K_3$ dan $K_4$, sebagai berikut:

$k_1 = hf(t_r, P_r)$
$k_1 = hf(t_0, P_0)$
$= hf(0; 3.047.479)$
$= 1\left[0{,}109\left(1 - \frac{3.047.479}{10.000.000}\right)3.047.479\right]$
$= 230.945{,}513$
$k_2 = hf\left(t_r + \frac{1}{2}h,\ P_r + \frac{1}{2}k_1\right)$
$k_2 = hf\left(t_0 + \frac{1}{2}h,\ P_0 + \frac{1}{2}k_1\right)$
$= hf(0{,}5\ ; 3.162.951{,}757)$
$= 235.715{,}266$
$k_3 = hf\left(t_r + \frac{1}{2}h,\ P_r + \frac{1}{2}k_2\right)$
$k_3 = hf\left(t_0 + \frac{1}{2}h,\ P_0 + \frac{1}{2}k_2\right)$
$= hf(0{,}5\ ; 3.165.336{,}633)$
$= 235.810{,}713$
$k_4 = hf(t_r + h,\ P_r + k_3)$
$k_4 = hf(t_0 + h,\ P_0 + k_3)$
$= hf(1; 3.283.289{,}713)$
$= 240.376{,}673$

Setelah diperoleh nilai $K_1$, $K_2$, $K_3$ dan $K_4$, kemudian disubstitusikan ke persamaan Runge-Kutta orde empat

$$P_{r+1} = P_r + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$P_1 = P_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$= 3.283.208{,}024$$

b) Untuk $r = 1,\ t_1 = 1,\ P_1 = 3.283.208{,}024$

$t_{r+1} = t_r + h$
$t_{0+1} = t_0 + h = 0 + 1 = 1$

Menghitung solusi awal $P_2$, terlebih dahulu menghitung $K_1, K_2, K_3$ dan $K_4$, sebagai berikut:

$k_1 = hf(t_1, P_1)$
$= hf(1; 3.283.208{,}024)$
$= 240.373{,}616$
$k_2 = hf\left(t_1 + \frac{1}{2}h,\ P_1 + \frac{1}{2}k_1\right)$
$= hf(1{,}5\ ; 3.403.394{,}832)$
$= 244.714{,}286$
$k_3 = hf\left(t_1 + \frac{1}{2}h,\ P_1 + \frac{1}{2}k_2\right)$
$= hf(1{,}5\ ; 3.405.565{,}167)$
$= 244.789{,}775$
$k_4 = hf(t_1 + h,\ P_1 + k_3)$
$= hf(2; 3.527.997{,}799)$
$= 248.881{,}984$

Setelah diperoleh nilai $K_1$, $K_2$, $K_3$ dan $K_4$, kemudian disubstitusikan ke persamaan Runge-Kutta orde empat

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$= 3.527.918{,}620$$

c) Untuk $r = 2,\ \ t_2 = 2,\ P_2 = 3.527.918{,}620$

$t_{r+1} = t_r + h$
$t_{1+1} = t_1 + h = 1 + 1 = 2$

Menghitung solusi awal $P_3$, terlebih dahulu menghitung $K_1, K_2, K_3$ dan $K_4$, sebagai berikut :

$k_1 = hf(t_2, P_2)$
$= hf(2; 3.527.918{,}620)$
$= 248.879{,}443$
$k_2 = hf\left(t_2 + \frac{1}{2}h,\ P_2 + \frac{1}{2}k_1\right)$
$= hf(2{,}5\ ; 3.652.358{,}341)$
$= 252.704{,}095$

p-ISSN 2085-7829
e-ISSN 2798-3455

$$k_3 = hf\left(t_2 + \frac{1}{2}h,\ P_2 + \frac{1}{2}k_2\right)$$
$$= hf(2{,}5\,;3.654.270{,}668)$$
$$= 252.760{,}237$$
$$k_4 = hf(t_2 + h,\ P_2 + k_3)$$
$$= hf(3;3.780.678{,}857)$$
$$= 256.294{,}489$$

Setelah diperoleh nilai $K_1$, $K_2$, $K_3$ dan $K_4$, kemudian disubstitusikan ke persamaan Runge-Kutta orde empat

$$P_3 = P_2 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$= 3.780.601{,}766$$

**Penentuan Solusi Numerik dengan Metode Adams-Bashforth**

Setelah mendapatkan nilai-nilai solusi awal selanjutnya menghitung nilai-nilai $f_r$, $f_{r-1}$, $f_{r-2}$, $f_{r-3}$ dengan $r = 3,4,\ldots,n$ dengan mensubstitusikan pada persamaan :

$$P' = \frac{dP}{dt} = m\left(1 - \frac{P}{K}\right)P = f(t,P)$$

setelah itu nilai-nilai tersebut disubstitusikan ke persamaan Adams-Bashforth dengan ukuran langkah $h = 1$.

Untuk $r = 3$

$$f_r = f_3(t_3;P_3) = f_3(3;3.780.601{,}766)$$
$$= 0{,}109\left(1 - \frac{3.780.601{,}766}{10.000.000}\right)3.780.601{,}766$$
$$= 256.292{,}441$$
$$f_{r-1} = f_2(t_2;P_2) = f_2(2;3.527.918{,}620)$$
$$= 0{,}109\left(1 - \frac{3.527.918{,}620}{10.000.000}\right)3.527.918{,}620$$
$$= 248.879{,}443$$
$$f_{r-2} = f_1(t_1;P_1) = f_1(1;3.283.208{,}024)$$
$$= 0{,}109\left(1 - \frac{3.283.208{,}024}{10.000.000}\right)3.283.208{,}024$$
$$= 240.373{,}616$$
$$f_{r-3} = f_0(t_0;P_0) = f_0(0;3.047.479)$$
$$= 0{,}109\left(1 - \frac{3.047.479}{10.000.000}\right)3.047.479$$
$$= 230.945{,}513$$

Nilai $f_r(x_r, y_r)$ yang telah didapatkan disubstitusikan ke persamaan Adams-Bashforth.

Untuk $r = 3,\ P_3 = 3.780.601{,}766$

$$t_{r+1} = t_r + h$$
$$t_{3+1} = t_3 + h = 3 + 1 = 4$$
$$P^*_{r+1} = P_r + \frac{h}{24}(55f_r - 59f_{r-1} + 37f_{r-2} - 9f_{r-3})$$
$$P^*_{3+1} = P_3 + \frac{h}{24}(55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0)$$
$$P^*_4 = 3.780.601{,}766 + \frac{1}{24}(6.227.512{,}17)$$
$$= 4.040.081{,}403$$

**Koreksi Adams-Moulton**

Penentuan solusi numerik dengan Adams-Moulton. Nilai $f_{r+1}$ yang telah didapatkan disubstitusikan ke persamaan Adams-Moulton, dihitung galat relatifnya dan dibandingkan dengan kriteria pemberhentiannya.

$$f_4(t_4, P^*_4) = f_4(4;4.404.081{,}403)$$
$$= 0{,}109\left(1 - \frac{4.404.082{,}403}{10.000.000}\right)4.404.082{,}403$$
$$= 262.456{,}264$$

Untuk $r = 3,\ t_4 = 4,\ P_3 = 3.780.602{,}41$

$$P_{r+1} = P_r + \frac{h}{24}(f_{r-2} - 5f_{r-1} + 19f_r + 9f_{r+1})$$
$$P_{3+1} = P_3 + \frac{h}{24}(f_1 - 5f_2 + 19f_3 + 9f_4)$$
$$P_4 = 3.780.602{,}41 + \frac{1}{24}(6.227.639{,}6)$$
$$= 4.040.086{,}731$$

Dihitung galat relatifnya dan dibandingkan dengan kriteria pemberhentian, $\varepsilon = 5 \times 10^{-9}$

$$\frac{|P_{r+1} - P^*_{r+1}|}{|P_{r+1}|} = \frac{|P_4 - P^*_4|}{|P_4|}$$
$$= \frac{|4.040.086{,}731 - .040.081{,}403|}{|4.040.086{,}731|}$$
$$= 1{,}31878357 \times 10^{-6}$$

Dari hasil tersebut terlihat bahwa galat relatif lebih besar dari kriteria pemberhentian.

$$1{,}30267 \times 10^{-6} > 5 \times 10^{-7}$$

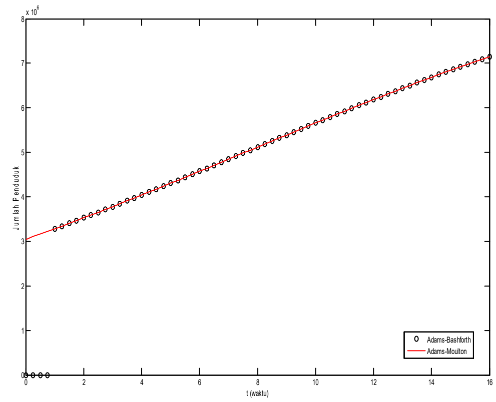
Maka dilakukan analisis kriteria pemilihan ukuran langkah $h$ :

$$\frac{19}{270}\cdot\frac{|P_{r+1} - P^*_{r+1}|}{|P_{r+1}|} = 0{,}0703703704 \times (1{,}31878357 \times 10^{-6})$$
$$= 9{,}28032883 \times 10^{-8}$$

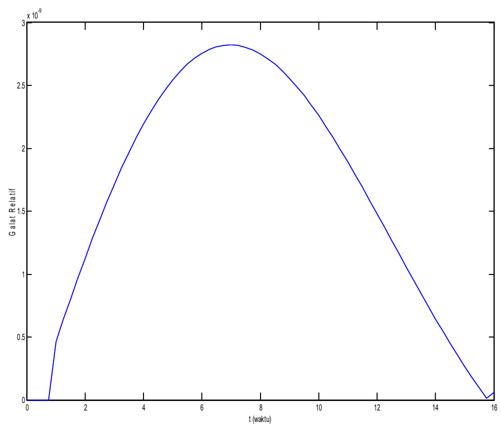
Sehingga didapatkan hasil $9{,}28032883 \times 10^{-8} > 10^{-9}$ maka $h$ diganti menjadi $\frac{h}{2}$ dan kembali ke langkah 3 yaitu menghitung empat solusi awal $P_0$, $P_1$, $P_2$ dan $P_3$ menggunakan metode Runge-Kutta orde empat.

Berdasarkan dari perhitungan tersebut, persamaan logistik ukuran langkah $h$ yang dipilih adalah $\frac{1}{4}$ artinya data diambil setiap 3 bulan dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 5 \times 10^{-9}$. Pada langkah 3 menghitung tiga solusi awal dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat yaitu $P_1 = 3.105.520{,}604$, $P_2 = 3.164.164{,}555$ dan $P_3 = 3.223.398{,}170$. Tiga solusi awal tersebut disubstitusikan ke persamaan logistik untuk memperoleh nilai-nilai $f_r, f_{r-1}, f_{r-2}, f_{r-3}$ . Pada langkah 5 memprediksi nilai $P_{r+1}$ dengan $r$ = 3, 4, ..., n menggunakan metode Adams-Bashforth selanjutnya nilai prediksi tersebut akan diperbaiki dengan menggunakan metode Adams-Moulton. Sehingga didapatkan hasil nilai-nilai solusi numerik dan galat relatifnya. Semua nilai-nilai solusi numeriknya dan galat relatifnya dapat dilihat pada tabel berikut ini :

**p-ISSN 2085-7829**
**e-ISSN 2798-3455**




**Gambar 1.** Solusi numerik menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton




**Gambar 2.** Galat relatif menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton

Pada Gambar 1 terlihat bahwa setiap tahun jumlah penduduk di Provinsi Kalimantan Timur semakin bertambah dan pada Gambar 2 semua solusi numerik telah memenuhi kriteria pemberhentian $\varepsilon = 5 \times 10^{-9}$. Berikut adalah tabel prediksi jumlah penduduk pada Tahun 2010-2025:

**Tabel 3.** Prediksi jumlah penduduk dari tahun 2010-2025

| No | Tahun | Jumlah Penduduk |
|---|---|---|
| 1 | 2010 | 3.047.479 |
| 2 | 2011 | 3.283.209 |
| 3 | 2012 | 3.780.603 |
| 4 | 2013 | 4.040.088 |
| 5 | 2014 | 4.305.054 |
| 6 | 2015 | 4.574.061 |
| 7 | 2016 | 4.845.573 |
| 8 | 2017 | 5.118.002 |
| 9 | 2018 | 5.389.731 |
| 10 | 2019 | 5.659.164 |
| 11 | 2020 | 5.924.757 |
| 12 | 2021 | 6.185.054 |
| 13 | 2022 | 6.438.719 |
| 14 | 2023 | 6.684.559 |
| 15 | 2024 | 6.921.541 |
| 16 | 2025 | 7.148.810 |

Berdasarkan Tabel 3 dapat dilihat prediksi jumlah penduduk di Provinsi Kalimantan Timur pada Tahun 2010-2025 yang didapatkan dari Gambar 1. Pada Tabel 3 terlihat bahwa jumlah penduduk di Provinsi Kalimantan Timur mengalami kenaikan. Berikut ini adalah tabel pertambahan penduduk dari Tahun 2021-2025:

**Tabel 4.** Pertambahan penduduk dari tahun 2021-2025

| No | Tahun | Pertambahan Penduduk |
|---|---|---|
| 1 | 2020-2021 | 260.397 |
| 2 | 2021-2022 | 253.665 |
| 3 | 2022-2023 | 245.840 |
| 4 | 2023-2024 | 236.982 |
| 5 | 2024-2025 | 227.269 |

Pada Tabel 4 juga menunjukkan bahwa setiap tahunnya penduduk Provinsi Kalimantan Timur pada tahun 2021-2025 mengalami pertambahan dengan rata-rata 244.831 dan berdasarkan tabel 4 dapat disimpulkan prediksi jumlah penduduk di Provinsi Kalimatan Timur pada tahun 2021-2025 seperti pada tabel 5 dibawah ini.

**Tabel 5.** Prediksi jumlah penduduk dari tahun 2021-2025

| No. | Tahun | Jumlah Penduduk | Persentase Kenaikan Jumlah Penduduk |
|---|---|---|---|
| 1 | 2021 | 4.053.549 | 4,21% |
| 2 | 2022 | 4.307.214 | 3,94% |
| 3 | 2023 | 4.553.054 | 3,68% |
| 4 | 2024 | 4.790.036 | 3,42% |
| 5 | 2025 | 5.017.305 | 3,18% |

Berdasarkan Tabel 5 dapat dilihat prediksi jumlah penduduk dari tahun 2021-2025 yang didapatkan dari Tabel 4 dan juga pada Tabel 5 dapat dilihat Persentase Kenaikan Jumlah Penduduknya. Dari prediksi jumlah penduduk tersebut dapat dijadikan sebagai acuan dalam mengambil kebijakan misalnya pemerintah bisa menyusun rencana pembangunan yang tepat atau pembangunan ekonomi.

## Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan yang ada serta hasil yang diperoleh pada penelitian, maka dapat disimpulkan bahwa metode Adams-Bashforth-Moulton pada persamaan logistik dapat memprediksi jumlah penduduk di Provinsi Kalimantan Timur. Pada hasil penelitian ini menunjukkan prediksi jumlah penduduk di Provinsi Kalimantan Timur yaitu pada tahun 2021 sebesar 4.053.549 jiwa, tahun 2022 sebesar 4.307.214 jiwa, tahun 2023 sebesar 4.553.054 jiwa, tahun 2024 sebesar 4.790.036 jiwa, tahun 2025 sebesar 5.017.305 jiwa dan juga hasil penelitian ini menunjukkan bahwa setiap tahunnya jumlah penduduk di Provinsi Kalimantan Timur bertambah.

## Daftar Pustaka

Ahmad, Ayyubi. (2019). *Pemodelan Matematika Dengan Menggunakan Persamaan*

**p-ISSN 2085-7829**
**e-ISSN 2798-3455**

*Diferensial Pada Pertumbuhan Penduduk di Indonesia*. Prosiding Sendika, 5(2).

Apriadi., Prihandono, B., & Novianti, E. (2014). *Metode Adams-Bashforth-Moulton Dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial Non Linear*. Buletin Ilmiah Matematika Statistika dan Terapannya (Bimaster), 3(2), 107-116.

Badan Pusat Statikstik Provinsi Kalimantan Timur. (2020). *Proyeksi Penduduk Menurut Kabupaten/Kota (Perempuan + Laki-laki) (Jiwa) 2010-2020*. Samarinda : Badan Pusat Statistik Provinsi Kalimantan Timur.

Bronson, R. & Costa, G. (2007). *Persamaan Diferensial Biasa Edisi Ketiga*. Jakarta : Erlangga.

Conte, S. D. & Carl de Door. (1993). Dasar-dasar Analisis Numerik Suatu Pendekatan Algoritma. Jakarta : Erlangga.

Erwin. (1999). Perumusan Kesalahan Pemotongan Metode Adam Moulton Pada Penyelesaian Masalah Nilai Awal. Jurnal Penelitian Sains, 5, 1-10.

Handiyatmo, D., Sahara, S., & Rangkuti, H. (2010). Pedoman Perhitungan Proyeksi Penduduk dan Angkatan Kerja. Jakarta : Badan Pusat Statistik.

Munir, Rinaldi. (2003). Metode Numerik. Bandung : Informatika.

Nugroho, D. B. (2009). Metode Numerik. Diktat kuliah. Salatiga : Universitas Kristen Satya Wacana.

Pudjaprasetya, S. R. (2011). Persamaan Diferensial. Diktat Kuliah MA2271 Metode Matematika. Bandung : Institut Teknologi Bandung.

Purnomo, Dwi. (2012). Persamaan Diferensial. Malang : Bayumedia Publishing.

Rindengan, Altien, J., & Mananohas, Mans. (2017). Perancangan Sistem Penentuan Tingkat Kesegaran Ikan Cakalang Menggunakan Metode Curve Fitting Berbasis Citra Digital Mata Ikan. Jurnal Ilmiah Sains, 17(2), 162-168.

Rochaida, Eny. (2016). Dampak Pertumbuhan Penduduk Terhadap Pertumbuhan Ekonomi dan Keluarga Sejahtera Di Provinsi Kalimantan Timur. Forum Ekonomi, 18(1).

Susila, I. Nyoman. (1993). Dasar-Dasar Metode Numerik. Jakarta : Proyek Pembinaan Tenaga Kependidikan Pendidikan Tinggi.

Triadmodjo, Bambang. (2002). Metode Numerik. Yogyakarta : Beta Offset.

Wahyuni, M. S., Syarifuddin, S., & Arifuddin, R. (2019). Solusi Numerik Model Verhulst pada Estimasi Pertumbuhan Hasil Panen Padi dengan Metode Adams-Basforth-Moulton (ABM). Journal of Mathematics, Computations, and Statistics, 2(1), 91-98.