MODEL *GEOGRAPHICALLY WEIGHTED WEIBULL REGRESSION* DENGAN KRITERIA PENENTUAN *BANDWIDTH* OPTIMUM *AKAIKE INFORMATION CRITERION*
(Studi Kasus: Indikator Pencemaran Air Biochemical Oxygen Demand di Daerah Hutan Tropis Lembab DAS Mahakam Tahun 2019)

Novianti[1*], Suyitno[1], Meiliyani Siringoringo[1]

[1]Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Mulawarman, Indonesia

Corresponding author: nvnovianti159@gmail.com

Abstrak. Model *Geographically Weighted Weibull Regression* (GWWR) adalah model lokal dari regresi Weibull yang diaplikasikan pada data spasial. Penaksiran parameter model GWWR dilakukan secara lokal di setiap lokasi pengamatan menggunakan bobot spasial. Tujuan penelitian ini adalah memperoleh *bandwidth* optimum dan model GWWR pada data indikator pencemaran air *Biochemical Oxygen Demand* (BOD) dan faktor-faktor yang mempengaruhi BOD di daerah aliran Sungai Mahakam tahun 2019. Metode penaksiran parameter model GWWR adalah *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) yang diselesaikan dengan metode Iteratif Newton-Raphson. Pembobot spasial pada penaksiran parameter dihitung menggunakan fungsi pembobot *Adaptive Gaussian* dan kriteria penentuan *bandwidth* optimum menggunakan *Akaike Information Criterion* (AIC). Kesimpulan penelitian ini adalah *bandwidth* optimum pada 2 lokasi pengamatan di lokasi Belayan Hilir dan Batuq secara berturut-turut sebesar 0,7665 dan 0,7359, sedangkan *bandwidth* optimum pada 25 lokasi pengamatan lainnya adalah sangat besar (∞), dan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap BOD secara lokal adalah konduktivitas atau Daya Hantar Listrik (DHL), sedangkan faktor-faktor yang berpengaruh secara global adalah suhu dan DHL.

Kata Kunci: MLE, GWWR, BOD, AIC, *Adaptive Gaussian*

1 PENDAHULUAN

Distribusi Weibull berasal dari nama ahli Fisika yang berasal dari Sweden yaitu Wallodi Weibull pada tahun 1939. Distribusi Weibull terdiri dari 2 yaitu, memuat tiga parameter antara lain parameter lokasi (*location*), parameter bentuk (*shape*) dan parameter skala (*scale*) dan yang memuat dua parameter antara lain parameter skala dan bentuk [24].

Sebagai pengembangan distribusi Weibull, terdapat Model regresi Weibull merupakan model regresi dimana variabel respon (Y) berdistribusi Weibull yang dikonstruksi dari Fungsi Kepadatan Peluang (FKP) distribusi Weibull dengan parameter skala atau bentuk dinyatakan dalam model regresi [24].

Penggunaan model regresi klasik untuk pemodelan regresi pada data yang mengandung informasi lokasi (*spatial*) dan informasi deskriptif (*attribute*) dan terdapat hubungan antara data dan lokasi pengamatan (data spasial) menghasilkan model yang tidak valid, karena akan menghasilkan penaksir parameter yang bias. Oleh karena itu, pemodelan regresi pada data spasial yang sesuai adalah pemodelan yang bersifat lokal yaitu model *Geographically Weighted Weibull Regression* (GWWR) merupakan salah satu pengembangan model GWR dari model regresi Weibull. Estimasi parameter model GWWR dilakukan secara lokal di setiap lokasi menggunakan bobot spasial (bobot lokasi geografis). Bobot spasial dapat dihitung dengan menggunakan fungsi pembobot yang dipilih [33]. Topik ini perlu dibahas dalam penelitian didasarkan pada data lapangan banyak ditemui berdistribusi Weibull dan merupakan data spasial. Beberapa bidang seperti bidang lingkungan dan kesehatan memerlukan pemodelan GWWR dalam menyelesaikan permasalahan real. Model GWWR pada penelitian ini akan diaplikasikan pada data indikator pencemaran air sungai Mahakam Tahun 2019.

Sungai Mahakam merupakan sungai terpanjang dan terbesar di Kalimantan Timur yang bermuara di selat Makasar. Di sekitar DAS Mahakam terdapat berbagai aktivitas, seperti ekonomi, penambangan batu bara, industri/pabrik serta pemukiman penduduk yang berpotensi mengasilkan limbah domestik maupun non domestik. Hal ini menyebabkan air sungai mahakam berpotensi tercemar [29]. Salah satu Indikator atau parameter yang umum digunakan untuk mendeteksi kualitas air salah satunya adalah *Biochemical Oxygen Demand*. *Biochemical Oxygen Demand* (BOD) adalah suatu karakteristik yang menunjukkan jumlah oksigen terlarut yang diperlukan oleh mikroorganisme (biasanya bakteri) untuk mengurai atau mendekomposisi bahan organik dalam kondisi aerobik [35;21]. Oleh karena itu perlu tindakan pencegahan. Salah satu pencegahan pencemaran air Sungai Mahakam adalah memberikan informasi kepada masyarakat mengenai faktor-faktor yang berpengaruh terhadap meningkatnya peluang air Sungai Mahakam tercemar dengan pemodelan statistika, yaitu pemodelan GWWR pada data indikator pencemaran air BOD.

Berdasarkan uraian di atas, batasan masalah dari penelitian ini dibatasi pada data indikator pencemaran air BOD tahun 2019 dengan kriteria penentuan *bandwidth* optimum menggunakan *Akaike Information Criterion* (AIC) dan tujuan penelitian ini adalah memperoleh *bandwidth* optimum dan model GWWR pada data indikator pencemaran air *Biochemical Oxygen Demand* (BOD) dan faktor-faktor yang mempengaruhi BOD di daerah aliran Sungai Mahakam tahun 2019.

2 TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Data Tersensor

Data dikatakan tersensor apabila data tidak dapat diamati secara lengkap karena individu atau objek penelitian hilang atau mengundurkan diri atau sampai akhir penelitian subjek tersebut belum mengalami kejadian tertentu [18]. Menurut Collet (1994), dalam analisis survival terdapat tiga tipe penyensoran, yaitu sensor kanan (*right censoring*), sensor kiri (*left censoring*), dan sensor interval (*interval censoring*).

2.2 Distribusi Weibull

Fungsi Kepadatan Peluang (FKP) dari distribusi Weibull tiga parameter adalah

$$f(y) = \frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{y-\delta}{\lambda}\right)^{\gamma-1} \exp\left[-\left(\frac{y-\delta}{\lambda}\right)^{\gamma}\right], y > 0; \gamma > 0; \lambda > 0, \tag{1}$$

dengan γ, λ dan δ berturut-turut adalah parameter bentuk (*shape*), parameter skala (*scale*) dan parameter lokasi (*location*).

FKP distribusi Weibull dua parameter adalah

$$f(y) = \frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma-1} \exp\left[-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma}\right], y > 0; \gamma > 0; \lambda > 0, \tag{2}$$

dengan γ adalah parameter bentuk (*shape*) dan λ adalah parameter skala (*scale*) [22]. Fungsi *survival* distribusi Weibull versi skala-bentuk diberikan oleh

$$S(y) = P(Y > y) = \exp\left[-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma}\right], y > 0; \gamma > 0; \lambda > 0 \tag{3}$$

dan fungsi distribusi kumulatif didefinisikan oleh

$$F(y) = P(Y \leq y) = 1 - S(y) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma}\right]. \tag{4}$$

Fungsi *hazard* diberikan oleh

$$h(y) = \frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma-1}, y > 0; \gamma > 0; \lambda > 0. \tag{5}$$

Berdasarkan persamaan (3) dan persamaan (5), pada persamaan (2) dapat didefinisikan oleh

$$f(y) = h(y)S(y). \tag{6}$$

Momem ke-*r* distribusi Weibull versi skala-bentuk dapat dinyatakan dalam bentuk umum

$$E(Y^r) = \lambda\Gamma_r, \tag{7}$$

dengan Γ adalah fungsi Gamma dan Γ_r didefinisikan oleh

$$\Gamma_r = \Gamma\left(\frac{r}{\gamma} + 1\right) \tag{8}$$

Mean dan variansi dari peubah acak *Y* dapat diperoleh berdasarkan persamaan (7), yaitu berturut-turut adalah

$$\mu_Y = E(Y) = \lambda\Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right), \tag{9}$$

dan

$$\operatorname{var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$= \lambda^2 \left[\Gamma\left(\frac{2}{\gamma}+1\right) - \left[\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)\right]^2 \right], \qquad (10)$$
$$= \lambda^2 (\Gamma_2 - \Gamma_1^2),$$

dengan $E(Y^\gamma) = \lambda^\gamma$ [32].

2.3 Penaksiran Parameter Distribusi Weibull Tersensor Kanan

Penaksiran parameter distribusi Weibull menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Berdasarkan FKP yang diberikan oleh persamaan (2) diperoleh fungsi *likelikood* sebagai berikut.

$$L(\boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{y})$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\gamma}{\lambda} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma-1} \exp\left[-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma} \right] \right). \qquad (11)$$

Fungsi *log-likelihood* sebagai berikut

$$\ell(\boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{y}) = \ln[L(\boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{y})] = \sum_{i=1}^{n} \ln[f(\boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{y})]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left((\ln\gamma - \ln\lambda + (\gamma-1)[\ln y_i - \ln\lambda]) - \left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^{\gamma} \right). \qquad (12)$$

Penaksir MLE $\boldsymbol{\theta}_1$ ($\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1 = [\hat{\lambda}\ \hat{\gamma}]^T$) memaksimumkan fungsi *likelihood* $L(\boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{y})$ juga memaksimumkan fungsi *log-likelihood* $\ell(\boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{y})$, vektor $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1 = [\hat{\lambda}\ \hat{\gamma}]^T$ diperoleh dari turunan pertama fungsi $\ell(\boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{y})$ terhadap semua parameter kemudian disamadengankan nol ($\mathbf{0}$) yaitu

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\theta}_1} = \mathbf{0}, \qquad (13)$$

Ruas kiri persamaan (13) dinamakan vektor gradien (**g**), yaitu

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_1) = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\theta}_1} = \left[\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{y})}{\partial \lambda}\ \ \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{y})}{\partial \gamma} \right]^T \qquad (14)$$

Metode alternatif untuk menyelesaikan persamaan *likelihood* untuk mendapatkan penaksiran ML ($\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1$) adalah metode iteratif Newton-Raphson. Algoritma iterasi Newton-Raphson sebagai berikut

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(q+1)} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(q)} - \left[\mathbf{H}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(q)}\right) \right]^{-1} \mathbf{g}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(q)}\right), \qquad (15)$$

dengan $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_1)$ adalah vektor gradien yang diberikan oleh persamaan (13) dan $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_1)$ adalah matriks *Hessian*. Bentuk umum dari matriks *Hessian* adalah [32]

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{y})}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{y})}{\partial \lambda \partial \gamma} \\ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{y})}{\partial \gamma \partial \lambda} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{y})}{\partial \gamma^2} \end{bmatrix}. \qquad (16)$$

2.4 Pengujian Distribusi

Pengujian distribusi data digunakan untuk mengetahui distribusi yang sesuai pada waktu survival. Pengujian distribusi dapat dilakukan menggunakan pendekatan *Kolmogorov-Smirnov* [20]. Hipotesis pengujian distribusi dengan pendekatan KS yaitu

$H_0 : F(y) = \hat{F}(y)$
(Data sampel berasal dari populasi yang berdistribusi Weibull dengan fungsi distribusi $\hat{F}(y)$)

$H_1 : F(y) \neq \hat{F}(y)$
(Data sampel dianggap bukan berasal dari populasi yang berdistribusi Weibull dengan fungsi distribusi bukan $\hat{F}(y)$)

Statistik uji yaitu

$$D = \max\left|\hat{F}(y) - F_0(y)\right|, \tag{17}$$

dimana

$$F_0(y_i) = \frac{\text{banyak data yang} \leq y_i}{n}, \tag{18}$$

dengan $F_0(y)$ adalah fungsi distribusi empiris, y_i adalah data variabel respon pada pengamatan ke-i dan n adalah banyaknya data pengamatan. Daerah kritis adalah menolak H_0 pada taraf signifikansi α jika nilai $D > D_{n,\alpha}$ [20].

2.5 Model Regresi Weibull

Sebagai pengembangan distribusi Weibull, parameter natural, yakni parameter skala (λ) dalam persamaan (2), (3), dan (5) dapat dinyatakan dalam fungsi dari kovariat atau fungsi dari parameter regresi sebagai berikut [12;18;24].

$$\lambda = \lambda(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{x}) = \exp[\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}],$$

atau

$$\ln \lambda = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x} = \beta_{\mathbf{0}} + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_p X_p, \tag{19}$$

dengan $\boldsymbol{\beta}^T = \left[\beta_{\mathbf{0}}\ \beta_1 \ldots \beta_p\right]$ adalah vektor parameter regresi berdimensi $p + 1$ dan $\mathbf{x} = \left[X_0\ X_1 \ldots\ X_p\right]^T$ adalah vektor kovariat atau peubah bebas dengan $X_0 = 1$ [11;12;30;31].

Model regresi untuk *mean* peubah acak *Y* adalah

$$\mu_Y(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) = \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \exp[\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}]. \tag{20}$$

Model *survival* regresi Weibull adalah

$$S(y, \boldsymbol{\theta}) = \exp[-y^\gamma \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}]]. \tag{21}$$

Model *hazard* regresi Weibull ditunjukkan sebagai berikut

$$h(y, \boldsymbol{\theta}) = \gamma y^{\gamma - 1} \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}]]. \tag{22}$$

FKP yang memuat kovariat diberikan oleh

$$f(y, \boldsymbol{\theta}) = \gamma y^{\gamma-1} \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}] \times \exp\,[-y^\gamma \exp[-\gamma\, \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}]]\,, \tag{23}$$

dengan $\boldsymbol{\theta} = \left[\gamma\ \beta_0\ \beta_1 \ldots \beta_p\right]^T$ adalah vektor berdimensi $p + 2$ [30;31;32].

2.6 Penaksiran Parameter Model Regresi Weibull

Berdasarkan FKP yang diberikan oleh persamaan (23) fungsi *likelihood* didefinisikan oleh

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i)^{\delta_i}(S(y_i))^{1-\delta_i} = \prod_{i=1}^{n} h(y_i)^{\delta_i} S(y_i),$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (\gamma {y_i}^{\gamma-1} \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i])^{\delta_i} (\exp[-{y_i}^{\gamma} \exp[-\gamma\, \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i]]). \qquad (24)$$

dengan $\boldsymbol{\theta} = \left[\gamma\ \beta_0\ \beta_1\ \dots\ \beta_p\right]^T$. Fungsi logaritma natural dari fungsi *likelihood* (24) diberikan oleh

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \ln\big(L(\boldsymbol{\theta})\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \delta_i([\ln\gamma + (\gamma - 1)\ln y_i - \gamma \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i]) - {y_i}^{\gamma} \exp[-\gamma\, \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i]. \qquad (25)$$

Penaksir ML($\hat{\boldsymbol{\theta}}$) diperoleh dengan menyelesaikan persamaan *likelihood* yang diberikan oleh

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}, \qquad (26)$$

dengan $\mathbf{0}$ adalah vektor nol berdimensi $p + 2$ dan ruas kiri persamaan (26) adalah vektor gradien berdimensi $p + 2$, yaitu

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \left[\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma}\ \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_0}\ \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_1} \dots \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_p}\right]^T. \qquad (27)$$

Penentuan penasir ML ($\hat{\boldsymbol{\theta}}$) dengan metode Newton-Raphson diperlukan perhitungan vektor gradien dan matriks Hessian. Bentuk umum matriks Hessian adalah [32]

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma^2} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma \partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma \partial \beta_p} \\ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_0 \partial \gamma} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_0^2} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_0 \partial \beta_p} \\ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_1 \partial \gamma} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_1 \partial \beta_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_p \partial \gamma} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_p \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_p \partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_p^2} \end{bmatrix}. \qquad (28)$$

Penaksir parameter model regresi Weibull ($\hat{\boldsymbol{\theta}}$) dapat ditemukan melalui algoritma iterasi Newton-Raphson yang diberikan oleh [17]

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q)} - \left[\,\mathbf{H}\big(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q+1)}\big)\,\right]^{-1} \mathbf{g}\big(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q)}\big), q = 0,1, \dots \qquad (29)$$

2.7 Pengujian Signifikansi Parameter Model Regresi Weibull

Pengujian signifikansi parameter model regresi Weibull terdiri dari dua tahap, yaitu pengujian signifikansi parameter secara serentak dan parsial. Hipotesis pengujian parameter regresi secara serentak adalah

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_p = 0$

(Secara simultan variabel prediktor tidak berpengaruh terhadap variabel respon)

H_1 : Minimal terdapat satu $\beta_k \neq 0; k = 1,2,3,\dots,p$
(Secara simultan variabel prediktor berpengaruh terhadap variabel respon) (30)

Statistik uji pengujian hipotesis nol yang dinyatakan dalam persamaan (30) adalah statistik Wilk's *likelihood ratio* yang diberikan oleh

$$G = 2\left(\ell(\widehat{\Omega}) - \ell(\widehat{\omega})\right), \tag{31}$$

dengan $G \sim \chi_p^2$. Statistik uji yang diberikan persamaan (31) dihampiri oleh

$$G \approx \widehat{\boldsymbol{\beta}}^T\left[\mathbf{I}_{22}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})\right]^{-1}\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \tag{32}$$

dengan $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left[\hat{\beta}_1\ \hat{\beta}_2 \dots \hat{\beta}_p\right]^T$ dan $\left[\mathbf{I}_{22}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})\right]$ adalah partisi *invers* matriks informasi Fisher yang diberikan oleh

$$\left[\mathbf{I}_f(\widehat{\boldsymbol{\theta}})\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{11}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) & \mathbf{I}_{12}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) \\ \mathbf{I}_{21}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) & \mathbf{I}_{22}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Daerah kritis pengujian hipotesis ini adalah menolak H_0 pada taraf signifikansi α jika $G > \chi^2_{(\alpha;p)}$ atau $p - value < \alpha$, dengan $p - value = P(G_v > G)$, G_v adalah peubah acak yang berdistribusi $\chi^2_{(\alpha;p)}$ dan G adalah nilai statistik uji yang diberikan dalam persamaan (32) [22].

Hipotesis pengujian secara parsial adalah
H_0 : $\beta_k = 0$ untuk $k = 0,1,2,,\dots,p$.
H_1 : $\beta_k \neq 0$ untuk $k = 0,1,2,\dots,p$. (34)

Statistik uji pengujian hipotesis nol yang diberikan oleh persamaan (34) adalah statistik Wald yang diberikan oleh

$$W_0 = \frac{\hat{\beta}_k - E(\hat{\beta}_k)}{\sqrt{\mathrm{var}(\hat{\beta}_k)}},$$

di bawah hipotesis nol $E(\hat{\beta}_k) = \beta_k = 0$ sehingga didapat

$$W_0 = \frac{\hat{\beta}_k}{\sqrt{\mathrm{var}(\hat{\beta}_k)}} \sim N(0,1), \tag{35}$$

dengan $\mathrm{var}(\hat{\beta}_k)$ adalah elemen diagonal utama ke-$k+2$ *invers* matriks informasi Fisher $\left[\mathbf{I}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})\right]^{-1} = -\left[\mathbf{H}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})\right]^{-1}$. Daerah kritis pengujian hipotesis (34) adalah menolak H_0 pada taraf signifikansi α, jika $|W_0| > Z_{1-\alpha/2}$ atau $p - value < \alpha$, dimana $p - value = P(|W_v| > W_0) = 1 - 2P(W_v > |W_0|)$ dengan $W_0 \sim N(0,1)$ [22].

2.8 Pendeteksian Multikolinearitas

Multikolinieritas terjadi ketika sebagian besar variabel yang digunakan saling terkait dalam suatu model Regresi [6]. Multikolinieritas dapat dideteksi dengan melihat nilai *Variance Inflation Factor* (VIF) [14]. Nilai *Variance Inflation Factor* (VIF) dapat dirumuskan sebagai berikut

$$VIF_k = \frac{1}{1 - R_k^2}, \tag{36}$$

R_k^2 adalah koefisien determinasi model regresi dari variabel prediktor X_k diregresikan dengan variabel prediktor lainnya. Koefisien determinasi untuk variabel X_k diperoleh menggunakan persamaan berikut.

$$R_k^2 = \frac{\text{SSR}}{\text{SST}} = \frac{\hat{\boldsymbol{\gamma}}^T \mathbf{C}^T \mathbf{X}_k - n\bar{X}_k^2}{\mathbf{X}_k^T \mathbf{X}_k - n\bar{X}_k^2}. \quad (37)$$

dengan $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ adalah vektor penaksir parameter dari model regresi antara X_k dengan variabel prediktor lainnya, **C** adalah matriks yang diperoleh dari matriks **X** dengan menghapus kolom ke-*k*, $\mathbf{X}_k$ adalah vektor berisi variabel prediktor ke-*k*, $\bar{X}_k$ adalah rata-rata variabel prediktor ke-*k* dan *n* adalah banyaknya pengamatan [25]. VIF_k yang lebih besar dari 10 menunjukkan adanya kolinieritas antar variabel prediktor [10].

2.9 Heterogenitas Spasial

Heterogenitas spasial menggambarkan adanya perbedaan karakteristik antar titik lokasi pengamatan [2]. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk pengujian heterogenitas spasial adalah metode *Glejser*. Langkah-langkah yang digunakan pada metode *Glejser* adalah sebagai berikut [10]:

a. Penaksiran parameter model regresi Weibull menggunakan metode MLE yang diselesaikan dengan iterasi Newton-Raphson.
b. Menghitung nilai mutlak dari residual model regresi pada tahap (a), yaitu
$$|\hat{e}_i| = |y_i - \hat{\mu}|, \quad (38)$$
dengan $\hat{\mu}$ diberikan oleh persamaan (20).
c. Meregresikan $|\hat{e}_i|$ terhadap variabel-variabel prediktor menggunakan persamaan
$$|\hat{e}_i| = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \cdots + \beta_p X_{ip} + w_i, \quad (39)$$
Atau dalam perkalian matriks dinyatakan sebagai
$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X} + \mathbf{w}, \quad (40)$$
dengan $\mathbf{e} = [|\hat{e}_1|\ |\hat{e}_2| \dots |\hat{e}_1|]^T$, **w** adalah nilai residual model, yaitu $\mathbf{w} = [w_1\ w_2 \dots w_n]^T$
d. Pengujian hipotesis heterogenitas spasial dengan rumusan hipotesis sebagai berikut.
H_0 : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_n^2 = \sigma^2$ (tidak terdapat heterogenitas spasial)
H_1 : minimal ada satu $\sigma_i^2 \neq \sigma^2; i = 1,2,\dots,n$
(Terdapat heterogenitas spasial) (41)
Statistik uji diberikan oleh
$$F = \frac{\text{JKR}}{\text{JKE}} = \frac{(\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}^T \mathbf{e} - n\bar{e}^2)/v_1}{(\mathbf{e}^T \mathbf{e} - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}^T \mathbf{e})/v_2} \quad (42)$$
dengan JKR dan JKE berturut-turut adalah Jumlah Kuadrat Regresi dan Jumlah Kuadrat *Error*. Statistik uji persamaan (42) berdistribusi *F* dengan derajat bebas pembilang $v_1 = p$ dan penyebut $v_2 = n - p - 1$, dengan p adalah banyaknya variabel prediktor dan *n* adalah banyaknya pengamatan. Daerah kritis pengujian hipotesisnya adalah menolak H_0 pada taraf signifikansi α, jika $F > F_{(\alpha;v_1,v_2)}$, atau jika $p - value < \alpha$, dengan $p - value = P(F_v > F)$, di mana $F_v \sim F_{v_1,v_2}$ dan *F* adalah nilai statistik uji [26].

2.10 Pembobot Spasial Model *Geographically Weighted Regression*

Pembobot berguna untuk mewakili seberapa pengaruhnya individu tersebut di antar lokasi [5]. Pada analisis spasial, diperlukan pembobot spasial pada masing-masing lokasi ke-*i*. Apabila lokasi ke-*j* terletak pada koordinat (u_i,v_i) maka akan diperoleh jarak *euclidean* antara lokasi ke-*i* dan lokasi ke-*j* dengan menggunakan persaman:

$$d_{ij} = \sqrt{\left(u_i - u_j\right)^2 + \left(v_i - v_j\right)^2} \quad (43)$$

[9]

Pembobot spasial dihitung menggunakan fungsi pembobot, salah satu fungsi pembobot adalah fungsi pembobot *Gaussian*. Fungsi pembobot *fixed Gaussian* ditunjukkan pada persamaan berikut :

$$w_{ij} = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{d_{ij}}{b}\right)^2\right], j = 1,2, \dots, n \quad (44)$$

fungsi pembobot *adaptive Gaussian* adalah

$$w_{ij} = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{d_{ij}}{b_i}\right)^2\right], j = 1,2, \dots, n \quad (45)$$

dengan d_{ij} adalah jarak *Euclidean, b* adalah *bandwidth* yang bernilai konstan dan b_i adalah *bandwidth* adaptif atau *bandwidth* yang berbeda untuk setiap lokasi ke-*i* [9].

Menurut Fotheringham, dkk (2002), metode pemilihan *bandwidth* sangat penting digunakan untuk pendugaan fungsi *kernel* yang tepat. Salah satu metode yang digunakan untuk menentukan *bandwidth* optimum adalah metode *Akaike Information Criterion* (AIC). Skor AIC untuk model dengan parameter $\boldsymbol{\theta}$ dihitung sebagai berikut:

$$AIC = -2L\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) + 2v_0, \quad (46)$$

dengan $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ adalah penaksir ML, $L\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$ adalah fungsi *log-likelihood* dan v_0 adalah banyaknya variabel prediktor yang diestimasi [37]. Nilai bandwidth optimum akan memiliki nilai AIC yang minimum [9].

2.11 Model *Geographically Weighted Weibull Regression*

Model *Geographically Weighted Weibull Regression* (GWWR) adalah pengembangan dari model regresi weibull dimana setiap parameter mempertimbangkan letak geografis, sehingga setiap titik lokasi geografis mempunyai nilai parameter regresi yang berbeda-beda [33].

Parameter skala dinyatakan dalam parameter regresi di lokasi $\mathbf{u}_i$ memiliki bentuk

$$\lambda\left(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i)\right) = \exp[\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i], \quad (47)$$

dengan $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}_i) = \left[\beta_0(\mathbf{u}_i)\ \beta_1(\mathbf{u}_i) \dots \beta_p(\mathbf{u}_i)\right]^T$ tergantung pada lokasi geografis $\mathbf{u}_i = [u_{1i}, u_{2i}]^T$. Model *mean* GWWR di lokasi $\mathbf{u}_i$ yaitu

$$\mu_Y\left(y_i, \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)\right) = \Gamma\left(\frac{1}{\gamma(\mathbf{u}_i)} + 1\right) \exp\,[\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i], \quad (48)$$

model *survival* GWWR di lokasi $\mathbf{u}_i$ ditunjukkan dalam bentuk

$$S\left(y_i, \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)\right) = \exp\ \left[-y_i^{\gamma(\mathbf{u}_i)} \exp[-\gamma(\mathbf{u}_i)\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i]\right], \quad (49)$$

model *hazard* GWWR di lokasi $\mathbf{u}_i$ dalam bentuk

$$h\left(y_i, \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)\right) = \gamma(\mathbf{u}_i) y_i^{\gamma(\mathbf{u}_i)-1} \exp[-\gamma(\mathbf{u}_i)\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i]\,, \quad (50)$$

model GWWR untuk FKP di lokasi $\mathbf{u}_i$ diberikan oleh

$$f\left(y_i, \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)\right) = \gamma(\mathbf{u}_i) y^{\gamma(\mathbf{u}_i)-1} \exp[-\gamma(\mathbf{u}_i)\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i] \times \exp\left[-y^{\gamma(\mathbf{u}_i)} \exp[-\gamma(\mathbf{u}_i)\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_i]\right], \quad (51)$$

dengan $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i) = \left[\gamma(\mathbf{u}_i)\ \beta_0(\mathbf{u}_i)\ \beta_1(\mathbf{u}_i) \dots \beta_p(\mathbf{u}_i)\right]^T$ dan $\mathbf{x}_i = \left[1\ X_{1i}\ X_{2i} \dots X_{pi}\right]^T$ [33].

2.11.1 Penaksiran Parameter Model *Geographically Weighted Weibull Regression*

Metode estimasi parameter model GWWR adalah *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). fungsi *likelihood* model GWWR di lokasi $\mathbf{u}_i$ yang didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)) &= \prod_{j=1}^{n} \left[h(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))^{\delta_j} S(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)) | (y_j, \mathbf{x}_j)\right]^{w_{ij}} \\ &= \prod_{j=1}^{n} \left[\left[\left(\gamma(\mathbf{u}_i) y_j^{\gamma(\mathbf{u}_i)-1} \exp\left[-\gamma(\mathbf{u}_i)\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_j\right]\right)^{\delta_j}\right]\right]^{w_{ij}} \times \\ &\quad \prod_{j=1}^{n} \left[\left(\exp\left[-y_j^{\gamma(\mathbf{u}_i)} \exp\left[-\gamma(\mathbf{u}_i)\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_j\right]\right]\right)\right]^{w_{ij}}. \end{aligned} \tag{52}$$

Fungsi *log-likelihood* sebagai berikut

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)) &= \ln L(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\delta_j\left[\ln\gamma(\mathbf{u}_i) + (\gamma(\mathbf{u}_i) - 1)\ln y_j - \gamma(\mathbf{u}_i)\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_j\right] - \\ &\quad \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\left[y_j^{\gamma(\mathbf{u}_i)} \exp\left[-\gamma(\mathbf{u}_i)\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_j\right]\right]. \end{aligned} \tag{53}$$

Estimator ML model GWWR $\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)\right)$ diperoleh dengan memecahkan persamaan *likelihood*

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)} = \mathbf{0}, \tag{54}$$

dengan $\mathbf{0}$ adalah vektor nol dengan dimensi $p + 2$ dan $\partial\ell(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))/\partial\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)$ adalah vektor gradien yang memiliki bentuk umum

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)) &= \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)} \\ &= \left[\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \gamma(\mathbf{u}_i)}\ \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_0(\mathbf{u}_i)}\ \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_1(\mathbf{u}_i)} \dots \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_p(\mathbf{u}_i)}\right]^T. \end{aligned} \tag{55}$$

Metode alternatif untuk menyelesaikan persamaan *likelihood* (54) adalah metode iteratif Newton-Raphson. Diperlukan perhitungan vektor gradien dan matriks Hessian untuk menerapkan algoritma Newton-Raphson. Matriks Hessian untuk model GWWR di lokasi $\mathbf{u}_i$ ditunjukkan oleh

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)) = \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)\partial \boldsymbol{\theta}^T(\mathbf{u}_i)}$$

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \gamma^2(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \gamma(\mathbf{u}_i)\partial \beta_0(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \gamma(\mathbf{u}_i)\partial \beta_1(\mathbf{u}_i)} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \gamma(\mathbf{u}_i)\partial \beta_p(\mathbf{u}_i)} \\ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_0(\mathbf{u}_i)\partial \gamma(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{u}_i)}{\partial \beta_0^2(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_0(\mathbf{u}_i)\partial \beta_1(\mathbf{u}_i)} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_0(\mathbf{u}_i)\partial \beta_p(\mathbf{u}_i)} \\ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_1(\mathbf{u}_i)\partial \gamma(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_1(\mathbf{u}_i)\partial \beta_0(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{u}_i)}{\partial \beta_1^2(\mathbf{u}_i)} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_1(\mathbf{u}_i)\partial \beta_p(\mathbf{u}_i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_p(\mathbf{u}_i)\partial \gamma(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_p(\mathbf{u}_i)\partial \beta_0(\mathbf{u}_i)} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_p(\mathbf{u}_i)\partial \beta_1(\mathbf{u}_i)} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))}{\partial \beta_p^2(\mathbf{u}_i)} \end{bmatrix}. \quad (56)$$

Algoritma Newton-Raphson diberikan oleh

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)^{(q+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)^{(q)} - \left[\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)\right)^{(q+1)}\right]^{-1} \mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)\right)^{(q)}, q = 0,1,2,\ldots$$

Proses iterasi Newton-Raphson akan berhenti bila terpenuhi kondisi konvergen, yaitu selisih $\left\|\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)\right)^{(q+1)} - \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)\right)^{(q)}\right\| \leq \varepsilon$, dan ε adalah bilangan positif yang sangat kecil misal 10^{-12} [33].

2.11.2 Pengujian Kesesuaian Model Regresi Weibull dan Model *Geographically Weighted Weibull Regression*

Pengujian ini dilakukan untuk menguji signifikansi faktor geografis yang memberikan pengaruh pada variabel lokal, yaitu membandingkan kesamaan antara model GWWR dengan model regresi weibul. Hipotesis:

H_0 : $\beta_k(u_i, v_i) = \beta_k; i = 1,2,\ldots,n; k = 0,1,2,\ldots,p$
(Model RW global dan model GWWR identik)
H_1 : minimal ada satu $\beta_k(u_i, v_i) \neq \beta_k;\ ; i = 1,2,\ldots,n; k = 0,1,2,\ldots,p$ (57)
(Model RW global dan model GWWR tidak identik)

Statistik Uji [8]:

$$F_{hit} = \frac{G_1^2/df_1}{G_2^2/df_2}, \quad (58)$$

dengan G_1^2 dan G_2^2 didefinisikan oleh

$$G_1^2 = 2\left(\ell(\hat{\Omega}) - \ell(\hat{\omega})\right), \quad (59)$$

dengan,

$$\ell(\hat{\Omega}) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i\left(\left[\ln\hat{\gamma} + (\hat{\gamma}-1)\ln y_i - \hat{\gamma}\hat{\boldsymbol{\beta}}^T\mathbf{x}_i\right]\right) - y_i^{\hat{\gamma}}\exp[-\hat{\gamma}\hat{\boldsymbol{\beta}}^T\mathbf{x}_i], \quad (60)$$

$$\ell(\hat{\omega}) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i(\ln\hat{\gamma}_0 + (\hat{\gamma}_0 - 1)\ln y_i - \hat{\gamma}_0\hat{\beta}_0) - \sum_{i=1}^{n}\left(y_i^{\hat{\gamma}}\exp[-\hat{\gamma}_0\hat{\beta}_0]\right), \quad (61)$$

dan

$$G_2^2 = 2\left(\ell(\hat{\Omega}_{GW}) - \ell(\hat{\omega})\right). \quad (62)$$

$\hat{\Omega}_{GW} = \left\{\hat{\gamma}, \hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i), \hat{\beta}_1(\mathbf{u}_i), \ldots, \hat{\beta}_p(\mathbf{u}_i), i = 1,2,\ldots,n\right\}$ adalah himpunan dibawah populasi yang memaksimumkan fungsi *log-likelihood* pada persamaan (53). $\ell(\hat{\Omega}_{GW})$ diberikan oleh

$$\ell(\widehat{\Omega}_{GW}) = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\delta_j\left[\ln\hat{\gamma}(\mathbf{u}_i) + (\hat{\gamma}(\mathbf{u}_i) - 1)\ln y_j - \hat{\gamma}(\mathbf{u}_i)\widehat{\boldsymbol{\beta}}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_j\right] - \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\left[y_j^{\hat{\gamma}(\mathbf{u}_i)}\exp\left[-\hat{\gamma}(\mathbf{u}_i)\widehat{\boldsymbol{\beta}}^T(\mathbf{u}_i)\mathbf{x}_j\right]\right], \tag{63}$$

Daerah kritis keseuaian model yaitu menolak H_0 jika $F_{hit} > F_{(\alpha,df_1,df_2)}$ atau jika $p - value < \alpha$, dengan $p - value = P(F_v > F_{hit})$, dimana F_v adalah variabel acak berdistribusi $F_{(df_1,df_2)}$ [32].

2.11.3 Pengujian Simultan Parameter dalam Model *Geographically Weighted Weibull Regression*

Hipotesis untuk menguji apakah $\beta_k(\mathbf{u}_i)$ (koefisien dari variabel penjelas ke-k X_k; $k = 1,2,\dots,p$) adalah konstan di seluruh area yang diteliti diberikan oleh

H_0 : $\beta_k(\mathbf{u}_1) = \beta_k(\mathbf{u}_2) = \cdots = \beta_k(\mathbf{u}_n) = 0,$
H_1 : minimal ada satu $\beta_k(\mathbf{u}_i) \neq 0, i = 1,2,\dots,n$ (64)

Statistik uji untuk uji hipotesis nol yang menyatakan (64) adalah

$$G_k = \sum_{i=1}^{n} \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{u}_i)\left[\mathbf{I}_{22}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)\right)\right]^{-1}\widehat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i), \tag{65}$$

dimana G_k berdistribusi χ^2_{np} , $\widehat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{u}_i) = \left[\hat{\beta}_1(\mathbf{u}_i)\ \hat{\beta}_2(\mathbf{u}_i) \dots \hat{\beta}_p(\mathbf{u}_i)\right]^T$ dan $\left[\mathbf{I}_{22}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})(\mathbf{u}_i)\right]$ adalah partisi matriks $\left[\mathbf{I}_f\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)\right)\right]^{-1}$ yang diberikan oleh

$$\left[\mathbf{I}_f\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)\right)\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{11}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)\right) & \mathbf{I}_{12}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)\right) \\ \mathbf{I}_{21}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)\right) & \mathbf{I}_{22}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_i)\right) \end{bmatrix}. \tag{66}$$

Hipotesis nol yang dinyatakan dalam (2.87) akan ditolak pada taraf signifikansi α, jika nilai $G_k > \chi^2_{(\alpha,np)}$ atau $p - value < \alpha$, dengan $p - value = P(G_v > G_k)$, G_v adalah peubah acak yang berdistribusi $\chi^2_{(\alpha;np)}$ dan G adalah nilai statistik uji yang diberikan dalam persamaan (65) [32].

2.11.4 Pengujian Parsial Parameter dalam Model *Geographically Weighted Weibull Regression*

Pengujian parsial parameter model GWWR digunakan untuk mengetahui signifikansi pada masing-masing parameter $\boldsymbol{\beta}(u_\mathrm{i}, v_\mathrm{i})$. Hipotesis pengujian parameter parsial adalah

H_0 : $\beta_k(u_\mathrm{i}, v_\mathrm{i}) = 0$
H_1 : $\beta_k(u_\mathrm{i}, v_\mathrm{i}) \neq 0;$ (67)

Statistik Uji adalah statistik uji Wald yang diberikan oleh

$$Z_{hit} = \frac{\hat{\beta}_k(u_\mathrm{i}, v_\mathrm{i})}{\mathrm{SE}\left[\hat{\beta}_k(u_\mathrm{i}, v_\mathrm{i})\right]}, \tag{68}$$

dimana,

$$\mathrm{SE}\left[\hat{\beta}_k(u_\mathrm{i}, v_\mathrm{i})\right] = \sqrt{\widehat{\mathrm{var}}\left(\hat{\beta}_k(u_\mathrm{i}, v_\mathrm{i})\right)},$$

$\hat{\beta}_k(u_\mathrm{i}, v_\mathrm{i})$ merupakan taksiran parameter $\beta_k(u_\mathrm{i}, v_\mathrm{i})$ dan $\mathrm{SE}\left[\hat{\beta}_k(u_\mathrm{i}, v_\mathrm{i})\right]$ adalah taksiran *standart error* yang didapatkan dari elemen diagonal ke-$k + 1$ dari matriks varian covarian $\left(\hat{\beta}_k(u_{\mathrm{i}}, v_{\mathrm{i}})\right)$. Daerah kritis hipotesis nol pada persamaan (67) yaitu menolak H_0 pada taraf signifikansi α jika $|Z_{hit}| > Z_{\alpha/2}$ atau $p - value < \alpha$, dengan $p - value = 2(1 - P(Z > |Z_{hit}|)$, dimana Z adalah variabel acak berdistribusi normal baku [22].

2.12 Ukuran Kebaikan Model Regresi Weibull dan Model *Geographically Weighted Weibull Regression*

Ukuran kebaikan model regresi Weibull maupun GWWR selain AIC yang diberikan pada persamaan (46) adalah koefisien determinasi (R^2) yang dihitung menggunakan Pseudo R^2 atau R^2 McFadden's (R^2_{MF}), yaitu

$$R^2_{MF} = 1 - \frac{\ell(\hat{\Omega}_{\mathrm{GW}})}{\ell(\hat{\omega}_{\mathrm{GW}})}, \tag{69}$$

dengan $\ell(\hat{\Omega}_{\mathrm{GW}})$ dan $\ell(\hat{\omega}_{\mathrm{GW}})$ masing-masing adalah maksimum fungsi *log-likelihood* yang diberikan oleh persamaan (63) dan

$$\ell(\hat{\omega}_{\mathrm{GW}}) = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\delta_j\left[\ln\gamma(\mathbf{u}_i) + (\gamma(\mathbf{u}_i) - 1)\ln y_j - \gamma(\mathbf{u}_i)\beta_0(\mathbf{u}_i)\right] - \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\left[y_j^{\gamma(\mathbf{u}_i)}\exp[-\gamma(\mathbf{u}_i)\beta_0(\mathbf{u}_i)]\right]. \tag{70}$$

Koefisien determinasi untuk model regresi Weibull juga dihitung menggunakan persamaan (2.93), dengan $\ell(\hat{\Omega})$ dan $\ell(\hat{\omega})$ masing-masing adalah maksimum *log-likelihood* yang diberikan oleh persamaan (60) dan (61) pada pengujian kesesuaian model regresi Weibull dan model *Geographically Weighted Weibull Regression* [15].

2.13 Interpretasi Model *Geographically Weighted Weibull Regression*

Interpretasi model GWWR dapat menggunakan perhitungan rasio. Berdasarkan persamaan (50), rasio regresi *hazard* Weibull untuk variabel prediktor ke-k adalah [15]

$$Rh_{X_k}(\mathbf{u}_i) = \frac{\hat{h}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)|X_k + 1)}{\hat{h}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))}$$
$$= \frac{\hat{\gamma}(\mathbf{u}_i)y_i^{\hat{\gamma}(\mathbf{u}_i)-1}\exp\left[-\hat{\gamma}(\mathbf{u}_i)\left(\hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i) + \hat{\beta}_1(\mathbf{u}_i)\mathrm{X}_1 + \cdots + \hat{\beta}_k(\mathbf{u}_i)(\mathrm{X}_k + 1) + \cdots + \hat{\beta}_p(\mathbf{u}_i)\mathrm{X}_p\right)\right]}{\hat{\gamma}(\mathbf{u}_i)y_i^{\hat{\gamma}(\mathbf{u}_i)-1}\exp\left[-\hat{\gamma}(\mathbf{u}_i)\left(\hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i) + \hat{\beta}_1(\mathbf{u}_i)\mathrm{X}_1 + \cdots + \hat{\beta}_k(\mathbf{u}_i)\mathrm{X}_k + \cdots + \hat{\beta}_p(\mathbf{u}_i)\mathrm{X}_p\right)\right]}$$
$$= \frac{\exp\left[-\hat{\gamma}(\mathbf{u}_i)\hat{\beta}_k(\mathbf{u}_i)(\mathrm{X}_k + 1)\right]}{\exp\left[-\hat{\gamma}(\mathbf{u}_i)\hat{\beta}_k(\mathbf{u}_i)\mathrm{X}_k\right]} = \exp\left[-\hat{\gamma}(\mathbf{u}_i)\hat{\beta}_k(\mathbf{u}_i)\right] \tag{71}$$

Berdasarkan persamaan (49), rasio regresi *survival* Weibull pada X ke-k adalah [15]

$$RS_{X_k}(\mathbf{u}_i) = \frac{\hat{S}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i)|X_k + 1)}{\hat{S}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}_i))}$$
$$RS_{X_k}(\mathbf{u}_i)$$
$$= \frac{\exp\left[-y_i^{\hat{\gamma}(\mathbf{u}_i)}\exp\left[-\hat{\gamma}(\mathbf{u}_i)\left(\hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i) + \hat{\beta}_1(\mathbf{u}_i)\mathrm{X}_1 + \cdots + \hat{\beta}_k(\mathbf{u}_i)(\mathrm{X}_k + 1) + \cdots + \hat{\beta}_p(\mathbf{u}_i)\mathrm{X}_p\right)\right]\right]}{\exp\left[-y_i^{\hat{\gamma}(\mathbf{u}_i)}\exp\left[-\hat{\gamma}(\mathbf{u}_i)\left(\hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i) + \hat{\beta}_1(\mathbf{u}_i)\mathrm{X}_1 + \cdots + \hat{\beta}_k(\mathbf{u}_i)\mathrm{X}_k + \cdots + \hat{\beta}_p(\mathbf{u}_i)\mathrm{X}_p\right)\right]\right]}$$

(72)

Berdasarkan persamaan (48) dan (71), rasio regresi *mean* Weibull pada X ke-k adalah [15]

$$R\mu_{X_k}(\mathbf{u}_i)=\frac{\hat{\mu}(\boldsymbol{\theta}|X_k+1)}{\hat{\mu}(\boldsymbol{\theta})}$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\hat{\gamma}(\mathbf{u}_i)}+1\right)\exp\left[\hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i)+\hat{\beta}_1(\mathbf{u}_i)\mathrm{X}_1+\cdots+\hat{\beta}_k(\mathbf{u}_i)(\mathrm{X}_k+1)+\cdots+\hat{\beta}_p(\mathbf{u}_i)\mathrm{X}_p\right]}{\Gamma\left(\frac{1}{\hat{\gamma}(\mathbf{u}_i)}+1\right)\exp\left[\hat{\beta}_0(\mathbf{u}_i)+\hat{\beta}_1(\mathbf{u}_i)\mathrm{X}_1+\cdots+\hat{\beta}_k(\mathbf{u}_i)\mathrm{X}_k+\cdots+\hat{\beta}_p(\mathbf{u}_i)\mathrm{X}_p\right]}$$
$$=\frac{\exp\left[\hat{\beta}_k(\mathbf{u}_i)(\mathrm{X}_k+1)\right]}{\exp\left[\hat{\beta}_k(\mathbf{u}_i)\mathrm{X}_k\right]}=\exp\left[\hat{\beta}_k(\mathbf{u}_i)\right]. \quad (73)$$

2.14 Sungai Mahakam

Sungai Mahakam merupakan sungai terbesar yang ada di Kalimantan Timur yang bermuara di selat Makasar. Panjang sungai ini mencapai 920 km dengan luasnya 149.227 km^2 serta memiliki lebar antara 300-500 meter. Sungai ini melewati wilayah kabupaten Kutai Barat bagian hulu hingga kabupaten Kutai Kertanegara dan Samarinda dibagian hilirnya. Daerah Aliran Sungai Mahakam merupakan urat nadi kehidupan sebagian masyarakat Kalimantan Timur, terutama yang masyakatat yang beraktivitas dan hidup dalam kawasan DAS Mahakam. DAS Mahakam selain di manfaatkan masyarakat sebagai pusat kegiatan perekonomian masyarakat, namun DAS Mahakam juga di merupakan pusat dari kegiatan industri, pertanian, pertambangan [29].

2.15 *Biochemical Oxygen Demand*

Biochemical Oxygen Demand (BOD) adalah suatu karakteristik yang menunjukkan jumlah oksigen terlarut yang diperlukan oleh mikroorganisme (biasanya bakteri) untuk mengurai atau mendekomposisi bahan organik dalam kondisi aerobik [35;21]. Pemeriksaan BOD diperlukan untuk menentukan beban pencemaran akibat air buangan penduduk atau industri, dan untuk mendesain sistem-sistem pengolahan biokimia bagi air yang tercemar tersebut [1]. Kandungan BOD berdasarkan standar baku mutu air kelas 1 dapat ditunjukkan pada tabel 2.1.

Tabel 1. Kandungan BOD Standar Baku Mutu Air Kelas 1

Konsentrasi BOD	**Indikasi**
$\leq$ 2 mg/l	Tidak Tercemar
> 2 mg/l	Tercemar

Sumber : PERDA Kalimantan Timur No. 2 Tahun 2011 Kelas 1

2.16 Faktor-faktor yang mempengaruhi Indikator *Biochemical Oxygen Demand*

2.16.1 Suhu

Suhu mempengaruhi reaksi kimia dan biologi yang terjadi di dalam air [27]. Air yang baik harus memiliki temperatur yang sama dengan temperatur udara yaitu 20-30^{o}C. Air yang sudah tercemar mempunyai suhu di atas atau dibawah suhu udara [13]. Semakin tinggi suhu semakin cepat perairan mengalami kejenuhan oksigen yang mendorong terjadinya difusi oksigen dari air ke udara, sehingga konsentrasi oksigen terlarut dalam perairan akan semakin menurun. Apabila jumlah oksigen yang dibutuhkan oleh mikroorganisme semakin banyak maka akan memengaruhi nilai BOD yang juga akan semakin tinggi. Nilai BOD yang tinggi dapat mengindikasikan bahwa air tersebut mengalami pencemaran [34].

2.16.2 Konsentrasi Amonia

Effendi (2003) menyatakan bahwa kadar amonia yang tinggi dapat merupakan indikasi adanya pencemaran bahan organik yang berasal dari limbah domestik, industri dan limpasan (*run off*) pupuk pertanian. Menurut PP No. 82 Tahun 2001 kelas 1, kadar amonia alami dalam air sungai <0,5mg/L. Kadar amonia yang tinggi pada air sungai selalu menunjukkan adanya pencemaran. Konsentrasi amonia yang tinggi menyebabkan konsentrasi BOD juga semakin meningkat [28].

2.16.3 Konduktivitas atau Daya Hantar Listrik

Konduktivitas atau Daya Hantar Listrik (DHL) adalah kemampuan cairan menghantarkan listrik. DHL perairan alami sekitar 20-1500 μmhos [3]. Berdasarkan penelitian Irwan dan Afdal (2016), menyatakan bahwa semakin tinggi suhu, nilai konduktivitas listrik juga semakin tinggi. Apabila suhu semakin tinggi, maka ion-ion bergerak semakin cepat dan nilai konduktivitas listrik juga akan semakin tinggi. Oleh karena itu, jika suhu perairan meningkat sebesar 10°C dapat berdampak terhadap peningkatan konsumsi oksigen sekitar 2-3 kali lipat oleh organisme perairan, sehingga nilai BOD di perairan juga akan meningkat [36].

3 DATA

Tahapan analisis data adalah sebagai berikut.

1) Melakukan analisis statistika deskriptif terhadap data pencemaran kualitas air BOD pada Sungai Mahakam serta faktor-faktor yang diduga mempengaruhinya.
2) Melakukan penaksiran parameter fungsi distribusi.
3) Menguji distribusi data variabel respon, yakni menguji apakah data sampel variabel respon berdistribusi Weibull. Pengujian menggunakan uji Kolmogorov-Smirnov.
4) Menghitung nilai koefisien determinasi variabel predictor.
5) Mendeteksi multikolinearitas antar variabel prediktor dengan kriteria VIF.
6) Menganalisis model regresi Weibull dengan langkah–langkah sebagai berikut.
   a. Melakukan penaksiran parameter model regresi Weibull.
   b. Menghitung nilai AIC dan koefisien determinasi (R^2_{MF}) model regresi Weibull.
   c. Menguji signifikansi parameter model regresi Weibull global, yaitu uji simultan dengan statistik uji *G* dan uji parsial dengan uji *Wald* .
7) Mendeteksi heterogenitas spasial menggunakan metode *Glejser* .
8) Menganalisis model GWWR dengan langkah-langkah sebagai berikut.
   a. Menghitung jarak *Euclidean* antar titik lokasi pengamatan berdasarkan posisi geografis (*latitude* dan *longitude*).
   b. Menentukan lokasi ke-*i* yang akan dilakukan penaksiran parameter model GWWR

c. Menentukan nilai interval *bandwidth* untuk penaksiran parameter pada lokasi pengamatan ke-*i* dengan batas interval bawah adalah maksimum jarak *Euclidean* pada lokasi ke-*i*.
d. Menghitung pembobot spasial pada penaksiran model GWWR untuk lokasi ke-*i* menggunakan fungsi pembobot *adaptive Gaussian* berdasarkan satu *bandwidth* yang dipilih dari interval pada lokasi ke-*i* pada tahap (c).
e. Melakukan penaksiran parameter model GWWR pada lokasi ke-*i* berdasarkan *bandwidth* yang dipilih.
f. Menghitung nilai AIC model GWWR pada lokasi ke-*i* berdasarkan *bandwidth.*
g. Mengulang tahap (d) sampai dengan (f) untuk nilai *bandwidth* yang lain pada tahap (c) di lokasi pengamatan ke-*i*.
h. Menentukan *bandwidth* optimum pada penaksiran parameter model GWWR pada lokasi ke-*i* berdasarkan nilai AIC minimum.
i. Mengulang tahap (c) sampai dengan (h) untuk penaksiran model GWWR pada lokasi pengamatan yang lain.
j. Menguji kesesuaian model regresi Weibull dan model GWWR.
k. Menghitung nilai koefisien determinasi model GWWR.
l. Menguji signifikansi parameter model GWWR secara simultan dan parsial untuk masing-masing lokasi.
m. Mengitung nilai *ratio* fungsi *survival*, fungsi *hazard*, dan fungsi *mean*.
n. Interpretasi model GWWR pada lokasi tertentu.

4 HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Deskripsi Data Penelitian

Deskripsi data dinyatakan dalam statistika deskriptif yang meliputi rata-rata, nilai maksimum, nilai minimum, simpangan baku, dan koefisien variansi. Perhitungan statistika deskriptif data penelitian disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Analisis Statistik Deskriptif

Variabel	Rata-rata	Maksimum	Minimum	Simpangan Baku	Koefisien Variasi (%)
BOD (Y)	0,9267	1,6200	0,4000	0,3688	39,8034
Suhu (X_1)	27,8700	29,0000	26,0000	0,8385	3,0090
Amonia (X_2)	0,2152	1,5600	0,0200	0,3343	155,3440
DHL (X_3)	135,8400	19,0000	957,0000	225,3412	165,8818

Berdasarkan Tabel 2, rata-rata BOD adalah 0,9267 *mg/l* yang berarti bahwa air Sungai Mahakam diindikasikan tidak tercemar karena berada di bawah ambang batas angka baku yaitu 2 *mg/l*. Nilai simpangan baku BOD adalah 0,3688 yang artinya besar peningkatan atau penurunan maksimum BOD dari nilai rata-rata sebesar $\pm$0,3688 *mg/l* dengan koefisien variasi sebesar 39,8034 yang artinya besar penyebaran BOD dari nilai rata-rata sebesar 39,8034%. BOD tertinggi berada di lokasi pengamatan Muara Pahu sebesar 1,62000 *mg/l* sedangkan BOD terendah berada di lokasi pengamatan Sungai Mahakam Nyan, Santan Hulu, Santan Tengah, Sungai Boh, Kota Bangun, dan Mahakam-Boh sebesar 0,4000 *mg/l*.

4.2 Penaksiran Parameter Distribusi Weibull

Metode penaksiran parameter distribusi Weibull untuk data BOD menggunakan metode MLE yang diselesaikan dengan metode iteratif Newton-Raphson. Hasil perhitungan disajikan pada Tabel 3.

Tabel 3. Taksiran Parameter Distribusi Weibull

Parameter	Taksiran
Skala (λ)	1,0427
Bentuk (γ)	2,8460

Berdasarkan hasil penaksiran parameter distribusi Weibull pada Tabel 3 diperoleh taksiran *fungsi survival* adalah

$$\hat{S}(y) = \exp\left[-\left(\frac{y}{1,0427}\right)^{2,8460}\right], \tag{4.1}$$

dan taksiran fungsi distribusi kumulatif atau fungsi distribusi kumulatif teoritis adalah

$$\hat{F}(y) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{y}{1,0427}\right)^{2,8460}\right]. \tag{4.2}$$

4.3 Pengujian Distribusi

Rumusan hipotesis pengujian distribusi yaitu

H_0 : $F(y) = \hat{F}(y)$
(Data BOD berdistribusi Weibull dengan fungsi distribusi $\hat{F}(y)$)
H_1 : $F(y) \neq \hat{F}(y)$
(Data BOD tidak berdistribusi Weibull dengan fungsi distribusi bukan $\hat{F}(y)$)

Statistik uji diberikan oleh persamaan (17) dan hasil perhitungan dapat dilihat pada Tabel 4.

Tabel 4. Pengujian Distribusi Weibull Data *Biochemical Oxygen Demand*

Statistik Uji (D)	$D_{27,(0,10)}$	Keputusan
0,19029	0,2290	Gagal menolak H_0

Berdasarkan hasil perhitungan statistik uji yang disajikan pada Tabel 4 diputuskan gagal menolak H_0 pada taraf signifikansi α sebesar 0,10, hal ini ditunjukkan oleh nilai statistik uji D = 0,19029 < $D_{27,(0,10)}$ = 0,2290. Kesimpulan dari uji hipotesis menyatakan bahwa data BOD berdistribusi Weibull.

4.4 Pendeteksian Multikolinearitas

Pendeteksian multikolinearitas menggunakan kriteria nilai VIF. Hasil perhitungan nilai VIF setiap variabel prediktor dapat dilihat pada Tabel 5.

Tabel 5. Nilai VIF Setiap Variabel Prediktor

Variabel	VIF	Keterangan
Suhu (X_1)	1,1418	Tidak terdapat multikolinearitas
Amonia (X_2)	1,1239	Tidak terdapat multikolinearitas
DHL (X_3)	1,1587	Tidak terdapat multikolinearitas

Berdasarkan nilai VIF pada Tabel 5 dapat disimpulkan bahwa tidak terjadi multikolinearitas antar variabel prediktor. Hal ini ditunjukkan oleh nilai VIF setiap variabel prediktor kurang dari 10.

4.5 Pemodelan Regresi Weibull

Model-model RW penelitian ini adalah model regresi *survival* Weibull yang diberikan oleh persamaan (21), model regresi *hazard* Weibull yang diberikan oleh persamaan (22), dan model regresi Weibul untuk *mean* yang diberikan oleh persamaan (20). Hasil penaksiran parameter ditunjukan pada Tabel 6.

Tabel 6. Penaksiran Parameter Model Regresi Weibull

Parameter	Taksiran
γ	3,6371
β_0	-4,5518
β_1	0,1704
β_2	-0,0737
β_3	-0,0013

Berdasarkan hasil penaksiran parameter pada model RW pada Tabel 6 dan mengacu pada persamaan (21) diperoleh model regresi *survival* Weibull adalah

$$\hat{S}(y_i) = \exp\left[-y_i^{3,6371} \exp[-3,6371(-4,5518 + 0,1704X_{i1} - 0,0737X_{i2} - 0,0013X_{i3})]\right].$$

Model regresi *hazard* Weibull berdasarkan persamaan (22) adalah

$$\hat{h}(y_i) = 3,6371y_i^{2,6371} \exp[-3,6371(-4,5518 + 0,1704X_{i1} - 0,0737X_{i2} - 0,0013X_{i3})].$$

Model regresi Weibull untuk *mean* berdasarkan (20) adalah

$$\hat{\mu}(y_i) = 0,9016 \exp(-4,5518 + 0,1704X_{i1} - 0.0737X_{i2} - 0,0013X_{i3}).$$

4.6 Pengujian Parameter Model Regresi Weibull Secara Serentak

Hipotesis pengujian parameter secara serentak adalah

H_0 : $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$

(Secara serentak variabel prediktor tidak berpengaruh terhadap model RW)

H_1 : Minimal terdapat satu $\beta_k \neq 0; k = 1,2,3$

(Secara serentak variabel prediktor berpengaruh terhadap model RW)

Statistik uji *G* diberikan oleh persamaan (32). Hasil pengujian hipotesis parameter RW secara serentak disajikan pada Tabel 7.

Tabel 7. Pengujian Hipotesis Parameter Regresi Weibull Secara Serentak

Statistik Uji (*G*)	$\chi^2_{0,10(3)}$	*p-value*	Keputusan
26,9201	6,2514	0,0000	Menolak H_0

Berdasarkan hasil perhitungan statistik uji yang ditunjukkan pada Tabel 7, diputuskan menolak H_0 pada taraf signifikansi α sebesar 0,10, hal ini ditunjukkan oleh nilai statistik uji G = 26,9201> $\chi^2_{0,10(3)}$= 6,2514 atau *p-value* = 0,0000 kurang dari α = 0,10. Kesimpulan uji hipotesis ini adalah suhu, konsentrasi amonia dan konduktivitas atau daya hantar listrik (DHL) secara serentak berpengaruh terhadap model RW.

4.7 Pengujian Parameter Model Regresi Weibull Secara Parsial

Hipotesis pengujian parameter secara parsial adalah

$H_0 : \beta_k = 0$

(Variabel prediktor X_k tidak berpengaruh terhadap model RW)

$H_1 : \beta_k \neq 0$

(Variabel prediktor X_k berpengaruh terhadap model RW)

Statistik uji W_0 diberikan oleh persamaan (35) Hasil pengujian hipotesis parameter RW secara parsial disajikan pada Tabel 8.

Tabel 8. Pengujian Hipotesis Parameter Model Regresi Weibull secara Parsial

Variabel	Para-Meter	Nilai Taksiran	Standar Error	$\|W_0\|$	*p-value*	Keputusan
Konstanta (X_0)	β_0	-4,5518	2,2226	2,0479	0,0406	Menolak H_0
Suhu (X_1)	β_1	0,1704	0,0802	2,1247	0,0336	Menolak H_0
Amonia (X_2)	β_2	-0,0737	0,1661	0,4439	0,6571	Gagal Menolak H_0
DHL (X_3)	β_3	-0,0013	0,0003	4,8642	0,000	Menolak H_0

Berdasarkan statistik uji Wald yang diperoleh pada Tabel 8, variabel suhu (X_1) dan DHL (X_3) secara individual berpengaruh terhadap model RW. Hal ini ditunjukkan oleh nilai statistik uji W_0 kedua variabel tersebut lebih dari $Z_{1-\frac{0,10}{2}} = Z_{0,95} = 1,64$ atau *p-value* kedua variabel tersebut kurang dari 0,10 sedangkan variabel Amonia (X_2) secara individual tidak berpengaruh terhadap model RW.

4.8 Pengujian Heterogenitas Spasial

Pengujian heterogenitas spasial dilakukan dengan metode *Glejser*. Adapun hipotesis pengujian heterogenitas spasial adalah

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_{27}^2 = \sigma^2$

(Tidak terdapat heterogenitas spasial pada data BOD)

$H_1 :$ minimal ada satu $\sigma_i^2 \neq \sigma^2;\ i = 1, 2, \cdots, 27$ a

(Terdapat heterogenitas spasial pada data BOD)

Statistik uji F diberikan oleh persamaan (42). Hasil pengujian heterogenitas spasial disajikan pada Tabel 9.

Tabel 9. Pengujian Heterogenitas Spasial

F_{hitung}	$F_{(0,10;3;23)}$	*p-value*	Keputusan
2,4430	2,3387	0,0899	Menolak H_0

Berdasarkan Tabel 9, diperoleh $F_{hitung} = 2,4430 > F_{(0,10;3;23)} = 2,3387$ atau *p-value* = 0,0899 < α = 0,10 maka diputuskan menolak H_0 yang berarti terdapat heterogenitas spasial. Berdasarkan hasil pengujian heterogenitas spasial, diduga pemodelan yang sesuai adalah pemodelan yang bersifat lokal, dalam hal ini menggunakan model *Geographically Weighted Weibull Regression* (GWWR).

4.9 Model *Geographically Weighted Weibull Regression*

Langkah pertama dalam pemodelan GWWR adalah mencari jarak *Euclidean* antar lokasi pengamatan menggunakan persamaan (43). Langkah selanjutnya adalah menentukan *bandwidth* optimum menggunakan kriteria AIC yang diberikan oleh persamaan (46) dengan mencoba 100 *bandwidth* dalam interval [bwb,bwa] yang akan menghasilkan 100 nilai pembobot spasial yang dihitung menggunakan fungsi pembobot *adaptive gaussian* yang diberikan pada persamaan (2.62), 100 nilai AIC, 100 penaksir parameter dan sebuah *bandwidth* optimum berdasarkan nilai AIC minimum dalam interval [bwb,bwa]. Berdasarkan *bandwidth* optimum (b_i) ditentukan lagi interval [bwb,bwa] baru di sekitar nilai b_i. Sehingga diperoleh hasil penaksiran parameter model GWWR, sebagai contoh hasil penaksiran parameter model GWWR untuk lokasi pengamatan ke-1 (Kedang Kepala Hulu), ke-6 (Long Bagun), ke-11 (Belayan Hilir), ke-21 (Batuq), dan ke-27 (Mahakam-Boh) ditampilkan pada Tabel 10.

Tabel 10. Penaksiran Parameter Model *Geographically Weighted Weibull Regression* Beberapa Lokasi

Lokasi	Parameter				
	$\hat{\boldsymbol{\gamma}}$	$\hat{\boldsymbol{\beta}}_0$	$\hat{\boldsymbol{\beta}}_1$	$\hat{\boldsymbol{\beta}}_2$	$\hat{\boldsymbol{\beta}}_3$
1	3,6371	-4,5517	0,1704	-0,0737	-0,0013
6	3,6371	-4,5518	0,1704	-0,0737	-0,0013
11	4,2530	-1,6758	0,0689	-0,0828	-0,0013
21	3,9340	-1,8752	0,0756	-0,0746	-0,0013
27	3,6371	-4,5518	0,1704	-0,0737	-0,0013

Berdasarkan Tabel 10, model GWWR untuk fungsi *survival* pada lokasi ke-1 (Kedang Kepala Hulu), ke-6 (Long Bagun), ke-11 (Belayan Hilir), ke-21 (Batuq), dan ke-27 (Mahakam-Boh) berturut-turut adalah

$$\hat{S}(y_1) = \exp\left[-y_1^{3,6371}\exp\left[-3,6371\left(-4,5517 + 0,1704X_{1,1} - 0,0737X_{1,2} - 0,0013X_{1,3}\right)\right]\right],$$

$$\hat{S}(y_6) = \exp\left[-y_6^{3,6371}\exp\left[-3,6371\left(-4,5518 + 0,1704X_{6,1} - 0,0737X_{6,2} - 0,0013X_{6,3}\right)\right]\right],$$

$$\hat{S}(y_{11}) = \exp\left[-y_{11}^{4,2530}\exp\left[-4,2530\left(-1,6758 + 0,0689X_{11,1} - 0,0828X_{11,2} - 0,0013X_{11,3}\right)\right]\right],$$

$$\hat{S}(y_{21}) = \exp\left[-y_{21}^{3,9340}\exp\left[-3,9340\left(-1,8752 + 0,0756X_{21,1} - 0,0746X_{21,2} - 0,0013X_{21,3}\right)\right]\right],$$

$$\hat{S}(y_{27}) = \exp\left[-y_{27}^{3,6371}\exp\left[-3,6371\left(-4,5518 + 0,1704X_{27,1} - 0,0737X_{27,2} - 0,0013X_{27,3}\right)\right]\right].$$

Model GWWR untuk fungsi *hazard* pada lokasi ke-1(Kedang Kepala Hulu), ke-6 (Long Bagun), ke-11 (Belayan Hilir), ke-21 (Batuq), dan ke-27 (Mahakam-Boh) berturut-turut adalah

$$\hat{h}(y_1) = 3,6371y_1^{2,6371}\exp\left[-3,6371\left(-4,5517 + 0,1704X_{1,1} - 0,0737X_{1,2} - 0,0013X_{1,3}\right)\right],$$

$$\hat{h}(y_6) = 3,6371y_6^{2,6371}\exp\left[-3,6371\left(-4,5518 + 0,1704X_{6,1} - 0,0737X_{6,2} - 0,0013X_{6,3}\right)\right],$$

$$\hat{h}(y_{11}) = 4,2530y_{11}^{3,2530}\exp\left[-4,2530\left(-1,6758 + 0,0689X_{11,1} - 0,0828X_{11,2} - 0,0013X_{11,3}\right)\right],$$

$$\hat{h}(y_{21}) = 3,9340y_{21}^{2,9340}\exp\left[-3,9340\left(-1,8752 + 0,0756X_{21,1} - 0,0746X_{21,2}\right.\right.$$

$-0{,}0013X_{21,3})\big]$,

$\hat{h}(y_{27}) = 3{,}6371 y_{27}^{2,6371} \exp\big[-3{,}6371(-4{,}5518 + 0{,}1704X_{27,1} - 0{,}0737X_{27,2}$
$-0{,}0013X_{27,3})\big]$.

Model GWWR untuk *mean* pada lokasi ke-1(Kedang Kepala Hulu), ke-6 (Long Bagun), ke-11 (Belayan Hilir), ke-21 (Batuq), dan ke-27 (Mahakam-Boh) berturut-turut adalah

$\hat{\mu}(y_1) = 0{,}9016 \exp(-4{,}5517 + 0{,}1704X_{1,1} - 0{,}0737X_{1,2} - 0{,}0013X_{1,3})$,
$\hat{\mu}(y_6) = 0{,}9016 \exp(-4{,}5518 + 0{,}1704X_{6,1} - 0{,}0737X_{6,2} - 0{,}0013X_{6,3})$,
$\hat{\mu}(y_{11}) = 0{,}9096 \exp(-1{,}6758 + 0{,}0689X_{11,1} - 0{,}0828X_{11,2} - 0{,}0013X_{11,3})$,
$\hat{\mu}(y_{21}) = 0{,}9055 \exp(-1{,}8752 + 0{,}0756X_{21,1} - 0{,}0746X_{21,2} - 0{,}0013X_{21,3})$,
$\hat{\mu}(y_{27}) = 0{,}9016 \exp(-4{,}5518 + 0{,}1704X_{27,1} - 0{,}0737X_{27,2} - 0{,}0013X_{27,3})$.

4.10 Pengujian Kesesuaian Model Regresi Weibull dan Model *Geographically Weighted Weibull Regression*

Hipotesis pengujian kesesuaian model yang diberikan oleh persamaan (2.80) adalah

H_0 : $\beta_k(u_i, v_i) = \beta_k; k = 1,2,3; i = 0,1,2,\ldots,27.$
(Model RW global dan model GWWR identik)

H_1 : minimal ada satu $\beta_k(u_i, v_i) \neq \beta_k; k = 1,2,3$ dan $i = 0,1,2,\ldots,27.$
(Model RW global dan model GWWR tidak identik)

Statistik uji F diberikan oleh persamaan (58). Hasil pengujian kesesuaian model disajikan pada Tabel 11.

Tabel 11. Pengujian Hipotesis Kesesuaian Model Regresi Weibull dan Model *Geographically Weighted Weibull Regression*

F_{hitung}	$F_{(0,10;3;81)}$	*p-value*	Keputusan
26,4633	2,1527	0,0000	Menolak H_0

Berdasarkan Tabel 11 diperoleh $F_{hitung} = 26{,}4633 > F_{(0,10;3;81)} = 2{,}1527$ atau *p-value* = 0,0000 < α = 0,10 maka diputuskan menolak H_0 yang berarti bahwa model RW berbeda dengan model GWWR.

4.11 Ukuran Kebaikan Model Regresi Weibull dan Model *Geographically Weighted Weibull Regression*

Perbandingan ukuran kebaikan model RW dan model GWWR dapat dilihat pada Tabel 12.

Tabel 12. Ukuran Kebaikan Model Regresi Weibull dan Model *Geographically Weighted Weibull Regression*

Model	AIC	R^2_{MF}
RW	16,2458	0,6010
GWWR	13,9939	0,6069

Berdasarkan ukuran kebaikan model, model GWWR lebih baik dari pada model RW karena model GWWR memiliki nilai AIC yang lebih kecil dan nilai koefisien determinasi yang lebih besar.

4.12 Pengujian Parameter Model *Geographically Weighted Weibull Regression* secara Serentak

Hipotesis pengujian parameter secara serentak adalah

H_0 : $\beta_k(\mathbf{u}_1) = \beta_k(\mathbf{u}_2) = \cdots = \beta_k(\mathbf{u}_{27}) = 0, k = 1,2,3$
(Secara serentak variabel prediktor tidak berpengaruh terhadap model GWWR)
H_1 : minimal ada satu $\beta_k(\mathbf{u}_i) \neq 0, i = 1,2,\ldots,27$ dan $k = 1,2,3$
(Secara serentak variabel prediktor berpengaruh terhadap model GWWR)

Statistik uji G_k diberikan oleh persamaan (65). Hasil pengujian hipotesis parameter model GWWR secara serentak disajikan pada Tabel 13.

Tabel 13. Pengujian Hipotesis Parameter Model *Geographically Weighted Weibull Regression* Secara Serentak

Statistik Uji (G_k)	$\chi^2_{(0,10;81)}$	***p-value***	**Keputusan**
700,2524	97,6796	0,0000	Menolak H_0

Berdasarkan hasil perhitungan statistik uji yang ditunjukkan pada Tabel 13, diputuskan menolak H_0 pada taraf signifikansi α sebesar 0,10, dimana nilai statistik uji G_k = 700,2524 > $\chi^2_{(0,10;81)}$ = 97,6796 atau *p-value* = 0,0000 < α = 0,10. Kesimpulan uji hipotesis ini adalah suhu, amonia dan konduktivitas atau daya hantar listrik (DHL) secara serentak berpengaruh terhadap model GWWR.

4.13 Pengujian Parsial Parameter Model *Geographically Weighted Weibull Regression*

Hipotesis pengujian parameter parsial untuk k dan i tertentu, dimana $k = 1,2,3$ dan $i = 1,2,\ldots,27$ adalah

H_0 : $\beta_k(u_i, v_i) = 0$
(Variabel prediktor X_k tidak berpengaruh terhadap model GWWR)
H_1 : $\beta_k(u_i, v_i) \neq 0$
(Variabel prediktor X_k berpengaruh terhadap model GWWR)

Sebagai contoh hasil pengujian hipotesis parameter GWWR secara parsial di lokasi pengamatan ke-1 (Kedang Kepala Hulu) dan ke-11 (Belayan Hilir disajikan pada Tabel 14.

Tabel 14. Pengujian Hipotesis Parameter Model *Geographically Weighted Weibull Regression* secara Parsial

Lokasi	**Para-Meter**	**Nilai Taksiran**	***Standard Error***	**$\lvert Z_{hitung} \rvert$**	***p-value***	**Keputusan**
1	β_0	-4,5517	2,2226	2,0479	0,0406	Menolak H_0
(Kedang	β_1	0,1704	0,0802	2,1247	0,0336	Menolak H_0
Kepala	β_2	-0,0737	0,1661	0,4439	0,6571	Gagal menolak H_0
Hulu)	β_3	-0,0013	0,0003	4,8642	0,0000	Menolak H_0
11	β_0	-1,6758	2,9466	0,6626	0,5076	Gagal Menolak H_0
(Belayan	β_1	0,0689	0,0002	0,7619	0,4461	Gagal menolak H_0
Hilir)	β_2	-0,0828	0,1038	0,4703	0,6381	Gagal Menolak H_0
	β_3	-0,0013	0,0020	3,8983	0,0001	Menolak H_0

Berdasarkan hasil pengujian parameter model GWWR secara parsial dan berdasarkan variabel prediktor yang berpengaruh, model GWWR dapat dikelompokkan menjadi 2 kelompok, dapat dilihat pada Tabel 4.16

Tabel 15. Kelompok Model *Geographically Weighted Weibull Regression* Berdasarkan Variabel Prediktor yang Berpengaruh

Kelompok	Variabel yang Berpengaruh	Lokasi Pengamatan	Model Terbaik
1	X_1 dan X_3	Kedang Kepala Hulu, Kedang Kepala Hilir, Karang Mumus Hulu, Karang Mumus Hilir, Sungai Mahakam Nyan, Long Bagun, Tering, Santan Hulu, Santan Tengah, Belayan Hulu, Sungai Boh, Bloro, Pulau Kumala, Kalamur, Kantor Gubernur, Palaran, Anggana, Melak, Muara Pahu, Muara Muntai, Kota Bangun, Outlet Danau Semayang, Jembayan, Tenggarong, Mahakam-Boh	Model global atau model RW
2	X_3	Belayan Hilir dan Batuq	Model lokal atau model GWWR

Berdasarkan Tabel 15, variabel prediktor yang berpengaruh pada model GWWR kelompok pertama adalah suhu dan konduktivitas atau daya hantar listrik (DHL). Sedangkan variabel prediktor yang berpengaruh pada model GWWR kelompok kedua adalah DHL. Berdasarkan pengelompokkan ini variabel DHL berpengaruh disemua lokasi pengamatan.

4.14 Interpretasi Model *Geographically Weighted Weibull Regression*

Interpretasi model GWWR diperoleh dari hasil perhitungan rasio regresi *survival*, regresi *hazard*, dan regresi *mean* pada variabel prediktor yang berpengaruh di setiap lokasi. Sebagai contoh hasil perhitungan rasio regresi *survival*, regresi *hazard*, dan regresi *mean* di lokasi pengamatan ke-11 (Belayan Hilir) ditampilkan pada Tabel 16.

Tabel 16. Nilai Rasio Fungsi *Survival*, Fungsi *Hazard*, dan Fungsi *Mean*

Lokasi	Nilai Rasio	Setelah Kenaikan Nilai 1 Satuan Untuk Prediktor		
		X_1	X_2	X_3
Belayan Hilir	Rasio *Survival*	-	-	0,1249
	Rasio *Hazard*	-	-	1,0055
	Rasio *Mean*	-	-	0,9987

Berdasarkan Tabel 16, nilai rasio fungsi *survival* untuk variabel DHL adalah 0,1249, menunjukkan setiap kenaikan 1 μS/m DHL dan dianggap nilai variabel lainnya tetap akan menurunkan peluang BOD meningkat pada air sungai mahakam di lokasi pengamatan Belayan Hilir menjadi 0,1249 kali. Nilai rasio fungsi *hazard* untuk variabel DHL adalah 1,0055, menunjukkan setiap kenaikan 1 μS/m DHL dan dianggap nilai variabel lainnya tetap maka potensi (*rate*) BOD air Sungai Mahakam di lokasi pengataman Long Bagun meningkat menjadi 1,0055 kali. Nilai rasio fungsi *mean* untuk variabel DHL adalah 0,9987, menunjukkan setiap kenaikan 1 μS/m DHL dan dianggap nilai variabel lainnya tetap akan meningkatkan rata-rata BOD air sungai mahakam di lokasi pengamatan Belayan Hilir menjadi 0,9987 kali atau naik 9,987%.

5 KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pengujian yang telah dilakukan maka kesimpulan yang diperoleh yaitu, *bandwidth* optimum model GWWR pada data indikator pencemaran air BOD di daerah aliran Sungai Mahakam pada tahun 2019 yaitu pada 25 lokasi pengamatan memiliki *bandwidth* optimum yang sangat besar yaitu ∞, sedangkan *bandwidth* optimum pada lokasi pengamatan ke-11 (Belayan Hilir) sebesar 0,7665 dan ke-21 (Batuq) sebesar 0,7359.

Salah satu model *Geographically Weighted Weibull Regression* kelompok 1 adalah model regresi untuk fungsi *survival*, fungsi *hazard*, dan fungsi mean pada lokasi ke-6 (Long Bagun) berturut-turut adalah

$$\hat{S}(y_6) = \exp\left[-y_6^{3,6371}\exp\left[-3,6371\left(-4,5518 + 0,1704X_{6,1} - 0,0737X_{6,2} \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. -0,0013X_{6,3}\right)\right]\right]$$

$$\hat{h}(y_6) = 3,6371y_6^{2,6371}\exp\left[-3,6371\left(-4,5518 + 0,1704X_{6,1} - 0,0737X_{6,2} \right.\right.$$
$$\left.\left. -0,0013X_{6,3}\right)\right]$$

$$\hat{\mu}(y_6) = 0,9016\exp\left(-4,5518 + 0,1704X_{6,1} - 0,0737X_{6,2} - 0,0013X_{6,3}\right)$$

Salah satu model *Geographically Weighted Weibull Regression* kelompok 2 adalah model regresi untuk fungsi *survival*, fungsi *hazard*, dan fungsi mean pada lokasi ke-11 (Belayan Hilir) berturut-turut adalah

$$\hat{S}(y_{11}) = \exp\left[-y_{11}^{4,2530}\exp\left[-4,2530\left(-1,6758 + 0,0689X_{11,1} - 0,0828X_{11,2} \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. -0,0013X_{11,3}\right)\right]\right]$$

$$\hat{h}(y_{11}) = 4,2530y_{11}^{3,2530}\exp\left[-4,2530\left(-1,6758 + 0,0689X_{11,1} - 0,0828X_{11,2} \right.\right.$$
$$\left.\left. -0,0013X_{11,3}\right)\right]$$

$$\hat{\mu}(y_{11}) = 0,9096\exp\left(-1,6758 + 0,0689X_{11,1} - 0,0828X_{11,2} - 0,0013X_{11,3}\right)$$

Faktor-faktor yang berpengaruh terhadap indikator pencemaran air BOD (model GWWR kelompok 1) di lokasi pengamatan Kedang Kepala Hulu, Kedang Kepala Hilir, Karang Mumus Hulu, Karang Mumus Hilir, Sungai Mahakam Nyan, Long Bagun, Tering, Santan Hulu, Santan Tengah, Belayan Hulu, Sungai Boh, Bloro, Pulau Kumala, Kalamur, Kantor Gubernur, Palaran, Anggana, Melak, Muara Pahu, Muara Muntai, Kota Bangun, Outlet Danau Semayang, Jembayan, Tenggarong dan Mahakam-Boh adalah suhu dan konduktivitas atau daya hantar listrik (DHL). Faktor-faktor yang berpengaruh terhadap indikator pencemaran air BOD (model GWWR kelompok 2) Long Bagun dan Batuq adalah DHL.

Penelitian selanjutnya dapat menggunakan kriteria penentuan *bandwidth* optimum lainnya seperti *Cross-Validation* (CV) dan *Generelized Cross-Validation* (GCV).

DAFTAR PUSTAKA

[1] Alaerts. Sri Sumestri. (1984). *Metoda Penelitian Air*. Surabaya: Usaha Nasional.
[2] Anselin, L. & Getis, A. (1992). Spatial Statistical Analysis and Geographic Information System. *The Annals of Regional Science.* 26(1), 19-33.
[3] Boyd, C.E. (1982). *Water Quality in Warmwater Fish Pond.* Alabama, USA: Auburn University Agricultural Experimenta Station.
[4] Collet, D. (1994). *Modelling Survival Data in Medical Research*. New York: Chapman and Hall.
[5] Chasco, C., Garcia, I., & Vicens, J. (2007). Modeling Spatial Variations in Household Disposable Income with Geographically Weighted Regression. *Munich Personal RePEc Archive Paper* No. 1682. 321-359.
[6] Draper, N.R. & Smith, H. (1992). *Applied Regression Analysis, Second Edition*. New York: John Wiley and sons, Inc.
[7] Effendi H., (2003). *Telaah Kualitas Air Bagi Pengelolaan Sumber Daya Alam dan Lingkungan Perairan*. Yogyakarta: Kanisus.
[8] Fathurahman, M., Purhadi, Sutikno, & Ratnasari, V. (2016). "Pemodelan *Geographically Weighted Logistic Regression* pada Indeks Pembangunan Kesehatan Masyarakat di Provinsi Papua". *Prosiding Seminar Nasional MIPA 2016*. 34-42.
[9] Fotheringham, A.S., Brunsdon, C., & Charlton, M.E. (2002). *Geographically Weighted Regression: The Analysis of Spatial Varying Relationships*. UK: John Wiley & Sons.
[10] Gujarati, D.N. (2004). *Basic Econometrics Fourth Edition*. New York: The Mc Graw-Hill Companies.
[11] Hanagal, D.D. (2004). Parametric Bivariate Regression Analysis Based on Censored Samples: A Weibull Model. *Economic Quality Control*. 19(1), 1-8
[12] _______. (2005). A Bivariate Weibull Regression Model. *Economic Quality Control*. 20(1), 143-150.
[13] Hasriati & Nurasia. (2016). "Analisis Warna, Suhu, pH Dan Salinitas Air Sumur Bor di Kota Palopo". *Prosiding Seminar Nasional*. ISSN: 2443-1109. 2(1), 747-896.
[14] Hocking, R. R. (2003). *Methods and Aplications of Linear Model: Regression and The Analysis of Variance, 2th Edition*. Canada: John Wiley & Sons.
[15] Hosmer, D.W., Lemeshow, S., & May, S. (2008), *Applied Survival Analysis. Regression Modeling of Time-to-Event Data*. New Jersey: John Wiley.
[16] Irwan, Fadhilah & Afdal. (2016). Analisis Hubungan Konduktivitas Listrik dengan Total Dissolved Solid (TDS) dan Temperatur pada Beberapa Jenis Air. *Jurnal Fisika Unand.* 5(1), 85-92.
[17] Khuri, A.I. (2003). *Advanced Calculus with Applications in Statistics, 2nd Edition*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
[18] Lawless, J. F. (2003). *Statistical Models and Methods for lifetime Data, 2nd edition*. Hoboken, New Jersey: JohnWiley & Sons. Inc.
[19] Lee, E.T. & Wang, J.W. (2003). *Statistical Methods for Survival Data Analysis Third Edition*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
[20] Mufidah, A. S & Purhadi.(2016). Analisis Survival Pada Pasien Demam Berdarah Dengue (DBD) di RSU Haji Surabaya Menggunakan Model Regresi Weibull. *Jurnal Sains dan Seni ITS.*5(2), 301-306.

[21] Metcalf & Eddy. (1991). *Wastewater Engineering: Treatment, Disposal, Reuse 3rd Edition. (Revised By: G. Tchobanoglous And F.L. Burton)*. New York: McGraw-Hill Inc.

[22] Pawitan, Y. (2001). *In All Likelihood. Statistical Modelling and Inference Using Likelihood*. Oxford UK: Clarendon Press-Oxford.

[23] Pemerintah Daerah Kalimantan Timur. (2011). *Peraturan Daerah Provinsi Kalimantan Timur No. 2 Tahun 2011 Tentang Pengelolaan Kualitas Air dan Pengendalian Pencemaran Air*. Kalimantan Timur: Pemerintah Daerah Kalimantan Timur.

[24] Rinne, H. (2009). *The Weibull Distribution A Handbook*. Germany: CRC Press.

[25] Rencher, A.C & Schaalje, G.B. (2008). *Linear Models in Statistics Second Edition*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc

[26] Rencher, A.C. (2000). *Linear Model in Statistics*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

[27] Saksena D.N., R.K. Garg, & R.J. Rao. (2008). Water quality and pollution status of Chambal River in National Chambal Sanctuary, Madhya Pradesh. *Journal of Environmental Biology*. 29(5), 701-710.

[28] Salahuddin., Fandeli, C., & Sugiharto, E. (2012). Kajian Pencemaran Lingkungan di Tambak Udang Delta Mahakam. *Jurnal Teknologi Sains*. 2(1), 32-47.

[29] Susilowati, Y., Leksono, B.E., & Harsono, E. (2012). "Pemodelan Kualitas Air Sungai Mahakam Sebagai Dasar Perencanaan Pengolahan Lahan Wilayah Provinsi Kalimantan Timur". *Prosiding Pemaparan Hasil Penelitian Pusat Penelitian Geoteknologi LIPI*. ISBN: 978-979-8636-19-6. 153-165.

[30] Suyitno, Purhadi, Sutikno, & Irhamah. (2016). Parameter Estimation of Geographically Weighted Trivariate Weibull Regression Model. *Applied Mathematical Sciences*. 10(18), 861-878.

[31] _________. (2017). Multivariate Weibull Regression Model. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*. 101(9), 1977-1992.

[32] Suyitno. (2017). Penaksiran Parameter dan Pengujian Hipotesis Model Regresi Weibull Univariat. *Jurnal Eksponensial*. 8(2), 179-184.

[33] Suyitno & Sari, N W W. (2019). "Parameter Estimation of Mixed Geographically Weighted Weibull Regression Model". *Journal of Physics. Conference Series* 1277 012046. 1-11.

[34] Taufiqullah. (2020, Agustus 12). *Pengaruh Suhu Terhadap Kualitas Air*. Diakses dari https://www.tneutron.net/blog/pengaruh-suhu-terhadap-kualitas-air/.

[35] Umaly, R.C. & L.A. Cuvin. (1988). *Limnology: Laboratory and field guide,Physico-chemical factors, Biological factors*. Metro Manila: National Book Store Inc.

[36] Yazid, M., Bastianudin, A., & Usada, W. (2007). Pengaruh Ozonisasi Terhadap DO, BOD dan Pertumbuhan Bakteri di dalam Limbah Cair Industri Penyamakan Kulit. *Jurnal Ganendra*, 10(1), 19-25.

[37] Yudi P. (2001). *In All Likelihood, Statistical Modeling and Inference Using Likelihood*. Oxford: Clarendon Press.