

**MODEL REGRESI WEIBULL PADA DATA WAKTU RAWAT
INAP PASIEN PENDERITA PENYAKIT JANTUNG
KORONER DENGAN *EVENT* KEMATIAN
DI RSUD ABDUL WAHAB SJAHRANIE
SAMARINDA**

Hasmiati^{1*}, Suyitno¹, Yuki Novia Nasution¹

¹Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Mulawarman, Indonesia

Corresponding author: hasmiati9797@gmail.com

Abstrak. Regresi Weibull adalah model regresi yang dikembangkan dari distribusi Weibull yang dipengaruhi langsung oleh kovariat. Model yang dikembangkan dalam penelitian ini adalah model regresi *survival* Weibull dan model regresi *hazard* Weibull. Model regresi Weibull pada penelitian ini diaplikasikan pada data waktu (tersensor kanan) rawat inap pasien penderita penyakit jantung koroner di RSUD Abdul Wahab Sjahranie Samarinda tahun 2019-2020. Tujuan penelitian ini, adalah memperoleh penaksiran parameter dan menentukan faktor-faktor yang mempengaruhi model regresi *survival* Weibull dan model regresi *hazard* Weibull. Melalui model regresi *survival* Weibull dapat ditentukan peluang pasien tidak meninggal dan melalui model regresi *hazard* Weibull dapat diketahui laju kematian pasien. Metode penaksiran parameter adalah *maximum estimation likelihood* (MLE) dan penaksir diperoleh melalui metode iteratif Newton-Raphson. Berdasarkan pengujian hipotesis, disimpulkan bahwa faktor-faktor yang berpengaruh terhadap peluang pasien tidak meninggal dan laju kematian pasien adalah tekanan darah sistolik dan kadar kolesterol.

Kata Kunci: *Metode Iteratif Newton-Raphson, MLE, Model Regresi Hazard Weibull, Model Regresi Survival Weibull, Penyakit Jantung Koroner*

1 PENDAHULUAN

Distribusi Weibull memiliki parameter *scale* (skala) dan parameter *shape* (bentuk). Parameter *scale* (skala) distribusi Weibull dinyatakan dalam parameter regresi yang dipengaruhi langsung oleh kovariat. Pembahasan tentang distribusi Weibull hanya terbatas pada penaksiran parameter dan pengujian distribusi. Padahal kenyataannya data waktu *survival* dipengaruhi langsung oleh kovariat. Hal tersebut yang mendasari pengembangan distribusi Weibull menjadi regresi Weibull.

Pemodelan regresi Weibull lebih ditekankan pada perubahan fungsi *survival* dan *hazard* setelah dipengaruhi langsung oleh kovariat. Dalam pengaplikasian regresi Weibull pada data waktu umumnya menjelaskan tentang peluang *survive* dan penentuan laju (*rate*) suatu individu mengalami *event* dimana mengacu pada kematian atau insiden penyakit. Penerapan regresi Weibull biasanya banyak digunakan dalam bidang kesehatan, karena permasalahan yang ada dalam bidang kesehatan maupun kedokteran dapat dimodelkan menggunakan model regresi Weibull. Beberapa penelitian menggunakan teori dan aplikasi model regresi Weibull namun masih terbatas. Permasalahan dalam bidang kesehatan salah satunya penyakit jantung koroner. Penyakit jantung koroner merupakan salah satu bentuk penyakit yang berkaitan dengan jantung dan pembuluh darah yang menjadi penyebab kematian nomor satu di dunia. Penyakit ini disebabkan oleh beberapa faktor salah satunya adalah hipertensi Berdasarkan permasalahan tersebut maka penelitian ini membahas tentang model regresi Weibull pada data waktu rawat inap pasien penderita penyakit jantung koroner dengan *event* kematian di RSUD Abdul Wahab Sjahranie Samarinda dengan penaksiran parameter menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) yang diselesaikan dengan Iteratif Newton-Raphson.

Tujuan pada penelitian ini adalah memperoleh penaksir parameter dan menentukan faktor-faktor yang mempengaruhi model regresi *survival* Weibull dan model regresi *hazard* Weibull.

2 TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Model Regresi Weibull

Model regresi Weibull dapat dinyatakan dalam parameter regresi, yaitu

$$\lambda(\mathbf{x}) = \exp[\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_p X_p] = \exp[\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}], \quad (1)$$

model regresi Weibull untuk fungsi *survival* adalah

$$S(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\lambda(\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x})}\right)^\gamma\right] = \exp\left[-t^\gamma \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}]\right], \quad (2)$$

model regresi *hazard* Weibull adalah

$$h(t) = \gamma t^{\gamma-1} \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}], \quad (3)$$

[2]

2.2 Penaksir Parameter Regresi Weibull

Penaksiran parameter model regresi Weibull *survival* untuk dan model regresi *hazard* Weibull $h(t)$. Metode yang digunakan dalam penaksiran parameter regresi Weibull adalah metode MLE. Langkah awal penaksiran parameter MLE yaitu mendefinisikan fungsi *likelihood*. Definisi fungsi *likelihood*, yaitu

$$L(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{t}, \boldsymbol{\delta}) = \prod_{i=1}^n h(t_i)^{\delta_i} S(t_i), \tag{4}$$

dengan $\boldsymbol{\theta} = [\gamma \beta_0 \beta_1 \beta_2 \dots \beta_p]^T$ maka diberikan fungsi *likelihood*, yaitu

$$L(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{t}, \boldsymbol{\delta}) = \prod_{i=1}^n \left[\gamma t_i^{\gamma-1} \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i] \right]^{\delta_i} \exp[-t_i^\gamma \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i]], \tag{5}$$

Penaksiran parameter ($\hat{\boldsymbol{\theta}}$) dapat ditemukan melalui algoritma iterasi Newton-Raphson yang diberikan oleh

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q)} - [\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q+1)})]^{-1} \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q)}), q = 0, 1, \dots \tag{6}$$

(Khuri, 2003)

Vector gradien $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$ adalah

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \left[\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma} \quad \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_0} \quad \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_1} \quad \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_2} \quad \dots \quad \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_p} \right]^T, \tag{7}$$

Komponen-komponen vektor gradien pada Persamaan (2.36) dinyatakan dalam bentuk umum yaitu

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma} &= \sum_{i=1}^n \left(\delta_i \left[\frac{1}{\gamma} + \ln t_i - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i \right] \right) + \\ &\quad \sum_{i=1}^n \left([\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i - \ln t_i] t_i^\gamma \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i] \right), \end{aligned} \tag{8}$$

dan

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_k} = \sum_{i=1}^n (\delta_i \gamma X_{ki} + \gamma t_i^\gamma X_{ki} \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i]), \text{ untuk } k = 0, 1, 2, \dots, p. \tag{9}$$

Bentuk umum matriks Hessian adalah

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma^2} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma \partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma \partial \beta_p} \\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_0 \partial \gamma} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_0^2} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_0 \partial \beta_p} \\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_1 \partial \gamma} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_1 \partial \beta_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_p \partial \gamma} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_p \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_p \partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_p^2} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Turunan orde pertama diberikan Persamaan (16) dan (17), maka elemen-elemen matriks Hessian yang diberikan Persamaan (18) dalam bentuk umum adalah

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma^2} = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\delta_i}{\gamma^2} + \left[[\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i - \ln t_i] t_i^\gamma \right] \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i] [\ln t - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i] \right), \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_k \partial \beta_k} = \sum_{i=1}^n \left(-\gamma^2 t_i^\gamma X_{ki} X_{ki} \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i] \right), \quad (12)$$

dan

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma \partial \beta_k} &= \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_k \partial \gamma} \\ &= \sum_{i=1}^n -\delta_i X_{ki} + \sum_{i=1}^n \left([1 - \gamma (\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i - \ln t_i)] X_{ki} t_i^\gamma \exp[-\gamma \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i] \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Berdasarkan matriks Hessian yang diberikan oleh Persamaan (18), didapatkan matriks informasi Fisher yaitu

$$[\mathbf{I}_f(\hat{\boldsymbol{\theta}})] = -E[\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}})] = -[\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]. \quad (14)$$

Model terbaik didapatkan dengan membandingkan sejumlah kemungkinan model dengan melihat nilai *Akaike Information Criterion* (AIC). Nilai AIC dapat diperoleh dari persamaan berikut

$$AIC = -2 \ln \hat{L}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + 2k \quad (15)$$

2.3 Pengujian Hipotesis Parameter Regresi Weibull

2.3.1 Pengujian Secara Serentak

Uji serentak dilakukan untuk memeriksa apakah parameter-parameter yang ditaksir memberikan model regresi yang layak (*fit*) atau belum. Hipotesis pengujiannya adalah:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = 0$$

(Model Regresi Weibull tidak layak (tidak *fit*))

$$H_1 : \text{paling sedikit ada satu } k \neq 0 ; k = 1, 2, \dots, p$$

(Model Regresi Weibull layak (tidak *fit*))

Statistik uji *G* berdistribusi χ_p^2 . Statistik uji *G* dapat didekati oleh

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^T [\mathbf{I}_{22}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1} \hat{\boldsymbol{\beta}}, \quad (16)$$

dimana $\hat{\beta} = [\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2 \dots \hat{\beta}_p]^T$ dan $[I_{22}(\hat{\theta})]$ diperoleh dari matriks invers informasi Fisher yang diberikan oleh Persamaan (18) dengan menghapus baris pertama dan kedua, serta kolom pertama dan kedua.

Pengujian daerah kritis dilakukan dengan membandingkan antara nilai statistik uji G dan nilai table $\chi^2_{(a,p)}$ pada taraf signifikan α . H_0 ditolak jika nilai $G > \chi^2_{(a,p)}$ atau $P_{value} < \alpha$ didefinisikan oleh $P_{value} = P(G_v > G)$ dengan G_v adalah variabel acak berdistribusi $\chi^2_{(a,p)}$. [3]

2.3.2 Pengujian Secara Parsial

Uji Parsial dilakukan untuk mengetahui apakah variabel bebas atau kovariat tertentu secara individual berpengaruh terhadap model regresi Weibull. Hipotesis pengujiannya adalah:

$$H_0 : \beta_k = 0$$

(Variabel bebas X_k tidak berpengaruh terhadap model regresi Weibull)

$$H_1 : \beta_k \neq 0 ; k = 1, 2, \dots p$$

(Variabel bebas X_k berpengaruh terhadap model regresi Weibull)

Statistik uji menggunakan *Uji-Wald*

$$W_{hitung} = \frac{\hat{\beta}_k - E(\hat{\beta}_k)}{SE(\hat{\beta}_k)} \sim N(0,1),$$

dimana hipotesis nol $E(\hat{\beta}_k) = \beta_k = 0$ sehingga diperoleh

$$W_{hitung} = \frac{\hat{\beta}_k}{\sqrt{\text{var}(\hat{\beta}_k)}} \sim N(0,1), \tag{17}$$

Pengujian daerah kritis Pengujian daerah kritis dilakukan dengan membandingkan antara nilai statistik uji pada taraf signifikan α . H_0 ditolak jika nilai $|W| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ atau $P_{value} < \alpha$ didefinisikan oleh $P_{value} = P(|W| > W_{hitung}) = 1 - 2P(|W| > W_{hitung})$ dengan W adalah variabel acak berdistribusi $N(0,1)$ [3].

3 DATA

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data waktu rawat inap pasien penderita penyakit jantung koroner yang ada di RSUD Abdul Wahab Sjahranie Samarinda. sampel pada penelitian ini ada sebanyak 45 pasien. *Event* pada penelitian ini adalah Kematian. Data yang mengalami *event* sebanyak 35 pasien. Variabel yang digunakan adalah variabel respon yaitu waktu rawat inap, dan kovariat adalah umur (X_1), tekanan darah sistolik (X_2), kadar HDL (X_1), kadar LDL (X_1), kadar kreatinin (X_1), dan kadar kolesterol total (X_1).

4 HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Penaksir Parameter Regresi Weibull

Model Regresi Weibull pada penelitian ini melibatkan 4 kovariat yaitu umur (X_1), tekanan darah sistolik (X_2), kadar LDL (X_3), dan kadar kolesterol (X_4). Model regresi *survival*, yaitu

$$S(t) = \exp[-t^\gamma \exp[-\gamma(\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_4 + \beta_4 X_6)]],$$

dan model regresi *hazard*, yaitu

$$h(t) = \gamma t^{\gamma-1} \exp[-\gamma(\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_4 + \beta_4 X_6)].$$

Metode penaksiran parameter regresi Weibull adalah MLE yang diselesaikan dengan metode iteratif Newton-Raphson. Hasil perhitungan dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1: Penaksiran Parameter Distribusi Weibull

Parameter	Taksiran
γ	1,4817
β_0	6,4389
β_1	-0,024678
β_2	-0,015549
β_3	0,0054275
β_4	-0,0088250

Berdasarkan Tabel 1 diperoleh hasil penaksiran parameter model regresi *survival* Weibull adalah

$$\hat{S}(t) = \exp[-t^{1,4817} \exp[9,5405 - 0,0365X_1 - 0,02304X_2 + 8,0419 \times 10^3 X_4 - 0,013076X_6]],$$

dan model regresi *hazard* Weibull adalah

$$\hat{h}(t) = 1,4817 t^{0,4817} \exp[9,5405 - 0,0365X_1 - 0,02304X_2 + 8,0419 \times 10^3 X_4 - 0,013076X_6],$$

4.2 Pengujian Hipotesis Parameter Model Regresi Weibull Secara Serentak

Pengujian hipotesis parameter secara serentak bertujuan untuk mengetahui apakah parameter-parameter yang ditaksir memberikan model regresi yang layak (*fit*). Pengujian secara serentak juga bertujuan untuk mengetahui apakah kovariat yaitu umur, tekanan darah sistolik, LDL, dan kolesterol secara bersama-sama berpengaruh terhadap model regresi Weibull. Berikut hipotesis pengujian

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$$

(Model Regresi Weibull tidak layak (tidak *fit*))

$$H_1 : \text{paling sedikit ada satu } \beta_k \neq 0 ; k = 1, 2, 3, 4$$

(Model Regresi Weibull layak (*fit*))

Statistik uji yang digunakan adalah uji G , dengan $G \sim \chi_4^2$. Hasil pengujian secara serentak dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2: Hasil Pengujian Secara Serentak

Statistik Uji G	$\chi_{(0,05;4)}^2$	P-value	Keputusan
11,6951	11,070	0,019769	Menolak H_0

Berdasarkan hasil perhitungan pada Tabel 2, maka diputuskan menolak H_0 pada taraf signifikansi 0,05, karena nilai $G = 11,6951 > \chi^2_{(0,05;4)} = 11,070$ atau $P_{value} = 0,019769 < \alpha = 0,05$. Kesimpulan dari pengujian serentak adalah model regresi Weibull layak (*fit*) atau kovariat umur (X_1), tekanan darah sistolik (X_2), kadar LDL (X_3), dan kadar kolesterol (X_4) secara bersama-sama berpengaruh terhadap peluang tidak meninggal dan laju kematian pasien penderita Penyakit Jantung Koroner.

4.3 Pengujian Hipotesis Parameter Model Regresi Weibull Secara Parsial

Pengujian hipotesis parameter secara parsial dilakukan untuk mengetahui apakah kovariat tertentu secara individual berpengaruh terhadap model regresi Weibull. Hipotesis pengujiannya untuk k tertentu ($k = 1,2,3,4$) adalah

$$H_0 : \beta_k = 0$$

(Variabel bebas X_k tidak berpengaruh terhadap model regresi Weibull)

$$H_1 : \beta_k \neq 0 ; k = 1,2,3,4$$

(Variabel bebas X_k berpengaruh terhadap model regresi Weibull)

Statistik uji yang digunakan adalah uji Wald dengan $W \sim N_{(0,1)}$. Hasil pengujian dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3: Hasil Pengujian Secara Parsial

Kovariat (Koefisien)	W_{hitung}	P_{value}	Keputusan
Umur (β_1)	1,2714	0,20357	Gagal tolak H_0
Tekanan darah sistolik (β_2)	3,0624	0,0021955	Menolak H_0
Kadar LDL (β_3)	1,3082	0,190805	Gagal tolak H_0
Kadar Kolesterol (β_4)	2,5811	0,0098593	Menolak H_0

Berdasarkan Tabel 3, nilai W_{hitung} untuk kovariat tekanan darah sistolik (X_2) dan kadar kolesterol total (X_4), masing-masing lebih dari 1,96 atau p -value kurang dari 0,05, sehingga diputuskan menolak H_0 pada taraf signifikansi 5%, ini berarti kovariat tekanan darah sistolik (X_2) dan kadar kolesterol total (X_4) secara individual berpengaruh terhadap peluang pasien tidak meninggal dan laju kematian pasien penderita penyakit jantung koroner.

5 KESIMPULAN

Kesimpulan penelitian ini adalah:

1. Model regresi *survival* Weibull yang menyatakan peluang pasien tidak meninggal (*survive*) setelah dirawat selama t (hari) adalah

$$\hat{S}(t) = \exp \left[-t^{1,4817} \exp [9,5405 - 0,0365X_1 - 0,02304X_2 + 8,0419 \times 10^3 X_4 - 0,013076X_6] \right].$$

2. Model regresi *hazard* Weibull yang menyatakan laju kematian pada saat perawatan t (hari) adalah

$$\hat{h}(t) = 1,4817t^{0,4817} \exp [9,5405 - 0,0365X_1 - 0,02304X_2 + 8,0419 \times 10^3 X_4 - 0,013076X_6].$$

3. Faktor-faktor yang mempengaruhi model regresi *survival* Weibull dan *hazard* Weibull dengan menyatakan peluang pasien tidak meninggal dan laju kematian pasien penderita penyakit jantung koroner di RSUD Abdul Wahab Sjahranie Samarinda adalah tekanan darah sistolik dan kadar kolesterol total. Saran bagi peneliti yang tertarik pada metode ini dapat mengaplikasikan pada penyakit lainnya, seperti penyakit *stroke*.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Furqon, A. dan Purhadi. (2014). Analisis Regresi Weibull Untuk Mengetahui FaktorFaktor Yang Mempengaruhi Laju Perbaikan Klinis Penderita Stroke. (Studi Kasus di RSU Haji Surabaya). Paper and Presentations. Statistika. Digital Library Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Diunduh pada tanggal 23 Februari 2018 pukul 14.22 WIB melalui <http://digilib.its.ac.id/ITS-paper13121140006634/34861>
- [2] Gustiani, M., Suyitno, Nasution, Y., N. (2019). Pengaplikasian Model Regresi Weibull Univariat Paada Data Waktu (Tersensor Kanan) Rawat Inap Pasien DBD di RS Dirgahayu Samarinda. *Jurnal Eksponensial*. 5(158-163).
- [3] Pawitan, Y. (2001). *In All Likelihood Statistical Modelling and Inference Using Likelihood*. Sweden: Clarendon Press-Oxford.
- [4] Khuri, A. I. (2003). *Advanced Calculus with Applications in Statistics 2nd Edition*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc. Hoboken