SIFAT TERBATAS MODULAR PADA RUANG BARISAN ORLICZ

Haryadi [1*]

[1]Prodi Ilmu Komputer, Fakultas Bisnis dan Informatika, Universitas Muhammadiyah Palangkaraya, Indonesia

[*]*Corresponding author:* haryadi@umpr.ac.id

Abstrak. Dalam makalah ini dikonstruksi topologi pada ruang barisan Orliz dengan menggunakan persekitaran modular titik nol. Persekitaran tersebut memimiliki sifat seimbang, menyerap dan simetris. Dengan menggunakan persekitaran tersebut, sifat-sifat barisan konvergen modular dan himpunan terbatas modular ditelaah. Selanjutnya diperolehnya hubungan antara himpunan terbatas modular dan himpunan barisan konvergen modular.

Kata Kunci: *fungsi Orlicz, modular, terbatas.*

1 PENDAHULUAN

Di dalam pembahasan mengenai kekonvergenan di ruang modular sering digunakan pedekatan konvergen terhadap norma. Di dalam ruang modular selain terdapat kekonvegenan norma juga terdapat jenis kekonvergenan modular. Kekonvergenan modular lebih lemah dibandingkan kekonvergenan norma, yakni konvergen norma berakibat konvergen modular namun sebaliknya konvergen modular belum tentu konvergen norma [1].

Salah satu cara untuk mempelajari kekonvergenan adalah melalui pendekatan topologi. Ada beberapa pendekatan dalam membahas sifat-sifat topologi di ruang modular yang telah dikerjakan oleh para peneliti. Topologi pada beberapa ruang barisan ditelaah di dalam [2]. Kolk mendefinisikan topologi pada ruang barisan Orlicz diperumum dengan menggunakan fungsi modulus [3]. Konstruksi ruang modular menjadi ruang metrik modular diperkenalkan oleh Chistyakov ([4], [5]). Sementara itu topologi lemah* (*weak* topology*) pada ruang modular ditelaah di dalam [6]. Hajji mengkonstruksi ruang vektor topologi pada ruang modular menggunakan basis lokal [7]. Aplikasi lanjut modular pada teori titik tetap telah dilakukan oleh [8]. Perkembangan lainnya adalah diperkenalkannya ruang vektor topologi termodulasi oleh Kozlowski [9].

Salah satu ruang modular yang sangat dikenal adalah ruang barisan Orlicz. Modular pada ruang barisan ini memiliki sifat konveks, yang mana sifat tersebut belum tentu dimiliki oleh ruang modular pada umumnya. Di dalam konstruksi ruang vektor topologi, basis lokal yang bersifat konveks memegang peranan yang penting [10]. Oleh karena itu terbuka kemungkinan di dalam ruang barisan Orlicz dikonstruksi ruang vektor topologi dengan menggunakan basis lokal yang didefinisikan melalui modular. Dalam makalah ini ditelaah sifat-sifat topologi pada ruang barisan Orlicz yang dikonstruksi melalui persekitaran modular. Selanjutnya dengan topologi yang terbentuk, ditelaah sifat-sifat konvergensi modular dan keterbatasan modular di ruang barisan tersebut.

2 TINJAUAN PUSTAKA

Definition 1. *Diketahui X ruang vektor real atau kompleks.* **Pseumodular** *pada X adalah fungsi* $\rho : X \to [0, \infty]$ *sehingga untuk setiap* $x, y \in X$ *berlaku*

(1) $\rho(0) = 0$,

(2) $\rho(-x) = \rho(x)$ *untuk X ruang linear atas lapangan real dan* $\rho(e^{itx}) = \rho(x)$ *untuk X ruang linear atas lapangan kompleks*

(3) $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ *dengan* $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$.

Jika kondisi (1) ditambah kondisi $\rho(x) = 0$ *berakibat* $x = 0$, *maka* ρ *dinamakan* **modular**. *Jika kondisi (3) diganti dengan :* $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\rho(x) + \beta\rho(y)$

$dengan\, \alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$, maka ρ dinamakan modular konveks. Selanjutnya ruang linear

$$X_\rho = \left\{x \in X: \lim_{\lambda \to 0} \rho(\lambda x) = 0\right\}$$

dinamakan ruang modular *[11]*.

Definition 2. *Barisan (x_n) di dalam ruang modular $X\rho$ dikatakan konvergen modular ke x jika terdapat $\lambda > 0$ sehingga $\rho\big(\lambda(x_n - x)\big) \to 0$ jika $n \to \infty$.*
Notasi $x_n \xrightarrow{\rho} x$ menyatakan barisan (x_n) konvergen modular ke x.

Definition 3. *Diketahui ρ pseumodular pada ruang vektor real (kompleks) X. Himpunan $E \subset X_\rho$ dikatakan terbatas-ρ, jika untuk setiap barisan (x_n), $x_n \in E$ dan sebarang barisan bilangan $\varepsilon_n \to 0$ berlaku $\rho(\varepsilon_n x_n) \to 0$.*

Notasi ω menyatakan ruang barisan bernilai real dengan operasi jumlahan dan perkalian skalar sebagai berikut: untuk setiap $x = (x_k), y = (y_k) \in \omega$ dan skalar $\alpha, x + y = (x_k + y_k)$ dan $\alpha x = (\alpha x_k)$. Barisan dengan suku-suku di dalam ω dituliskan $(x^{(n)})$, dengan $x^{(n)} = (x^{(n)}) = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots)$ untuk setiap bilangan asli n. Untuk $U \subset \omega$, dan $x \in \omega$, $x + U = \{z \in \omega : z = x + y \text{ untuk suatu } y \in U\}$ dan $\alpha U = \{z : z = \alpha y \text{ untuk suatu } y \in U\}$.

Diketahui (X, T) ruang vektor topologi, yakni ruang topologi pada ruang linear X di mana operasi jumlahan dan operasi perkalian skalar kontinyu, dan $U \subset X$.

1) U dikatakan seimbang jika $\lambda U \subset U$ untuk setiap λ dengan $|\lambda| \leq 1$
2) U dikatakan menyerap jika untuk setiap $x \in X$ terdapat $\lambda > 0$ sehingga $\lambda x \in U$.
3) U dikatakan konveks jika $\lambda, \beta \geq 0$ dengan $\lambda + \beta \leq 1$ berakibat $\lambda x + \beta y \in U$ untuk setiap $x, y \in U$.
4) U dikatakan simetris jika $-U = U$, di mana $-U = \{x : x = -y, y \in U\}$.

Salah satu cara membentuk ruang topologi adalah melalui basis lokal. Diketahui X_ρ ruang modular. Untuk $r > 0$, himpunan $U_r = \{x \in X_\rho : \rho(x) < r\}$ dinamakan persekitaran-ρ titik nol di dalam X_ρ.

Uraian mengenai fungsi Orlicz berikut bersumber dari [12]. Fungsi Orlicz ϕ adalah fungsi $\phi : R \to [0, \infty)$ dengan sifat-sifat: genap, naik monoton, kontinyu, konveks, $\phi(t) = 0$ jika dan hanya jika $t = 0$ dan $\lim_{t \to \infty} \phi(y) = \infty$. Fungsi Orlicz ϕ dikatakan memenuhi kondisi-Δ_2 jika untuk setiap bilangan $t > 0$ berlaku $\phi(2t) \leq \phi(t)$ untuk suatu konstanta positif K.

Diberikan fungsi Orlicz ϕ. Fungsi $\phi : \omega \to \mathbb{R}$ dengan

$$\rho_{\phi}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_k), \quad x = (x_1, x_2, \cdots)$$

merupakan modular konveks [13]. Selanjutnya dengan menggunakan modular ρ_{ϕ} dapat ruang modular

$$\ell_{\phi} = \left\{x \in \omega: \lim_{\lambda \to 0} \rho_{\phi}(\lambda x) = 0\right\}$$

yang juga dinamakan ruang barisan Orlicz.

3 HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk mengawali pembahasan hasi-hasil dalam makalah ini, terlebih dahulu dikonstruksi persekitaran modular titik nol di dalam ruang barisan Orlicz.

Definisi 4. Diberikan ruang barisan ℓ_{ϕ}. Notasi $\mathfrak{B}$ menyatakan koleksi semua himpunan U_r dengan

$$U_r = \left\{x \in \ell_{\phi}: \sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_k) < r, \qquad r > 0\right\}.$$

Selanjutnya himpunan U_r dinamakan persekitaran-ρ_{ϕ} titik nol dengan radius r.

Teorema 5. Setiap persekitaran-ρ_{ϕ} titik nol bersifat konveks, simetris, seimbang dan menyerap.

Bukti. Sifat konveks dan simetris berturut-turut merupakan akibat dari sifat konveks dan simetris fungsi ϕ. Untuk membuktikan sifat seimbang, diambil sebarang $x \in U_r$ dan bilangan λ dengan $\lambda \leq 1$, kekonveksan ϕ memberikan hasil $\sum_{k=1}^{\infty} \phi(\lambda x_k) \leq |\lambda| \sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_k) \leq r$, yang berarti $\lambda\, x \in U_r$; dengan demikian U_r seimbang. Selanjutnya, untuk sebarang $x \in \ell_{\phi}$ berlaku $\sum_{k=1}^{\infty} \phi(\lambda x_k) \to 0$ jika $\lambda \to 0$. Oleh karena itu ada $\lambda_0 > 0$ sehingga $\sum_{k=1}^{\infty} \phi(\lambda x_k) < r$ jika $\lambda \geq \lambda_0$, dengan kata lain $\lambda x \in U_r$ yakni U_r bersifat menyerap.

Teorema 6. Diberikan ruang barisan ℓ_{ϕ}.

(1) Untuk setiap persekitaran-ρ titik nol U_s dan U_t, terdapat U_r sehingga $U_r \subset U_s \cap U_t$.

(2) Untuk setiap persekitaran-ρ titik nol U_r terdapat U_s sehingga $U_s \subset U_r$.

Bukti: (1) Diketahui persekitaran-ρ_{ϕ} titik nol $U_s, U_t \subset \ell_{\phi}$ Diambil U_r dengan $r = \min\{s, t\}$. Diambil sebarang $x \in U_r$, yakni $\sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_k) < r$. Karena $r \leq s$ dan $r \leq t$ maka $U_r \subset U_s \cap U_t$. Untuk bukti (2) dapat diambil persekitaran-ρ_{ϕ} titik nol U_s dengan $0 < s < r$.

Lemma 7. Diketahui fungsi Orlicz ϕ memenuhi kondisi-Δ_2.
Untuk setiap $U_r \in \mathfrak{B}$ $ terdapat $U_s \in \mathfrak{B}$ sehingga $U_s + U_s \subset U_r$.

Bukti. Diambi sebarang $U_r \in \mathfrak{B}$ dan $s = \frac{r}{K}$ dengan K konstanta pada kondisi-Δ_2. Untuk sebarang $x, y \in U_s$, kondisi-Δ_2 dan kekonveksan ϕ mengakibatkan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi\left(\frac{1}{2}2x_k + \frac{1}{2}2y_k\right) \leq \frac{K}{2}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_k)\right\} < r$$

yang berarti $x + y \in U_r$.

Sifat menyerap dan seimbang setiap anggota $\mathfrak{B}$ (Teorema 5), bersama Teorema 6 (1) dan Lemma 7, dan berdasarkan [10] Teorema 5.1. diperoleh hasil berikut.

Teorema 8. Diketahui fungsi Orlicz ϕ memenuhi kondisi-Δ_2. Koleksi $\mathfrak{T}$ yang anggotanya semua himpunan $G \subset \ell_\phi$ sehingga untuk setiap barisan $x \in G$ terdapat persekitaran-ρ_ϕ titik nol U_r sehingga $x + U_r \subset G$ merupakan ruang vektor topologi dengan basis lokal $\mathfrak{B}$.

Dengan menggunakan sifat-sifat persekitaran-ρ_ϕ tersebut, beberapa sifat topologi pada ruang barisan Orlicz, seperti kekonvergenan dan keterbatasan modular dapat ditelaah lebih lanjut. Barisan $(x^{(n)})$ konvergen modular ke $x \in \ell_\phi$ jika terdapat $\lambda > 0$ sehingga untuk setiap U_r terdapat bilangan asli n_0 sehingga $\lambda\left(x^{(n)} - x\right) \in U_r$ untuk setiap $n \geq n_0$. Untuk fungsi Orlicz dengan kondisi-Δ_2, sifat kekonvergenannya memiliki karakteristik sebagai berikut.

Teorema 9. Jika fungsi Orlicz ϕ memenuhi kondisi-Δ_2 dan $(x^{(n)})$ barisan di dalam ℓ_ϕ sehingga$(x^{(n)})$ konvergen modular ke $x \in \ell_\phi$, maka untuk setiap $\lambda > 0$ dan U_r ada bilangan asli n_0 sehingga $\lambda\left(x^{(n)} - x\right) \in U_r$ untuk setiap $n \geq n_0$.

Bukti. Diketahui yakni $\left(x^{(n)}\right) \xrightarrow{\rho_\phi} x^m$, yakni ada $\alpha > 0$ sehingga $\rho_\phi\left(\alpha\left(x^{(n)} - x\right)\right) \to 0$ jika $n \to \infty$. Diambil sebarang $\lambda > 0$ dan persekitaran-ρ_ϕ titik nol U_r. Terdapat bilangan K^{n_0} sehingga $\phi\left(\frac{\lambda}{\alpha}t\right) \leq K^{n_0}\phi(t)$ untuk setiap$t > 0$ dengan K konstanta pada kondisi-Δ_2. Diambil bilangan asli n_0 sehingga $\rho_\phi\left(\alpha\left(x^{(n)} - x\right)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi\left(\alpha(x_k^{(n)} - x_k\right) < \frac{r}{K^{n_0}}$ untuk setiap $n \geq n_0$. Akibatnya

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi\left(\lambda(x_k^{(n)} - x_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi\left(\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)\alpha(x_k^{(n)} - x_k\right) < K^{n_0}\sum_{k=1}^{\infty} \phi\left(\alpha(x_k^{(n)} - x_k\right) < r$$

untuk setiap $n \geq n_0$, yang berarti $\lambda\big(x^{(n)} - x\big) \in U_r$ untuk setiap $n \geq n_0$.

Teorema 10. Himpunan E terbatas modular jika hanya jika terdapat $\lambda > 0$ dan $M > 0$ sehingga $\lambda\, x \in U_M$ untuk setiap $x \in E$.

Bukti. Syarat cukup merupakan hasil umum dalam teori modular \cite{musielak}. Sebaliknya diketahui $\lambda\, x \in U_M$ untuk setiap $x \in E$. Diambil barisan $(x^{(n)})$ dengan $x^{(n)} \in E$ dan barisan bilangan real (ε_n) dengan $\varepsilon_n \to 0$, khususnya dapat diambil $|\lambda\, \varepsilon_n| \leq 1$ untuk setiap n. Dengan menggunakan sifat konveks ρ_ϕ diperoleh

$$\rho_\phi\big(\lambda\, \varepsilon_n\, x^{(n)}\big) \leq |\,\lambda\, \varepsilon_n|\rho_\phi\ \big(x^{(n)}\big) \leq\ |\,\varepsilon_n|\lambda\, M \to\ 0$$

jika $n \to \infty$.

Teorema 11. Diketahui fungsi Orlicz ϕ memenuhi kondisi-Δ_2. Himpunan E terbatas-ρ_ϕ jika dan hanya jika $\rho_\phi\ \big(\varepsilon_n\, \lambda\, x^{(n)}\big) \to\ 0$ untuk setiap $\lambda > 0$.

Bukti. Diketahui ϕ memenuhi kondisi-Δ_2 dan E terbatas-ρ_ϕ. Diambil sebarang $\lambda > 0$ dan barisan (ε_n) sehingga $\varepsilon_n \to 0$. Terdapat $\alpha > 0$ sehingga $\sum_{k=1}^{\infty} \phi\Big(\alpha\varepsilon_n x_k^{(n)}\Big) \to 0$ jika $n \to \infty$. Akibatnya

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi\Big(\lambda\varepsilon_n x_k^{(n)}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi\left(\frac{\lambda}{\alpha}\alpha\varepsilon_n x_k^{(n)}\right) \leq K^{s_0} \sum_{k=1}^{\infty} \phi\Big(\alpha\varepsilon_n x_k^{(n)}\Big) \to 0$$

jika $n \to \infty$, dimana K konstanta dalam kondisi-Δ_2 dan s_0 suatu bilangan asli.

Teorema 12. Setiap himpunan barisan konvergen modular merupakan himpunan terbatas modular.

Bukti. Misalkan E himpunan semua barisan konvergen modular dan $\big(x^{(n)}\big) \subset E$, yakni $(x^{(n)})$ konvergen-ρ_ϕ ke suatu elemen x; ini berarti ada $\lambda > 0$ sehingga $\rho_\phi\ \Big(\lambda\left(x^{(n)} - x\right)\Big) \to\ 0$ jika $n \to \infty$. Diambil barisan (ε_n) sehingga $\varepsilon_n \to 0$. Terdapat n_0 sehingga $2\varepsilon_n\ < \lambda$ untuk setiap $n \geq\ n_0$. Akibatnya

$$\begin{aligned}\rho_\phi\ \left(\varepsilon_n x^{(n)}\right) &\leq \rho_\phi\ \Big(2\varepsilon\left(x^{(n)} - x\right)\Big) + \rho_\phi\ (2\varepsilon_n x)\\ &\leq\ \rho_\phi\ \Big(\lambda\left(x^{(n)} - x\right)\Big) + \rho_\phi\ \left(2\varepsilon_n x^{(n)}\right)\end{aligned}$$

untuk setiap $n \geq\ n_0$. Ruas terakhir suku pertama ketaksamaan tersebut menuju 0 jika $n \to \infty$, demikian pula ruas terakhir suku kedua ketaksamaan tersebut menuju 0 untuk $n \to \infty$ karena $x \in \ell_\phi$. Oleh karena itu $\rho_\phi\ \left(\varepsilon_n x^{(n)}\right) \to 0$, yang bearti E berbatas.

4 KESIMPULAN

Pada ruang barisan Orlicz dapat dikonstruksi persekitaran modular titik nol. Sifat-sifat keterbatasan dan kekonvergenan dapat dinyatakan dalam persekitaran modular titik nol. Untuk fungsi Orlicz tanpa kondisi-Δ_2, belum diketahui apakah hasil-hasil di atas berlaku. Untuk itu perlu dilakukan penelitian lanjutan untuk fungsi Orlciz pada umumnya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] M. A. Khamsi, “A convexity property in Modular function spaces.”
[2] E. Malkowsky and V. Veličković, “Topologies of some new sequence spaces, their duals, and the graphical representations of neighborhoods,” *Topol Appl*, vol. 158, no. 12, pp. 1369–1380, Aug. 2011, doi: 10.1016/j.topol.2011.05.011.
[3] E. Kolk, “Topologies in generalized orlicz sequence spaces,” *Filomat*, vol. 25, no. 4, pp. 191–211, Dec. 2011, doi: 10.2298/FIL1104191K.
[4] V. V. Chistyakov, “A fixed point theorem for contractions in modular metric spaces,” Dec. 2011, doi: 10.1007/978-1-4614-5574-5_4.
[5] H. Abobaker and R. A. Ryan, “Modular Metric Spaces,” Mar. 2022, [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/2203.12359
[6] M. M. Jabber and N. F. Al-Mayahi, “Weak∗ topology on modular space and some properties,” in *Journal of Physics: Conference Series*, IOP Publishing Ltd, Aug. 2020. doi: 10.1088/1742-6596/1591/1/012070.
[7] A. Hajji, “Modular Spaces Topology,” *Appl Math (Irvine)*, vol. 04, no. 09, pp. 1296–1300, 2013, doi: 10.4236/am.2013.49175.
[8] W. M. Kozlowski, “Advancements in fixed point theory in modular function spaces,” *Arabian Journal of Mathematics*, vol. 1, no. 4, pp. 477–494, Dec. 2012, doi: 10.1007/s40065-012-0051-0.
[9] W. M. Kozlowski, “On modulated topological vector spaces and applications,” *Bull Aust Math Soc*, vol. 101, no. 2, pp. 325–332, Apr. 2020, doi: 10.1017/S0004972719000716.
[10] K. John L and Isaac Namioka, *Linear Topological Vector Spaces*. New York: Springer-Verlag, 1976.
[11] J. Musielak, *Orlicz Spaces and Modular Spaces*. Berlin Heidelberg New York Tokyo: Springer-Verlag, 1983.
[12] M. A. Krasnosel’skii and Y. B. Rutickii, “Convex Functions and Orlicz Spaces,” Groningen, 1961.
[13] Haryadi and B. A. Nurnugroho, “Ruang Barisan Orlicz dan Ruang Dualnya,” *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, vol. 19, no. 1, p. 123, May 2022, doi: 10.12962/limits.v19i1.8114.