# TEORI GRAF SPEKTRAL

**Maria Vianney Any Herawati**

Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma, Indonesia

[*] *Corresponding author:* any@usd.ac.id

**Abstrak.** Graf adalah struktur matematika yang menggambarkan hubungan antara obyek-obyek.Teori graf menjadi alat yang bermanfaat dalam memodelkan jaringan komputer, struktur protein, rangkaian listrik dan lainnya yang berkaitan dengan masalah jaringan. Teori graf spektral mempelajari tentang graf dengan cara pertama menyatakan suatu graf sebagai matriks dan kemudian mempelajari sifat-sifat graf tersebut melalui spektrum dari matriks representasinya. Dalam teori graf spektral yang menjadi obyek utama adalah matriks adjacency dan matriks Laplace graf tersebut. Dalam tulisan ini akan dibahas tentang spektrum Laplace dari suatu graf dan sifat-sifatnya yang dapat menggambarkan struktur graf tersebut.

**Kata Kunci**: *graf, graf spektral, matriks Laplace, spektrum Laplace*.

## 1 PENDAHULUAN

Teori graf spektral merupakan bidang yang menggabungkan aljabar linear dan teori graf dengan memanfaatkan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks yang terkait dengan graf, seperti matriks adjacency dan matriks Laplacian graf tersebut. Pendekatan spektral memberikan wawasan mendalam tentang struktur graf, keterhubungan, partisi, serta sifat-sifat kombinatorial lainnya yang sulit dianalisis hanya melalui metode graf klasik. Dalam teori graf spektral dicari spektrum dari suatu graf. Spektrum graf yang banyak diteliti selain spektrum adjacency adalah spektrum Laplace. Tulisan ini akan membahas tentang spektrum Laplace dari graf yaitu himpunan yang terdiri dari semua nilai eigen matriks Laplace dari suatu graf.

Perkembangan teori graf spektral tidak lepas dari kontribusi matematikawan seperti Kirchhoff, yang menggunakan matriks Laplacian untuk mempelajari pohon perentang (*spanning trees*), serta para peneliti modern yang menerapkan spektrum graf dalam ilmu komputer, fisika jaringan (*network science*), dan pembelajaran mesin (*machine learning*)[1]. Saat ini, aplikasinya mencakup *clustering*, analisis jaringan sosial, optimasi, dan desain algoritma yang efisien.

Tulisan ini membahas tentang matriks Laplace dari suatu graf, sifat-sifatnya dan hubungan antara matriks Laplace dan banyaknya komponen keterhubungan suatu graf.

## 2 TINJAUAN PUSTAKA

**Definisi 1.** [2] *Graf* adalah pasangan terurut $G = (V, E)$ dari dua himpunan $V$ dan $E$. Himpunan $V$ disebut himpunan s*impul*, yang dinotasikan dengan $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, sedangkan himpunan $E$ disebut himpunan *busur*, yang dinotasikan dengan $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$.

Tergantung pada apakah grafnya adalah graf berarah atau tak berarah, busur memiliki definisi yang berbeda. Busur dalam *graf tak berarah* menghubungkan simpul-simpul tanpa arah/tanda panah, jadi setiap busur $e$ didefinisikan dengan himpunan dua simpul $\{v_i, v_j\}$. Sedangkan, dalam *graf berarah*, terdapat dua busur yang mungkin antara dua simpul dengan arah yang berbeda. Dalam hal arah busur $e$ adalah dari simpul $v_i$ ke $v_j$, maka $e$ didefinisikan dengan pasangan terurut $(v_i, v_j)$.

## 3 HASIL DAN PEMBAHASAN

**Definisi 2.**[2] *Matriks adjacency* $A_G$ dari graf $G$ adalah matriks berukuran $n(V) \times n(V)$ dengan

$$(A_G)_{ij} = \begin{cases} 1, & \{i,j\} \in E \\ 0, & \text{yang lainnya.} \end{cases}$$

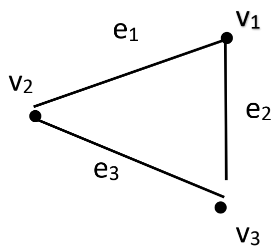
**Definisi 3 .** Dalam graf $G = (V, E)$, dua simpul $x_i, x_j \in V$ dikatakan *bertetangga* bila $\{x_i, x_j\} \in E$.

**Definisi 4.** *Derajat* $d(v)$ dari simpul $v$ adalah banyaknya simpul di $G$ yang bertetangga dengan $v$.

**Definisi 5.** *Matriks Laplace* $L$ dari graf $G = (V, E)$ didefinisikan dengan

$$(L)_{ij} = \begin{cases} -1, \{i, j\} \in E \\ d(i) \text{ bila } i = j \\ 0, \text{ yang lainnya} \end{cases}$$

**Contoh 1.** Misal $G$ adalah graf dalam Gambar 1.




**Gambar 1.** Graf dengan 3 simpul dan 3 busur.

Matriks adjacency $A$ dari graf $G$ tersebut adalah

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks Laplace $L$ dari $G$ tersebut adalah

$$L_G = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Definisi 6.**[3] *Spektrum Laplace* dari suatu graf adalah himpunan semua nilai eigen dari matriks Laplace graf tersebut, biasanya diurutkan dari yang terkecil ke terbesar $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$.

**Contoh 2.** Akan dicari spektrum Laplace dari graf $G$ dalam Contoh 1 dengan mencari nilai eigen dari $L$ sebagai berikut :

$$\det(L - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 3)^2 = 0.$$

Sehingga spektrum Laplace dari graf tersebut adalah $(0,3,3)$.

Salah satu sifat yang penting dari suatu graf adalah tentang keterhubungannya yang dapat ditentukan dari matriks Laplace graf tersebut. Untuk pembuktian sifat-sifat matriks Laplace terutama tentang nilai eigennya akan digunakan definisi baru berikut dari matriks Laplace suatu graf yang ekivalen dengan Definisi 7.

**Definisi 7.**[4] Misal $G = (V, E)$ adalah graf dengan $V = \{1,2, \dots, n\}$. Untuk setiap busur $\{u, v\} \in E$, didefinisikan matriks $L_{G_{\{u,v\}}}$ berukuran $n \times n$ dengan

$$(L_{G_{\{u,v\}}})_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ bila } i = j \text{ dan } i \in \{u, v\} \\ -1 \text{ bila } i = u \text{ dan } j = v \text{, atau sebaliknya} \\ 0 \text{ yang lainnya} \end{cases}$$

Mengingat bahwa matriks Laplace adalah matriks simetrik dan entri-entrinya real, maka $L_G = L_G^*$ dengan $L_G^*$ adalah transpose konjugat dari $L_G$. Jadi $L_G$ self adjoint.

Dengan teorema berikut, semua nilai eigen dari $L_G$ adalah real.

**Teorema 1.** Nilai eigen dari matriks yang self adjoint semua adalah real.

**Bukti :** Andaikan $\lambda$ adalah nilai eigen dari matriks yang self adjoint dan $v$ adalah vektor eigen tak nol dari $\lambda$. Maka

$$\lambda \|v\|^2 = \lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle Lv, v\rangle = \langle v, Lv\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \bar{\lambda}\langle v, v\rangle = \bar{\lambda}\|v\|^2.$$

Karena $v \neq 0$, maka $\|v\|^2 \neq 0$. Akibatnya, $\lambda = \bar{\lambda}$. Jadi $\lambda$ real. ■

**Definisi 8.** Matriks *M* yang berukuran $n \times n$ dikatakan *semidefinite-positif* bila $\vec{x}^T M \vec{x} \geq 0$ untuk semua $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

**Teorema 2.** Matriks Laplace dari suatu graf bersifat semidefinit positif.

**Bukti :** Karena $\vec{x}^T L_{G_{\{u,v\}}} \vec{x} = (x_u - x_v)^2$ untuk semua $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, maka

$$\vec{x}^T L_{G_{\{u,v\}}} \vec{x} = \sum_{\{u,v\} \in E} (x_u - x_v)^2 \geq 0.$$

Jadi, matriks Laplace dari suatu graf bersifat semidefinit positif. ■

**Teorema 3.** Untuk graf *G*, semua nilai eigen dari $L_G$ adalah tak negatif.

**Bukti :** Andaikan $\lambda$ adalah nilai eigen dari $L_G$ dan $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ adalah vektor eigen tak nol dari $\lambda$. Maka

$$\vec{x}^T L_G \vec{x} = \vec{x}^T(\lambda \vec{x}) = \lambda(\vec{x}^T \vec{x}).$$

Karena
$\vec{x}^T L_G \vec{x} \geq 0$ dan $\vec{x}^T \vec{x} > 0$, maka $\lambda \geq 0$. ■

Karena matriks Laplace $L_G$ self adjoint dan entri-entrinya real, maka menurut Teorema Spektral Real $L_G$ memiliki basis ortonormal yang terdiri dari vektor-vektor eigen dari $L_G$. Jadi, untuk graf *G* yang terdiri dari *n* simpul, kita dapat mencari *n* nilai eigen (tidak harus semua berbeda) untuk $L_G$ dan karena nilai-nilai eigen tersebut bernilai real maka *n* nilai eigen tersebut dapat diurutkan sebagai $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ .

Selanjutnya, seperti yang disebutkan di bagian tujuan dari tulisan ini yaitu bahwa nilai eigen dari matriks Laplace dapat menjelaskan bagaimana graf itu terhubung. Untuk itu perlu didefinisikan tentang keterhubungan graf dengan terlebih dahulu didefinisikan istilah lintasan.

**Definisi 9.** *Lintasan* adalah graf tak kosong $P = (V, E)$ yang berbentuk $V = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dan $E = \{\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{n-1}, x_n\},\}$ dengan semua simpul $x_i$ berbeda.

**Definisi 10.** Graf tak kosong *G* dikatakan *terhubung* bila setiap dua simpulnya termuat dalam suatu lintasan di *G*.

**Teorema 4.** Untuk setiap graf *G*, nilai eigen terkecil dari matriks Laplace $L_G$ yaitu $\lambda_1 = 0$.

**Bukti :** Misal $\vec{x} = (1,1,\dots,1) \in \mathbb{R}^n$. Maka entri $m_i$ dari matriks $M = L_G\vec{x}$ adalah

$$m_i = \sum_{k=1}^{n} (L_G)_{ik}.$$

Menurut Definisi 5, $m_i = 0$ karena entri-entri baris dari $L_G$ bila dijumlah sama dengan nol. Maka $L_G\vec{x} = 0$. Jadi, 0 adalah nilai eigen dari $L_G$. Karena $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$, berarti $\lambda_1 = 0$.

**Teorema 5.** Bila $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dengan $V = \{1,2,\dots,n\}$, maka $\lambda_2 > 0$.

**Bukti :** Karena 0 merupakan nilai eigen dari $L_G$ yaitu berdasar Teorema 4 dan misal $\vec{z}$ adalah vektor eigen tak nol dari 0, maka $\vec{z}^T L_G \vec{z} = \vec{z}^T . 0 = 0$. Jadi,

$$\vec{z}^T L_G \vec{z} = \sum_{\{u,v\} \in E} (x_u - x_v)^2 = 0.$$

Yang mengakibatkan bahwa untuk setiap $\{u, v\}$ sedemikian hingga $\{u, v\} \in E, z_u = z_v$, untuk semua $i, j \in V$. Maka,

$$z = \alpha(1,1,\dots,1)^T \text{ untuk suatu bilangan real } \alpha.$$

Bila $U_{\lambda_1}$ adalah ruang eigen dari $\lambda_1$ , maka $U_{\lambda_1} = \text{Span}(1,1,\dots,1)$ . Jadi, multiplisitas dari nilai eigen 0 tersebut adalah 1. Jadi $\lambda_2 \neq 0$, akibatnya $\lambda_2 > 0$. ■

**Definisi 11.** Misal $G = (V, E)$ adalah graf. Graf $G' = (V', E')$ disebut *graf bagian* dari $G = (V, E)$ bila $V' \subseteq V$ dan $E' = \{\{x, y\} \in E | x, y \in V'\}$.

**Definisi 12.** *Komponen terhubung* dari graf $G = (V, E)$ adalah graf bagian $G' = (V', E')$ sedemikian hingga setiap dua simpul $i, j \in V'$ terhubung sedangkan untuk setiap $i \in V'$ dan $k \in V \setminus V'$, *i* dan *k* tidak terhubung.

**Teorema 6.** Misal $G = (V, E)$ adalah graf. Maka multiplisitas dari 0 sebagai nilai eigen dari $L_G$ sama dengan banyaknya komponen terhubung dari *G*.

**Bukti :** Misal $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$,…, $G_k = (V_k, E_k)$ adalah komponen-komponen terhubung dari *G*. Misal $\overline{w}_i$ didefinisikan dengan

$$\overline{w}_i = \begin{cases} 1 \text{ bila } j \in V_i \\ 0 \text{ yang lainnya.} \end{cases}$$

Maka berdasar Teorema 5 bila $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ adalah vektor eigen tak nol dari 0, maka $x_i = x_j$ untuk setiap $i, j \in V$ sededemikian hingga *i,j* berada di komponen terhubung yang sama. Jadi,

$$U_{\lambda_1} = \text{Span}(\overline{w}_1, \overline{w}_2, \dots, \overline{w}_k).$$

Berdasar teorema di aljabar linear $\overline{w}_1, \overline{w}_2, \dots, \overline{w}_k$ bebas linear. Maka multiplisitas dari 0 sebagai nilai eigen dari $L_G$ sama dengan banyaknya komponen terhubung di *G*. ■

## 4 KESIMPULAN

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa :

- Matriks Laplace dari suatu graf bersifat semidefinit positif.
- Untuk graf *G*, semua nilai eigen dari $L_G$ adalah tak negatif.
- Untuk setiap graf *G*, nilai eigen terkecil dari matriks Laplace $L_G$ yaitu $\lambda_1 = 0$.
- Bila $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dengan $V = \{1,2, \dots, n\}$, maka nilai eigen terkecil keduanya yaitu $\lambda_2 > 0$.
- Misal $G = (V, E)$ adalah graf. Maka multiplisitas dari 0 sebagai nilai eigen dari $L_G$ sama dengan banyaknya komponen terhubung dari *G*.

## DAFTAR PUSTAKA

[1] Jacobs, J. (2021). *A simple proof of the matrix-tree theorem, upward routes, and a matrix-tree-cycle theorem*. Diakses dari https://julesjacobs.com/notes/kirchoff/kirchoff.pdf

[2] Li, H., *Properties and Applications of Graph Laplacians*. Diakses dari https://math.uchicago.edu/~may/REU2022/REUPapers/Li,Hanchen.pdf

[3] Jones, O. (2013). *Spectra of Simple Graphs*. Diakses dari https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/Jones.pdf]

[4] Jiang, J. An Introduction to Spectral Graph Theory. Diakses dari https://math.uchicago.edu/~may/REU2012/REUPapers/JiangJ.pdf