Kajian Fungsi *Totient* Euler

I Wayan Ari Gunawan[1], Mochammad Idris[1]

[1]Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Lambung Mangkurat, Indonesia

Corresponding author: iwyrgwn@gmail.com

Abstrak. Penelitian ini membahas cara menentukan fungsi *totient* Euler dengan domain bilangan asli serta hubungannya dengan teorema kecil Fermat dan teorema Euler. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa nilai fungsi *totient* Euler dapat ditentukan untuk domain bilangan asli yang dapat dinyatakan dalam bentuk p, p^k, dan $p_1^{k_1}p_2^{k_2}$ dengan p adalah bilangan prima, p_1 dan p_2 adalah dua bilangan prima yang berbeda, serta $k, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Fungsi *totient* Euler memiliki bentuk fungsi yang berbeda-beda untuk ketiga domain tersebut. Selain itu, diperoleh juga bahwa fungsi *totient* Euler menunjukkan hubungan erat antara teorema kecil Fermat dan teorema Euler. Teorema kecil Fermat dibentuk dengan memanfaatkan konsep sistem residu lengkap modulo. Adapun teorema Euler dibentuk dengan memanfaatkan konsep sistem residu tereduksi modulo, hal ini dikarenakan modulonya diperluas dari bilangan prima p menjadi bilangan asli n. Hubungan antara teorema kecil Fermat dan teorema Euler dapat dikaji melalui fungsi *totient* Euler. Hasil yang diperoleh dari pengamatan menggunakan fungsi *totient* Euler menunjukkan bahwa teorema kecil Fermat merupakan bentuk khusus dari teorema Euler.

Kata Kunci: *fungsi totient, teorema Euler, teorema kecil Fermat.*

1 PENDAHULUAN

Teori bilangan pada dasarnya merupakan cabang matematika yang mempelajari tentang sifat-sifat bilangan, salah satunya adalah bilangan asli [1]. Bilangan asli terdiri dari bilangan prima dan bilangan komposit. Bilangan prima adalah bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dan hanya memiliki dua faktor bulat positif, yaitu 1 dan dirinya sendiri [2]. Bilangan prima merupakan bagian penting dari teori bilangan karena melibatkan teorema dasar aritmatika. Bilangan prima juga merupakan salah satu kunci bagi beberapa teorema dalam kajian teori bilangan.

Salah satu teorema dalam kajian teori bilangan yang membutuhkan bilangan prima sebagai dasar pembahasannya adalah teorema kecil Fermat *(Fermat's little theorem)*. Teorema kecil Fermat menyatakan jika p adalah suatu bilangan prima, maka untuk setiap bilangan asli a berlaku $a^p \equiv a \bmod p$ [2]. Atau dengan kata lain, nilai dari $a^p - a$ adalah suatu bilangan asli yang merupakan kelipatan dari p. Lebih jauh lagi, jika a tidak habis dibagi oleh p, maka teorema kecil Fermat ekuivalen dengan pernyataan $a^{p-1} - 1$ adalah suatu bilangan asli yang merupakan kelipatan dari p. Dalam notasi matematika, pernyataan ini ditulis $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$. Meskipun Fermat menyatakan teorema ini pada tahun 1640, nyatanya ia tidak menyertakan bukti karena ia menganggap akan butuh waktu yang panjang untuk dapat membuktikan itu. Barulah pada tahun 1736 (96 tahun setelah teorema ini dikemukakan), Leonhard Euler mempublikasikan bukti teorema kecil Fermat versinya dalam sebuah artikel yang berjudul *"A Proof of Certain Theorems Regarding Prime Number"* dengan menggunakan induksi matematika. Selanjutnya, Euler menerbitkan bukti lain dari teorema tersebut pada tahun 1763 melalui makalahnya yang berjudul *"Demonstration of A New Method in the Theory of Arithmetic"*. Pada saat itu, ia mencoba untuk menemukan eksponen terkecil sehingga teorema kecil Fermat selalu bernilai benar. Melalui hal tersebut, Euler berhasil memperluas pernyataan asli Fermat dengan bukti yang sekarang dikenal sebagai "teorema Euler" atau "teorema Euler-Fermat."

Teorema Euler memperumum teorema kecil Fermat dengan cara memperluas bilangan prima p pada persamaan tersebut menjadi bilangan asli n. Teorema ini menyatakan untuk setiap modulus n, $n \in \mathbb{N}$ dan sebarang bilangan asli a yang relatif prima terhadap n, berlaku $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \bmod n$ [2]. Ini adalah bentuk perumuman dari teorema kecil Fermat, dengan $\varphi(n)$ disebut sebagai fungsi *totient* Euler. Teorema ini sekaligus menyatakan bahwa pangkat dari a adalah suatu fungsi. Kata *totient* yang merupakan bagian dari nama fungsi tersebut berasal dari bahasa latin, yaitu *tot* yang berarti "begitu banyak". Oleh karena itu, fungsi *totient* Euler merupakan fungsi yang menyatakan banyaknya bilangan asli yang memenuhi agar teorema Euler dapat berlaku.

Fungsi *totient* Euler memiliki berbagai macam bentuk sesuai dengan domainnya. Domain fungsi *totient* Euler adalah bilangan asli yang dapat dinyatakan dalam berbagai bentuk, seperti bilangan prima, bilangan prima berpangkat, dan hasil perkalian dari bilangan prima yang berbeda. Oleh karena itu, penulisan artikel ini berfokus untuk menentukan nilai dari fungsi *totient* Euler dengan domain bilangan asli yang dapat dinyatakan dalam berbagai bentuk prima. Selain itu, hubungan antara teorema kecil Fermat dan teorema Euler juga akan dibahas pada tugas akhir ini, karena keduanya merupakan latar belakang munculnya fungsi *totient* Euler. Bentuk kedua teorema tersebut juga dipengaruhi oleh nilai fungsi *totient* Euler.

2 TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Himpunan Bilangan Asli

Bilangan asli didefinisikan sebagai suatu himpunan yang disimbolkan dengan $\mathbb{N}$. Beberapa aksioma Peano untuk $\mathbb{N}$ adalah sebagai berikut.

1) Bilangan 1 merupakan bilangan asli. Oleh karena itu, $1 \in \mathbb{N}$.
2) Jika n merupakan bilangan asli, maka terdapat *successor* dari n yaitu $n+1$ yang juga merupakan bilangan asli.
3) Setiap bilangan asli selain 1 adalah *successor*.
4) Jika $m, n \in \mathbb{N}$ memiliki *successor* yang sama, maka $m = n$. Artinya, setiap bilangan asli memiliki tepat satu *successor*.
5) Jika suatu himpunan bagian dari $\mathbb{N}$ memiliki elemen 1 dan setiap elemennya memiliki *successor*, maka himpunan bagian tersebut harus sama dengan $\mathbb{N}$ [3].

Pada dua himpunan bilangan asli A dan B, terdapat beberapa hubungan sebagai berikut.

1) $A = B$, artinya himpunan A setara dengan himpunan B. Hal ini dapat terjadi jika dan hanya jika A dan B memiliki elemen yang sama, atau dengan kata lain, $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.
2) $A \cup B$, artinya gabungan dari himpunan A dan B. Gabungan kedua himpunan tersebut didefinisikan dengan
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \; atau \; x \in B\} \tag{1}$$
3) $A \cap B$, artinya irisan dari himpunan A dan B. Irisan kedua himpunan tersebut didefinisikan dengan
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \; dan \; x \in B\} \tag{2}$$

Kardinalitas (banyak elemen) dari gabungan dua himpunan berhingga A dan B dapat ditentukan menggunakan prinsip inklusi-eksklusi, yang menyatakan bahwa kardinalitas dari gabungan himpunan A dan B sama dengan kardinalitas dari himpunan A ditambah kardinalitas dari himpunan B dikurangi kardinalitas dari irisan keduanya [4]. Dalam notasi matematika, hubungan ini dinyatakan dengan
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \tag{3}$$

2.2 Keterbagian pada Bilangan Asli

Diberikan suatu bilangan asli a. Bilangan asli b dikatakan membagi a jika dan hanya jika terdapat bilangan asli m sedemikian sehingga $a = bm$. Jika b membagi a, maka b adalah pembagi atau faktor dari a. Notasinya dinyatakan dengan $b \mid a$ [2].

2.3 Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)

Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{N}$. Bilangan asli $d \in \mathbb{N}$ disebut faktor persekutuan dari a dan b jika $d \mid a$ dan $d \mid b$ [2]. Himpunan semua faktor persekutuan persekutuan dari a dan b dinotasikan dengan

$$FP\ (a, b) = \{d \in \mathbb{N} \mid d \mid a\ dan\ d \mid b\} \tag{4}$$

Kemudian, faktor persekutuan terbesar (FPB) dari dua bilangan asli a dan b adalah pembagi atau faktor terbesar dari a dan b [2]. Faktor persekutuan terbesar dari a dan b dinotasikan dengan $FPB\ (a, b)$. Jika $FPB\ (a, b) = 1$, maka a dan b relatif prima [2].

2.4 Bilangan Prima

Bilangan prima adalah bilangan asli yang lebih besar dari 1 dan tidak dapat dibagi oleh bilangan asli lain selain 1 dan dirinya sendiri [2]. Bilangan asli yang bukan bilangan prima disebut bilangan komposit [2].

2.5 Kongruensi Modulo

Diberikan $a, b, n \in \mathbb{N}$ dengan $a > b$. Dengan demikian, berlaku a kongruen b modulo n jika $n \mid (a - b)$ [2]. Pernyataan ini dinotasikan dengan $a \equiv b\ mod\ n$. Kemudian, suatu himpunan bilangan asli $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ disebut sistem residu lengkap modulo n jika dan hanya jikja untuk setiap bilangan bulat y, dengan $0 \leq y \leq n - 1$, terdapat dengan tunggal x_i, dengan $1 \leq i \leq n$ sedemikian sehingga $x_i \equiv y\ mod\ n$ [5]. Lebih lanjut lagi, untuk setiap $g, h, j, k, m, n \in \mathbb{N}$, himpunan bilangan $\{m_1, m_2, \dots, m_k$ disebut sistem residu tereduksi modulo n jika untuk setiap $1 \leq j \leq k, FPB\ (m_j, n) = 1$ serta untuk $1 \leq g < h \leq k$, $m_h \not\equiv m_g\ mod\ n$ [5].

Banyak elemen dari suatu sistem residu tereduksi modulo dinyatakan dengan $\varphi(n)$, yang mana merupakan notasi dari fungsi *totient* Euler. Fungsi *totient* Euler merupakan fungsi yang menyatakan banyaknya bilangan asli yang kurang dari n dan relatif prima terhadap n [2].

Pada kongruensi modulo, terdapat beberapa persamaan kongruensi khusus, yang disebut dengan teorema kecil Fermat dan teorema Euler. Pada teorema kecil Fermat, berlaku

$$a^{p-1} \equiv 1\ mod\ p \tag{5}$$

dengan p adalah bilangan prima, a adalah bilangan asli, serta $p \nmid a$ [2]. Teorema Euler merupakan perumuman dari teorema kecil Fermat, yang mana persamaan kongruensinya adalah

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1\ mod\ n \tag{6}$$

dengan a dan n adalah bilangan asli, serta $FPB\ (a, n) = 1$ [2].

3 METODE

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1) Menjelaskan definisi maupun teorema yang berkaitan dengan himpunan bilangan asli, keterbagian, FPB, bilangan prima dan kongruensi modulo. Selain itu, dijelaskan juga bentuk dari teorema kecil Fermat dan teorema Euler.
2) Menjelaskan pembentukan fungsi *totient* Euler yang domainnya berupa bilangan prima, kemudian membandingkannya dengan bentuk awal teorema kecil Fermat.
3) Menjelaskan pembentukan fungsi *totient* Euler yang domainnya berupa bilangan prima berpangkat, kemudian membandingkannya dengan bentuk awal teorema kecil Fermat.
4) Menjelaskan pembentukan fungsi *totient* Euler yang domainnya berupa bilangan asli yang dibentuk dari perkalian dua bilangan prima berbeda, kemudian membandingkannya dengan bentuk awal teorema kecil Fermat.
5) Menarik kesimpulan dan memberikan saran.

4 HASIL DAN PEMBAHASAN

Fungsi *Totient* Euler untuk Bilangan Prima

Pada bagian awal pembahasan, akan ditentukan nilai $\varphi(n)$ untuk n adalah bilangan prima.

Teorema 1

Diberikan $n = p$, dengan p adalah bilangan prima. Berdasarkan hal tersebut, berlaku $\varphi(n) = \varphi(p) = p - 1$.

Bukti. Berdasarkan Definisi 12, akan dicari bilangan asli yang kurang dari p. Diketahui bilangan-bilangan tersebut adalah $\{1, 2, 3, \dots, p-1\}$. Kemudian, dari himpunan bilangan tersebut, akan dicari bilangan-bilangan yang relatif prima terhadap p. Berdasarkan Definisi 7, bilangan-bilangan yang terdapat dalam himpunan tersebut relatif prima terhadap p jika dan hanya jika FPB-nya dengan p adalah 1. Diketahui p adalah bilangan prima, sehingga berdasarkan Definisi 8, faktor dari p adalah 1 dan p. Dengan menggunakan kontradiksi, akan ditunjukkan bahwa $\{1, 2, 3, \dots, p-1\}$ relatif prima terhadap p. Diasumsikan setiap bilangan yang terdapat dalam himpunan $\{1, 2, 3, \dots, p-1\}$ tidak relatif prima terhadap p. Misalkan k, $1 < k \leq p-1$ adalah salah satu anggota dalam himpunan tersebut, sehingga k tidak relatif prima terhadap p. Berdasarkan Definisi 7, karena k tidak relatif prima terhadap p, diperoleh bahwa terdapat $d \in \mathbb{N}$, $d > 1$ sebagai faktor persekutuan dari k dan p. Karena d faktor persekutuan dari k dan p, berdasarkan Definisi 5, $d \mid k$ dan $d \mid p$. Berdasarkan Definisi 4, karena $d \mid p$, diperoleh d adalah faktor dari p. Hal ini kontradiksi dengan definisi bilangan prima, karena seharusnya p tidak memiliki faktor lain selain 1 dan dirinya sendiri. Oleh karena itu, $\{1, 2, 3, \dots, p-1\}$ relatif prima terhadap p. Himpunan $\{1, 2, 3, \dots, p-1\}$

memiliki anggota sebanyak $p-1$, sehingga fungsi *totient* Euler untuk $n=p$ dinyatakan dengan $\varphi(n)=\varphi(p)=p-1$.■

Diketahui teorema Euler berbentuk $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \bmod n$. Untuk $n=p$, diperoleh $\varphi(n)=\varphi(p)=p-1$, sesuai dengan Teorema 1. Dengan demikian, teorema Euler untuk $n=p$ dituliskan $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$. Berdasarkan hasil ini, terlihat bahwa teorema Euler sama persis dengan teorema kecil Fermat. Artinya, fungsi *totient* Euler menyebabkan teorema Euler kembali ke bentuk teorema kecil Fermat untuk $n=p$.

Fungsi *Totient* Euler untuk Bilangan Prima Berpangkat Bilangan Asli

Berikut akan ditentukan nilai $\varphi(n)$ untuk $n=p^k$. Namun sebelum untuk sebarang bilangan asli k, akan ditentukan nilai untuk $k=2$ terlebih dahulu melalui proposisi berikut.

Proposisi 2

Diberikan bilangan prima p dan bilangan asli $k=2$ sedemikian sehingga $n=p^2$. Berdasarkan hal tersebut, berlaku $\varphi(n)=\varphi(p^2)=p(p-1)$.

Bukti. Berdasarkan Definisi 12, akan dicari terlebih dahulu bilangan asli yang kurang dari p^2. Bilangan-bilangan tersebut adalah $S=\{1,2,\dots,(p^2-1)\}$, sehingga diperoleh $n(S)=p^2-1$. Selanjutnya, dari himpunan S, akan dicari bilangan-bilangan asli yang tidak relatif prima terhadap p^2. Diketahui faktor dari p^2 adalah $\{1,p,p^2\}$, sehingga berdasarkan Definisi 4, berlaku $1 \mid p^2$, $p \mid p^2$ dan $p^2 \mid p^2$. Berdasarkan Definisi 7, bilangan-bilangan dalam himpunan S akan relatif prima terhadap p^2 jika FPB-nya dengan p^2 adalah 1. Akibatnya, jika FPB-nya dengan p^2 lebih besar dari 1, maka bilangan-bilangan tersebut tidak relatif prima terhadap p^2. Dengan demikian, bilangan asli yang tidak relatif prima terhadap p^2 setidaknya memiliki faktor persekutuan yang sama dengan p^2 selain 1. Karena faktor dari p^2 selain 1 adalah p dan p^2, sementara bilangan-bilangan pada himpunan S kurang dari p^2, sehingga untuk menentukan bilangan asli yang tidak relatif prima terhadap p^2 dapat dilakukan dengan mencari bilangan-bilangan yang mempunyai faktor p. Dari himpunan S, bilangan yang memiliki faktor p adalah $A=\{p,2p,3p,\dots,(p-2)p,(p-1)p\}$. Dengan demikian, diperoleh $n(A)=p-1$. Artinya, ada sebanyak $n(A)$ bilangan yang tidak relatif prima terhadap p^2. Dengan demikian, bilangan asli yang kurang dari p^2 dan relatif prima terhadap p^2 ada sebanyak

$$\begin{aligned}\varphi(p^2) &= n(S)-n(A)\\ &= (p^2-1)-(p-1)\\ &= p^2-p\\ &= p(p-1).\end{aligned} \tag{6}$$

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa untuk sebarang bilangan prima p dan $k=2$, $\varphi(n)=\varphi(p^2)=p(p-1)$. ■

Nilai di atas kemudian disubstitusikan ke dalam teorema Euler, untuk dibandingkan dengan teorema kecil Fermat. Diketahui bentuk teorema Euler adalah $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \; mod \; n$. Dengan demikian, untuk $n = p^2$ diperoleh $\varphi(n) = p(p - 1)$, sehingga teorema Euler untuk $n = p^2$ dituliskan

$$a^{p(p-1)} \equiv 1 \; mod \; p^2$$

atau

$$(a^{p-1})^p \equiv 1 \; mod \; p^2. \tag{7}$$

Berdasarkan hasil ini, dapat dilihat bahwa untuk $n = p^2$, bentuk teorema Euler diperluas dari teorema kecil Fermat karena modulonya bukan lagi bilangan prima. Namun jika diperhatikan baik-baik, perluasannya masih mempertahankan bentuk yang diwariskan dari teorema kecil Fermat.

Selanjutnya, dengan cara analog seperti Proposisi 2, akan ditentukan nilai $\varphi(n)$ dengan $n = p^k$ untuk sebarang bilangan asli k.

Teorema 3
Diberikan bilangan prima p dan sebarang bilangan asli k sedemikian sehingga $n = p^2$. Berdasarkan hal tersebut, berlaku $\varphi(n) = \varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$.

Bukti. Berdasarkan Definisi 12, akan dicari bilangan asli yang kurang dari p^k. Diketahui bilangan asli yang kurang dari p^k adalah $S = \{1, 2, \ldots, p^k - 1\}$ sehingga diperoleh $n(S) = p^k - 1$. Kemudian dari sebanyak $n(S)$ bilangan asli pada himpunan S, akan dicari banyaknya bilangan yang tidak relatif prima terhadap p^k. Bilangan-bilangan tersebut adalah bilangan yang memiliki faktor p, yaitu $A = \{p, 2p, \ldots, (p^{k-1} - 1)p\}$, sehingga diperoleh $n(A) = p^{k-1} - 1$. Dengan demikian, bilangan asli yang kurang dari p^2 dan relatif prima terhadap p^2 ada sebanyak

$$\begin{aligned} \varphi(p^k) &= n(S) - n(A) \\ &= (p^k - 1) - (p^{k-1} - 1) \\ &= p^k - p^{k-1} \\ &= p^{k-1}(p-1). \end{aligned} \tag{8}$$

Perhatikan bahwa untuk $k = 1$, persamaan di atas akan sama dengan hasil yang diperoleh pada Teorema 1. Dengan demikian, diperoleh bahwa untuk sebarang bilangan prima p dan sebarang bilangan asli k, $\varphi(n) = \varphi(p^k) = p^{k-1}(p - 1)$. ■

Nilai di atas kemudian disubstitusikan ke dalam teorema Euler untuk dibandingkan dengan teorema kecil Fermat. Diketahui bentuk teorema Euler adalah $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \ mod \ n$, sehingga untuk $n = p^k$ diperoleh

$$\begin{aligned} a^{\varphi(n)} &\equiv 1 \ mod \ n \\ a^{p^{k-1}(p-1)} &\equiv 1 \ mod \ p^k \\ (a^{p-1})^{p^{k-1}} &\equiv 1 \ mod \ p^k. \end{aligned} \quad (9)$$

Berdasarkan uraian di atas, dapat dilihat bahwa bentuk teorema Euler mengalami perluasan pada modulonya sehingga bentuknya berbeda dengan teorema kecil Fermat. Namun, pola perluasannya masih mewarisi bentuk dari teorema kecil Fermat.

Fungsi *Totient* Euler untuk Perkalian antara Dua Bilangan Prima Berbeda

Berikut akan ditentukan nilai $\varphi(n)$ untuk $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2}$. Namun sebelum untuk sebarang bilangan asli k_1 dan k_2, akan ditentukan nilai untuk $k_1 = k_2 = 1$ terlebih dahulu melalui teorema berikut.

Teorema 4

Diberikan bilangan asli n sedemikian sehingga n dapat dinyatakan sebagai perkalian dari dua bilangan prima berbrda, yaitu $n = p_1 p_2$. Berdasarkan hal tersebut, berlaku $\varphi(n) = \varphi(p_1 p_2) = (p_1 - 1)(p_2 - 1)$.

Bukti. Berdasarkan Definisi 12, akan dicari bilangan asli yang kurang dari $p_1 p_2$. Bilangan-bilangan tersebut yaitu $S = \{1, 2, \ldots, (p_1 p_2 - 1)\}$, sehingga diperoleh $n(S) = p_1 p_2 - 1$. Selanjutnya, dari himpunan S, akan dicari bilangan-bilangan yang tidak relatif prima terhadap $p_1 p_2$. Diketahui faktor prima dari $p_1 p_2$ adalah p_1 dan p_2, sehingga berdasarkan Definisi 4, $p_1 \mid p_1 p_2$ dan $p_2 \mid p_1 p_2$. Kemudian, berdasarkan Definisi 7, bilangan-bilangan dalam himpunan S akan relatif prima terhadap $p_1 p_2$ jika FPB-nya dengan $p_1 p_2$ adalah 1. Akibatnya, jika FPB-nya dengan$p_1 p_2$ lebih besar dari 1, maka bilangan tersebut tidak relatif prima terhadap $p_1 p_2$. Berdasarkan hal ini, bilangan asli yang tidak relatif prima terhadap $p_1 p_2$ adalah bilangan yang mempunyai faktor p_1 maupun p_2. Dari himpunan S, bilangan yang memiliki faktor p_1 adalah $A = \{p_1, 2p_1, 3p_1, \ldots, (p_2 - 1)p_1\}$, sementara bilangan yang memiliki faktor p_2 adalah $B = \{p_2, 2p_2, 3p_2, \ldots, (p_1 - 1)p_2\}$. Dengan demikian, diperoleh $n(A) = p_2 - 1$ dan $n(B) = p_1 - 1$. Artinya, bilangan yang kurang dari $p_1 p_2$ dan tidak relatif prima terhadap $p_1 p_2$ada sebanyak

$$n(A) + n(B) = (p_2 - 1) + (p_1 - 1) = p_1 + p_2 - 2. \quad (10)$$

Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{aligned}\varphi(p_1p_2) &= n(S) - [n(A) + n(B)] \\ &= (p_1p_2 - 1) + (p_1 + p_2 - 2) \\ &= p_1p_2 - p_1 - p_2 + 1 \\ &= (p_1 - 1)(p_2 - 1). \end{aligned} \tag{11}$$

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh nilai fungsi *totient* Euler untuk $n = p_1p_2$ adalah $\varphi(n) = \varphi(p_1p_2) = (p_1 - 1)(p_2 - 1)$. ■

Selanjutnya, akan ditentukan nilai $\varphi(n)$ untuk $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}$ dengan k adalah bilangan asli yang lebih besar dari 1 dan $k_1 = k_2 = k$.

Teorema 5

Diberikan bilangan k dan bilangan prima p_1 dan p_2 dengan $p_1 \neq p_2$, sedemikian sehingga n dapat dinyatakan sebagai perkalian dari dua bilangan prima berbeda berpangkat bilangan asli, yaitu $n = p_1^kp_2^k$. Berdasarkan hal tersebut, berlaku $\varphi(n) = \varphi\left(p_1^kp_2^k\right) = p_1^{k-1}p_2^{k-1}(p_1 - 1)(p_2 - 1)$.

Bukti. Berdasarkan Definisi 12, akan dicari bilangan asli yang kurang dari $p_1^kp_2^k$. Bilangan-bilangan tersebut yaitu $S = \{1, 2, \dots, (p_1^kp_2^k - 1)\}$, sehingga diperoleh $n(S) = p_1^kp_2^k - 1$. Selanjutnya, dari himpunan S, akan dicari bilangan-bilangan yang tidak relatif prima terhadap $p_1^kp_2^k$. Diketahui faktor prima dari $p_1^kp_2^k$ adalah p_1 dan p_2, sehingga berdasarkan Definisi 4, $p_1 \mid p_1^kp_2^k$ dan $p_2 \mid p_1^kp_2^k$. Berdasarkan akibat dari Definisi 7, bilangan asli yang tidak relatif prima terhadap $p_1^kp_2^k$ adalah bilangan yang mempunyai faktor p_1 maupun p_2. Dari himpunan S, bilangan yangmemiliki faktor p_1 adalah

$$A = \left\{p_1, 2p_1, 3p_1, \dots, \left(p_1^{k-1}p_2^k - 1\right)p_1\right\}.$$

Sementara bilangan yang memiliki faktor p_2 adalah

$$B = \left\{p_2, 2p_2, 3p_2, \dots, \left(p_1^kp_2^{k-1} - 1\right)p_2\right\}.$$

Kemudian, terdapat juga bilangan-bilangan yang mempunyai faktor p_1 sekaligus p_2, yaitu

$$A \cap B = \left\{p_1p_2, 2p_1p_2, \dots, \left(p_1^{k-1}p_2^{k-1} - 1\right)p_1p_2\right\}.$$

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh

$$n(A) = p_1^{k-1}p_2^k - 1$$
$$n(B) = p_1^kp_2^{k-1} - 1$$
$$n(A \cap B) = p_1^{k-1}p_2^{k-1} - 1$$

Dengan demikian, berdasarkan prinsip inklusi-eksklusi, diperoleh bilangan yang kurang dari $p_1^kp_2^k$ dan tidak relatif prima terhadap $p_1^kp_2^k$ada sebanyak

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) + n(A \cap B) \\ &= \left(p_1^{k-1}p_2^k - 1\right) + \left(p_1^kp_2^{k-1} - 1\right) - \left(p_1^{k-1}p_2^{k-1} - 1\right) \end{aligned}$$

$$= p_1^{k-1}p_2^k + p_1^k p_2^{k-1} - p_1^{k-1}p_2^{k-1} - 1. \quad (12)$$

Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{aligned}\varphi(p_1p_2) &= n(S) - n(A \cup B)\\ &= \left(p_1^k p_2^k - 1\right) + (p_1^{k-1}p_2^k + p_1^k p_2^{k-1} - p_1^{k-1}p_2^{k-1} - 1)\\ &= p_1^k p_2^k - p_1^{k-1}p_2^k - p_1^k p_2^{k-1} + p_1^{k-1}p_2^{k-1}\\ &= p_1^{k-1}p_2^{k-1}(p_1 - 1)(p_2 - 1). \quad (13)\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh nilai fungsi *totient* Euler untuk $n = p_1^k p_2^k$ adalah $\varphi(n) = \varphi\left(p_1^k p_2^k\right) = p_1^{k-1}p_2^{k-1}(p_1 - 1)(p_2 - 1)$. ■

Selanjutnya, untuk menentukan nilai $\varphi(n)$ untuk $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}$ dengan $k_1 \neq k_2$, dapat dilakukan dengan cara analog seperti saat membuktikan Teorema 5.

Teorema 6

Diberikan bilangan k_1, k_2 dan n dengan $k_1 \neq k_2$ serta bilangan prima p_1 dan p_2 dengan $p_1 \neq p_2$, sedemikian sehingga n dapat dinyatakan sebagai perkalian dari dua bilangan prima berbeda berpangkat bilangan asli, yaitu $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}$. Dengan demikian, berlaku $\varphi(n) = \varphi\left(p_1^{k_1}p_2^{k_2}\right) = p_1^{k_1-1}p_2^{k_2-1}(p_1 - 1)(p_2 - 1)$.

Bukti. Berdasarkan Definisi 12, akan dicari bilangan asli yang kurang dari $p_1^k p_2^k$. Bilangan-bilangan tersebut yaitu $S = \{1, 2, \dots, (p_1^{k_1}p_2^{k_2} - 1)\}$, sehingga diperoleh $n(S) = p_1^{k_1}p_2^{k_2} - 1$. Selanjutnya, dari himpunan S, akan dicari bilangan-bilangan yang tidak relatif prima terhadap $p_1^{k_1}p_2^{k_2}$. Diketahui faktor prima dari $p_1^{k_1}p_2^{k_2}$ adalah p_1 dan p_2, sehingga berdasarkan Definisi 4, $p_1 \mid p_1^{k_1}p_2^{k_2}$ dan $p_2 \mid p_1^{k_1}p_2^{k_2}$. Berdasarkan akibat dari Definisi 7, bilangan asli yang tidak relatif prima terhadap $p_1^{k_1}p_2^{k_2}$ adalah bilangan yang mempunyai faktor p_1 maupun p_2. Dari himpunan S, bilangan yangmemiliki faktor p_1 adalah

$$A = \left\{p_1, 2p_1, 3p_1, \dots, \left(p_1^{k_1-1}p_2^{k_2} - 1\right)p_1\right\}.$$

Sementara bilangan yang memiliki faktor p_2 adalah

$$B = \left\{p_2, 2p_2, 3p_2, \dots, \left(p_1^{k_1}p_2^{k_2-1} - 1\right)p_2\right\}.$$

Kemudian, terdapat juga bilangan-bilangan yang mempunyai faktor p_1 sekaligus p_2, yaitu

$$A \cap B = \left\{p_1p_2, 2p_1p_2, \dots, \left(p_1^{k_1-1}p_2^{k_2-1} - 1\right)p_1p_2\right\}.$$

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh

$$\begin{aligned}n(A) &= p_1^{k_1-1}p_2^{k_2} - 1\\ n(B) &= p_1^{k_1}p_2^{k_2-1} - 1\\ n(A \cap B) &= p_1^{k_1-1}p_2^{k_2-1} - 1\end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh bilangan yang kurang dari $p_1^k p_2^k$ dan tidak relatif prima terhadap $p_1^k p_2^k$ada sebanyak

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) + n(A \cap B) \\ &= \left(p_1^{k_1-1} p_2^{k_2} - 1\right) + \left(p_1^{k_1} p_2^{k_2-1} - 1\right) - \left(p_1^{k_1-1} p_2^{k_2-1} - 1\right) \\ &= p_1^{k_1-1} p_2^{k_2} + p_1^{k_1} p_2^{k_2-1} - p_1^{k_1-1} p_2^{k_2-1} - 1. \end{aligned} \tag{14}$$

Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{aligned} \varphi(p_1 p_2) &= n(S) - n(A \cup B) \\ &= \left(p_1^{k_1} p_2^{k_2} - 1\right) + (p_1^{k_1-1} p_2^{k_2} + p_1^{k_1} p_2^{k_2-1} - p_1^{k_1-1} p_2^{k_2-1} - 1) \\ &= p_1^{k_1} p_2^{k_2} - p_1^{k_1-1} p_2^{k_2} - p_1^{k_1} p_2^{k_2-1} + p_1^{k_1-1} p_2^{k_2-1} \\ &= p_1^{k_1-1} p_2^{k_2-1} (p_1 - 1)(p_2 - 1). \end{aligned} \tag{15}$$

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh nilai fungsi *totient* Euler untuk $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2}$ adalah $\varphi(n) = \varphi\left(p_1^{k_1} p_2^{k_2}\right) = p_1^{k_1-1} p_2^{k_2-1} (p_1 - 1)(p_2 - 1)$. ■

Teorema 6 yang merupakan persamaan bentuk umum dari Teorema 4 dan Teorema 5 kemudian disubstitusikan ke dalam teorema Euler untuk dibandingkan dengan teorema kecil Fermat. Diketahui bentuk teorema Euler adalah $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \; mod \; n$ sehingga untuk $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2}$ diperoleh

$$\begin{aligned} a^{\varphi(n)} &\equiv 1 \; mod \; n \\ a^{\varphi\left(p_1^{k_1} p_2^{k_2}\right)} &\equiv 1 \; mod \; p_1^{k_1} p_2^{k_2} \\ a^{p_1^{k_1-1} p_2^{k_2-1} (p_1-1)(p_2-1)} &\equiv 1 \; mod \; p_1^{k_1} p_2^{k_2} \; . \end{aligned} \tag{16}$$

Berdasarkan uraian di atas, dapat dilihat bahwa bentuk teorema Euler berbeda dengan bentuk teorema kecil Fermat saat $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2}$. Hal ini dapat diamati lebih mudah saat pangkatnya diganti dengan bilangan asli. Ambil $k_1 = k_2 = 1$, sehingga teorema Euler akan berbentuk

$$a^{(p_1-1)(p_2-1)} \equiv 1 \; mod \; p_1 p_2. \tag{17}$$

Sementara itu, teorema kecil Fermat berbentuk

$$a^{p-1} \equiv 1 \; mod \; p.$$

Terlihat bahwa perbedaan dari kedua persamaan di atas terletak pada peluasan modulo dan pangkat dari basis a. Pada teorema Euler, modulonya diperluas pada bilangan asli yang berbentuk $p_1 p_2$, sementara pada teorema kecil Fermat dibatasi pada bilangan prima p. Adapun perbedaan pangkat pada basis a disebabkan oleh fungsi *totient* Euler, yang mana nilainya bergantung pada domain (modulo). Namun, dapat dilihat bahwa pola perluasan pada teorema Euler masih mewarisi bentuk teorema kecil Fermat. Hal ini menunjukkan bahwa fungsi *totient* Euler berhasil memperluas teorema kecil Fermat yang awalnya hanya dibatasi pada bilangan prima menjadi pada bilangan asli. Namun, perlu ditekankan bahwa bilangan asli yang dimaksud disini adalah bilangan asli yang dapat dinyatakan sebagai perkalian dari dua bilangan prima yang masing-masing berpangkat bilangan asli.

5 KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan, dapat ditarik kesimpulan bahwa nilai fungsi *totient* Euler untuk $n = p$ dinyatakan dengan $\varphi(n) = \varphi(p) = p - 1$. Kemudian, nilai fungsi *totient* Euler untuk $n = p^k$ dinyatakan dengan $\varphi(n) = \varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$. Adapun nilai fungsi *totient* Euler untuk $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2}$ adalah $\varphi(n) = \varphi\left(p_1^{k_1} p_2^{k_2}\right) = p_1^{k_1-1} p_2^{k_2-1}(p_1 - 1)(p_2 - 1)$. Nilai fungsi *totient* Euler untuk $n = p$ menyebabkan teorema Euler sama persis dengan bentuk teorema kecil Fermat. Sementara itu, nilai fungsi *totient* Euler untuk $n = p^k$ dan $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2}$ menyebabkan teorema Euler berbeda dengan teorema kecil Fermat karena modulonya diperluas pada bilangan asli yang bukan prima (komposit). Dengan demikian, diperoleh hubungan bahwa teorema kecil Fermat merupakan bentuk khusus dari teorema Euler, yaitu saat $n = p$.

Selain itu, pembahasan pada artikel ini hanya dibatasi pada domain bilangan asli yang dapat dinyatakan sebagai perkalian dari dua bilangan prima yang berbeda. Penelitian selanjutnya disarankan untuk memperluas domain pada bilangan asli yang dapat dinyatakan sebagai berkalian dari beberapa (lebih dari dua) bilangan prima berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Niven, I., Zuckerman, H. S., & Montgomery, H. L. (1991). *An Introduction to the Theory of Numbers* (Edisi ke-5). John Wiley & Sons, Inc.

[2] Rosen, K. H. (1984). *Elementary Number and Its Applications*. In *Mathematics of Computation* (Vol. 48, Issue 177). Addison Wesley Pub. Co.

[3] Ross, K. A. (2013). *Elementary Analysis: the Theory of Calculus* (Edisi ke-2). Springer.

[4] Lipschutz, S. (1998). *Theory and Problems of Set Theory and Related Topic* (Edisi ke-2). The McGraw Hill Companies Inc.