Pembentukan (*R*,*S*)-Modul Dari (*R*,*S*)-Bimodul

Erlinda Dewi Ratnasari[1], Suroto[1*], Bambang Hendriya Guswanto[1]

[1]Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Jenderal Soedirman, Indonesia

Corresponding author: suroto@unsoed.ac.id

Abstrak. Pada artikel ini dibahas tentang pembentukan (R,S)-modul dari (R,S)-bimodul, untuk R dan S adalah sembarang ring. Pembentukan (R,S)-modul ini dilakukan dengan memperlemah syarat kompabilitas pada (R,S)-bimodul. Hasil penelitian menunjukkan bahwa (R,S)-modul merupakan bentuk perumuman dari (R,S)-bimodul dengan menghilangkan syarat kompatibilitas pada (R,S)-bimodul. Selain itu, (R,S)-modul merupakan (R,S)-bimodul apabila ring R dan ring S masing-masing memiliki elemen idempoten sentral selain elemen nol.

Kata Kunci: *idempotent sentral, kompabilitas*, (R,S)-*bimodul*, (R,S)-*modul*

1. PENDAHULUAN

Struktur aljabar merupakan ilmu yang mempelajari tentang satu atau lebih himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi biner yang didefinisikan [1]. Struktur aljabar yang terdiri dari suatu himpunan G yang tak kosong dan dilengkapi dengan satu operasi sehingga operasinya bersifat tertutup disebut dengan grupoid. Grupoid yang bersifat asosiatif merupakan semigrup. Semigrup yang memiliki elemen identitas adalah suatu struktur aljabar yang dinamakan monoid. Selanjutnya, monoid yang setiap elemennya mempunyai invers merupakan suatu grup. Apabila operasi pada grup bersifat komutatif maka disebut dengan grup abel. Ring adalah suatu struktur aljabar yang terdiri dari suatu himpunan R yang tak kosong dan dilengkapi dengan dua operasi yaitu operasi penjumlahan dan operasi perkalian. Syarat yang harus dipenuhi oleh suatu ring R yaitu R terhadap operasi penjumlahan merupakan grup abel, R terhadap operasi perkalian merupakan semigrup, serta operasi perkalian bersifat distributif kiri dan kanan terhadap operasi penjumlahan. Apabila suatu ring R memiliki elemen identitas terhadap operasi perkalian maka R dinamakan ring dengan elemen satuan. Apabila operasi perkalian pada ring R bersifat komutatif maka ring R dinamakan ring komutatif. Ring R adalah ring komutatif dengan elemen satuan apabila R merupakan ring komutatif serta memiliki elemen identitas terhadap operasi perkalian [2].

Struktur aljabar yang dibentuk oleh suatu grup abel M terhadap operasi penjumlahan dan suatu ring R, yang dilengkapi dengan operasi perkalian skalar sehingga memenuhi syarat-syarat tertentu disebut dengan modul M atas ring R [3]. Selanjunya, modul M atas ring R dapat ditulis dengan $M = R$-modul. Modul kiri M atas ring R adalah sebuah modul yang elemen pada ringnya berada di sebelah kiri pada saat melakukan operasi perkalian skalar, sedangkan modul kanan M atas ring R adalah sebuah modul yang elemen pada ringnya berada di sebelah kanan pada saat melakukan operasi perkalian skalar. Operasi perkalian skalar pada modul kiri M atas ring R adalah $*: R \times M \to M$, sedangkan operasi perkalian skalar pada modul kanan M atas ring R adalah $*: M \times R \to M$ [4].

Struktur (R, S)-bimodul merupakan perumuman dari modul [5], [6]. Suatu (R, S)-bimodul adalah struktur aljabar yang terdiri dari ring R dan ring S serta grup abel M dan operasi perkalian skalar $*: R \times M \to M$ serta $\bullet: M \times S \to M$ sedemikian sehingga M merupakan modul kiri atas ring R, M merupakan modul kanan atas ring S, dan memenuhi sifat kompatibilitas yakni untuk setiap $r \in R$, $m \in M$, dan $s \in S$ memenuhi $r * (m \bullet s) = (r * m) \bullet s$ [5]. Penelitian tentang (R, S)-bimodul telah dikaji oleh beberapa peneliti seperti pada [7] dan [8]. Pada penelitian ini akan dibahas mengenai perumuman (R, S)-bimodul menjadi (R, S)-modul. Penulis melengkapi bukti dan beberapa contoh yang belum dibahas pada [9]. Keterbaruan dari penelitian ini adalah memberikan bukti bahwa jika M adalah (R, S)-bimodul maka M pasti merupakan (R, S)-modul. Hal tersebut dikarenakan banyak penelitian terdahulu tentang (R, S)-modul menyebutkan bahwa (R, S)-

bimodul pasti merupakan (R,S)-modul sedangkan (R,S)-modul belum tentu merupakan (R,S)-bimodul, tetapi belum memberikan bukti dari pernyataan tersebut. Dengan diperolehnya struktur (R,S)-modul, maka struktur dari (R,S)-bimodul dapat ditinjau sebagai kejadian khusus dari (R,S)-modul.

2. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka yaitu mengembangkan teori pada [9] dengan cara melengkapi pembuktian serta contoh yang belum disajikan. Selanjutnya, penulis mengumpulkan informasi-informasi yang sesuai dengan topik yang akan diteliti dari berbagai sumber seperti jurnal, buku, dan *e-book*. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini yaitu mendefinisikan (R,S)-modul, menunjukkan bahwa (R,S)-modul merupakan bentuk perumuman dari (R,S)-bimodul, memberikan *counter example* (R,S)-modul yang tidak memenuhi (R,S)-bimodul, serta menunjukkan syarat agar (R,S)-modul merupakan (R,S)-bimodul.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini merupakan pembahasan utama pada penelitian ini. Pada bagian ini disajikan pembentukan (R,S)-modul dari (R,S)-bimodul serta hubungan antara (R,S)-modul dari (R,S)-bimodul yang menggambarkan bahwa (R,S)-modul merupakan perumuman dari (R,S)-bimodul.

Sebelum membahas (R,S)-modul merupakan perumuman dari (R,S)-bimodul, terlebih dahulu diberikan definisi dari (R,S)-bimodul.

Definisi 1 [5]. *Diberikan R dan S masing-masing adalah ring, M adalah suatu grup abel terhadap operasi penjumlahan, dan operasi perkalian skalar $*: R \times M \to M$ serta $\bullet: M \times S \to M$. Himpunan M merupakan (R,S)-bimodul apabila M merupakan modul kiri atas ring R, M merupakan modul kanan atas ring S, dan memenuhi sifat kompatibilitas yaitu untuk setiap $r \in R$, $s \in S$, dan $m \in M$ memenuhi $r * (m \bullet s) = (r * m) \bullet s$.*

Berikut ini diberikan contoh struktur aljabar dengan M merupakan modul kiri atas ring R, M merupakan modul kanan atas ring S, tetapi tidak memenuhi sifat kompatibilitas pada (R,S)-bimodul.

Contoh 2. Diberikan

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \middle| p, q \in \mathbb{R} \right\}$$

adalah himpunan semua vektor 2-tupel dengan entri bilangan riil merupakan grup abel terhadap operasi penjumlahan vektor. Himpunan

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} k & l \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| k, l \in \mathbb{R} \right\}$$

merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks, dan himpunan

$$R[x] = \{ax + b | a, b \in \mathbb{R}\}$$

merupakan ring polinomial terhadap operasi penjumlahan dan operasi perkalian yang didefinisikan dengan

$$f(x) + g(x) = (ax + b) + (cx + d) = (a + c)x + (b + d)$$
$$f(x) \times g(x) = (ax + b) \times (cx + d) = acx + bd$$

untuk setiap $f(x), g(x) \in R[x]$. Selanjutnya, didefinisikan operasi perkalian skalar $*: B \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dengan definisi

$$*(B_1, v_1) = B_1 * v_1 = \begin{pmatrix} k & l \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} kp + lq \\ 0 \end{pmatrix}$$

untuk setiap $B_1 \in B$ dan $v_1 \in \mathbb{R}^2$, serta didefinisikan pula operasi perkalian skalar $\bullet: \mathbb{R}^2 \times R[x] \to \mathbb{R}^2$ dengan definisi

$$\bullet\,(v_1, f(x)) = v_1 \bullet f(x) = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \bullet (ax + b) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} pa \\ qb \end{pmatrix}$$

untuk setiap $v_1 \in \mathbb{R}^2$ dan $f(x) \in R[x]$. Himpunan $\mathbb{R}^2$ merupakan modul kiri atas ring B, serta himpunan $\mathbb{R}^2$ merupakan modul kanan atas ring $R[x]$. Selanjutnya, diperhatikan bahwa

$$B_1 * \big(v_1 \bullet f(x)\big) = \begin{pmatrix} k & l \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \bullet (ax + b)\right) = \begin{pmatrix} k & l \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} pa \\ qb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kpa + lqb \\ 0 \end{pmatrix}$$

dan

$$(B_1 * v_1) \bullet f(x) = \left(\begin{pmatrix} k & l \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right) \bullet (ax + b) = \begin{pmatrix} kp + lq \\ 0 \end{pmatrix} \bullet (ax + b) = \begin{pmatrix} kpa + lqa \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Misalkan

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{dan } f(x) = 5x + 7$$

sehingga diperoleh

$$B_1 * \big(v_1 \bullet f(x)\big) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet (5x + 7)\right) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 71 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dan

$$(B_1 * v_1) \bullet f(x) = \left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \bullet (5x + 7) = \begin{pmatrix} 3 + 8 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet (5x + 7) = \begin{pmatrix} 55 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jadi, $B_1 * (v_1 \bullet f(x))$ belum tentu sama dengan $(B_1 * v_1) \bullet f(x)$ sehingga sifat kompatibilitas tidak terpenuhi. Dengan demikian, $\mathbb{R}^2$ bukan merupakan $(B, R[x])$-bimodul. ■

Berdasarkan Contoh 2, terdapat struktur aljabar yang memenuhi M merupakan modul kiri atas ring R, M merupakan modul kanan atas ring S, tetapi tidak memenuhi sifat kompatibilitas pada (R, S)-bimodul. Oleh karena hal tersebut, struktur (R, S)-bimodul dapat dilakukan perumuman menjadi struktur aljabar baru yang disebut dengan (R, S)-modul. Berikut diberikan definisi dari (R, S)-modul.

Definisi 3. *Diberikan R dan S masing-masing adalah ring, M merupakan suatu grup abel terhadap operasi penjumlahan, dan didefinisikan operasi perkalian* *skalar* $(*,\bullet): R \times M \times S \to M$. *Himpunan* M *merupakan* (R, S)*-modul apabila memenuhi:*

1. *untuk setiap* $r \in R; m, n \in M;\ s \in S$ *berlaku*
$$r * (m + n) \bullet s = r * m \bullet s + r * n \bullet s;$$
2. *untuk setiap* $r_1, r_2 \in R; m \in M; s \in S$ *berlaku*
$$(r_1 + r_2) * m \bullet s = r_1 * m \bullet s + r_2 * m \bullet s;$$
3. *untuk setiap* $r \in R; m \in M; s_1, s_2 \in S$ *berlaku*
$$r * m \bullet (s_1 + s_2) = r * m \bullet s_1 + r * m \bullet s_2;$$
4. *untuk setiap* $r_1, r_2 \in R; m \in M; s_1, s_2 \in S$ *berlaku*
$$r_1 * (r_2 * m \bullet s_1) \bullet s_2 = (r_1 r_2) * m \bullet (s_1 s_2).$$

Berdasarkan syarat-syarat (R, S)-modul pada Definisi 3, terlihat bahwa M hanya perlu merupakan modul kiri atas ring R dan modul kanan atas ring S sehingga (R, S)-modul merupakan perumuman dari (R, S)-bimodul dengan memperlemah syarat kompatibilitas pada (R, S)-bimodul. Dengan kata lain, struktur (R, S)-modul dapat dibentuk dari (R, S)-bimodul, dengan memperlemah syarat kompatibilitas pada (R, S)-bimodul.

Contoh 4. Pada Contoh 2 sudah dijelaskan bahwa $\mathbb{R}^2$ bukan merupakan $(B, R[x])$-bimodul karena sifat kompatibilitas tidak terpenuhi. Selanjutnya didefinisikan operasi perkalian skalar $(*,\bullet): B \times \mathbb{R}^2 \times R[x] \to \mathbb{R}^2$ dengan definisi $(*,\bullet)\big(B_1, v_1, f(x)\big) = B_1 * v_1 \bullet f(x) = \begin{pmatrix} k & l \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \bullet (ax + b) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} kpa + lqa \\ 0 \end{pmatrix}$ untuk setiap $B_1 \in B$, $v_1 \in \mathbb{R}^2$, dan $f(x) \in R[x]$. Diperhatikan bahwa untuk setiap $B_1, B_2 \in B$ dengan $B_1 = \begin{pmatrix} k & l \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $B_2 = \begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, untuk setiap $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ dengan $v_1 = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ dan $v_2 = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$, serta untuk setiap $f(x), g(x) \in R[x]$ dengan $f(x) = ax + b$ dan $g(x) = cx + d$ memenuhi:

a. $$\begin{aligned} B_1 * (v_1 + v_2) \bullet f(x) &= \begin{pmatrix} k & l \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}\right) \bullet (ax + b) \\ &= \begin{pmatrix} k & l \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} p + r \\ q + s \end{pmatrix} \bullet (ax + b) \\ &= \begin{pmatrix} kpa + kra + lqa + lsa \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} kpa + lqa \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kra + lsa \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k & l \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \bullet (ax + b) + \begin{pmatrix} k & l \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \bullet (ax + b) \\ &= B_1 * v_1 \bullet f(x) + B_1 * v_2 \bullet f(x); \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} (B_1 + B_2) * v_1 \bullet f(x) &= \left(\begin{pmatrix} k & l \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) * \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \bullet (ax + b) \\ &= \begin{pmatrix} k + m & l + n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \bullet (ax + b) \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} kpa + lqa + mpa + nqa \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} kpa + lqa \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mpa + nqa \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} k & l \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \bullet (ax+b) + \begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \bullet (ax+b)$$
$$= B_1 * v_1 \bullet f(x) + B_2 * v_1 \bullet f(x);$$

c. $B_1 * v_1 \bullet \big(f(x) + g(x)\big) = \begin{pmatrix} k & l \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \bullet \big((ax+b) + (cx+d)\big)$

$$= \begin{pmatrix} k & l \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \bullet \big((a+c)x + (b+d)\big)$$
$$= \begin{pmatrix} kpa + lqa + kpc + lqc \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} kpa + lqa \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kpc + lqc \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} k & l \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \bullet (ax+b) + \begin{pmatrix} k & l \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \bullet (cx+d)$$
$$= B_1 * v_1 \bullet f(x) + B_1 * v_1 \bullet g(x);$$

dan

d. $B_1 * \big(B_2 * v_1 \bullet f(x)\big) \bullet g(x) = \begin{pmatrix} k & l \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \bullet (ax+b)\right) \bullet (cx+d)$

$$= \begin{pmatrix} k & l \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} mpa + nqa \\ 0 \end{pmatrix} \bullet (cx+d)$$
$$= \begin{pmatrix} k(mpa)c + k(nqa)c \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (km)p(ac) + (kn)q(ac) \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \left(\begin{pmatrix} k & l \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) * \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \bullet \big((ax+b) \times (cx+d)\big)$$
$$= (B_1B_2) * v_1 \bullet (f(x) \times g(x)).$$

Karena memenuhi empat syarat di atas, maka $\mathbb{R}^2$ merupakan $(B, R[x])$-modul. ∎

Diberikan M adalah (R,S)-bimodul dengan R dan S adalah ring sembarang. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa M adalah (R,S)-modul. Himpunan M adalah (R,S)-bimodul yang berarti M merupakan modul kiri atas ring R, M merupakan modul kanan atas ring S, dan memenuhi sifat kompatibilitas yaitu untuk setiap $r \in R$, $s \in S$, dan $m \in M$ memenuhi $r * (m \bullet s) = (r * m) \bullet s$.

Didefinisikan operasi perkalian skalar $(*,\bullet): R \times M \times S \to M$ dengan definisi

$$(*,\bullet)(r,m,s) = r * m \bullet s$$

untuk setiap $r \in R, m \in M$, dan $s \in S$ dengan $*$ dan $\bullet$ mengacu pada (R,S)-bimodul. Ambil sembarang $r_1, r_2 \in R$, $m_1, m_2 \in M$, dan $s_1, s_2 \in S$. Karena M adalah (R,S)-bimodul yang berarti M merupakan modul kiri atas ring R, M merupakan modul kanan atas ring S maka berlaku

1. $r_1 * (m_1 + m_2) \bullet s_1 = (r_1 * m_1 + r_1 * m_2) \bullet s_1 = r_1 * m_1 \bullet s_1 + r_1 * m_2 \bullet s_1$;
2. $(r_1 + r_2) * m_1 \bullet s_1 = (r_1 * m_1 + r_2 * m_1) \bullet s_1 = r_1 * m_1 \bullet s_1 + r_2 * m_1 \bullet s_1$;

3. $r_1 * m_1 \bullet (s_1 + s_2) = r_1 * (m_1 \bullet s_1 + m_1 \bullet s_2) = r_1 * m_1 \bullet s_1 + r_1 * m_1 \bullet s_2$ dan
4. $r_1 * (r_2 * m_1 \bullet s_1) \bullet s_2 = (r_1 r_2) * (m_1 \bullet s_1) \bullet s_2 = (r_1 r_2) * m_1 \bullet (s_1 s_2)$.

Karena memenuhi keempat aksioma pada (R, S)-modul dan elemen yang diambil adalah sembarang maka dapat disimpulkan bahwa setiap (R, S)-bimodul pasti merupakan (R, S)-modul.

Struktur aljabar (R, S)-modul merupakan suatu perumuman dari (R, S)-bimodul sehingga (R, S)-bimodul merupakan kejadian khusus dari (R, S)-modul. Hal tersebut berarti bahwa (R, S)-bimodul pasti merupakan (R, S)-modul, tetapi (R, S)-modul belum tentu merupakan (R, S)-bimodul. Setiap (R, S)-modul merupakan (R, S)-bimodul apabila ring R dan ring S masing-masing mempunyai elemen idempoten sentral selain elemen nol. Elemen idempoten sentral adalah elemen e dalam suatu ring R apabila $e^2 = e$ dan untuk setiap $r \in R$ berlaku $er = re$.

Teorema berikut ini menjelaskan syarat agar (R, S)-modul memenuhi syarat untuk menjadi (R, S)-bimodul.

Teorema 5. *Diberikan M adalah (R, S)-modul. Jika ring R dan ring S masing-masing memiliki elemen idempoten sentral selain elemen nol, maka M merupakan modul kiri atas ring R dan modul kanan atas ring S serta memenuhi sifat kompatibilitas yaitu $r * (m \bullet s) = (r * m) \bullet s$ untuk setiap $r \in R$, $m \in M$, dan $s \in S$, atau dengan kata lain M merupakan (R, S)-bimodul.*

Bukti. Diberikan elemen idempoten sentral $\alpha \in R$ dan $\beta \in S$. Didefinisikan operasi perkalian skalar $*: R \times M \to M$ dengan definisi

$$* (r, m) = r * m \stackrel{\text{def}}{=} rm\beta$$

untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$, serta operasi perkalian skalar $\bullet: M \times S \to M$ dengan definisi

$$\bullet (m, s) = m \bullet s \stackrel{\text{def}}{=} \alpha m s$$

untuk setiap $m \in M$ dan $s \in S$. Diperhatikan bahwa untuk setiap $r_1, r_2 \in R$ dan $m_1, m_2 \in M$ memenuhi

a. $(r_1 + r_2) * m_1 = (r_1 + r_2) m_1 \beta = r_1 m_1 \beta + r_2 m_1 \beta = r_1 * m_1 + r_2 * m_1$;
b. $(r_1 r_2) * m_1 = (r_1 r_2) m_1 \beta = r_1 (r_2 m_1) \beta = r_1 * (r_2 m_1)$; dan
c. $r_1 * (m_1 + m_2) = r_1 (m_1 + m_2) \beta = r_1 m_1 \beta + r_1 m_2 \beta = r_1 * m_1 + r_1 * m_2$.

Karena memenuhi tiga syarat di atas maka M merupakan modul kiri atas ring R.
Selanjutnya, untuk setiap $m_1, m_2 \in M$ dan $s_1, s_2 \in S$ memenuhi

a. $m_1 \bullet (s_1 + s_2) = \alpha m_1 (s_1 + s_2) = \alpha m_1 s_1 + \alpha m_1 s_2 = m_1 \bullet s_1 + m_1 \bullet s_2$;
b. $m_1 \bullet (s_1 s_2) = \alpha m_1 (s_1 s_2) = \alpha (m_1 s_1) s_2 = (m_1 s_1) \bullet s_2$; dan
c. $(m_1 + m_2) \bullet s_1 = \alpha (m_1 + m_2) s_1 = \alpha m_1 s_1 + \alpha m_2 s_1 = m_1 \bullet s_1 + m_2 \bullet s_1$.

Karena memenuhi tiga syarat di atas maka M merupakan modul kanan atas ring S.
Himpunan M adalah (R, S)-modul serta $\alpha \in R$ dan $\beta \in S$ adalah elemen idempoten sentral sehingga berlaku

$$\begin{aligned} r * (m \bullet s) &= r(m \bullet s)\beta \\ &= r(\alpha m s)\beta \\ &= (r\alpha)m(s\beta) \\ &= (\alpha r)m(\beta s) \\ &= \alpha(rm\beta)s \\ &= (rm\beta) \bullet s \\ &= (r * m) \bullet s. \end{aligned}$$

Dengan demikian, sifat kompatibilitas pada bimodul terpenuhi. Karena memenuhi syarat-syarat di atas, maka dapat disimpulkan bahwa M merupakan (R, S)-bimodul. Jadi, terbukti bahwa jika M adalah (R, S)-modul dengan ring R dan ring S masing-masing memiliki elemen idempoten sentral, maka M merupakan (R, S)-bimodul. ■

4. KESIMPULAN

Struktur aljabar (R, S)-modul dapat dibentuk dari struktur (R, S)-modul. Pembentukan tersebut dilakukan dengan memperlemah syarat kompatibilitas pada (R, S)-bimodul. Suatu (R, S)-bimodul pasti merupakan (R, S)-modul, tetapi (R, S)-modul belum tentu merupakan (R, S)-bimodul. Setiap (R, S)-modul merupakan (R, S)-bimodul jika ring R dan ring S masing-masing mempunyai elemen idempoten sentral selain elemen nol. Untuk penelitian selanjutnya dapat mengkaji tentang sifat-sifat (R, S)-modul, sub (R, S)-modul, dan homomorfisma (R, S)-modul.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Gilbert, L. (2013). *Elements of Modern Algebra* (8th ed.). Stamford: Cengange Learning.

[2] Dummit, D. S., dan Foote, R. M. (2004). *Abstract Algebra* (3rd ed.). Toronto: Wiley.

[3] Wisbauer, R. (1991). *Foundations of Module and Ring Theory* (1st ed.). Philadelphia: Gordon and Breach Science Publisher.

[4] Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Yuwaningsih, D. A., dan Hartanto, A. D. (2016). *Teori Ring dan Modul* (2nd ed.). Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.

[5] Adkins, W. A., dan Weintraub, S. H. (1992). *Algebra "An Approach via Module Theory."* New York: Springer.

[6] Knapp, A. W. (2006). *Basic Algebra*. Boston: Birkhauser.

[7] Yamagami, S. (1994). Modular Theory for Bimodules. *Journal of Functional Analysis*, *125*, 327–357.

[8] Araya, T., Takahashi, R., dan Yoshino, Y. (2005). Homological Invariants Associated to Semi-Dualizing Bimodules. *Kyoto Journal of Mathematics*, *45*(2), 287–306.

[9] Khumprapussorn, T., Pianskool, S., dan Hall, M. (2012). (R,S)-Modules and Their Fully and Jointly Prime Submodules. *International Mathematical Forum*, *7*(33), 1631–1643.