Eksistensi Nilai Eigen Pada Matriks Atas Aljabar Max-Plus

Wiwit Melinasari[1], Suroto[1*], Siti Rahmah Nurshiami[1]

[1]Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Jenderal Soedirman, Indonesia

Corresponding author: suroto@unsoed.ac.id

Abstrak. Pembahasan nilai eigen pada aljabar linier dilakukan pada matriks atas lapangan riil/kompleks dengan menggunakan persamaan karakteristik. Sementara itu, struktur dari aljabar max-plus adalah semilapangan, sehingga penentuan nilai eigen tidak dapat dilakukan dengan menggunakan persamaan karakteristik seperti pada aljabar linier. Pada artikel ini dibahas mengenai eksistensi nilai eigen pada matriks atas aljabar max-plus. Penentuan eksistensi nilai eigen ini dilakukan dengan cara menentukan bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer pada graf *precedence* dari matriks atas aljabar max-plus. Hasil penelitian menunjukkan bahwa eksistensi nilai eigen pada matriks atas aljabar max-plus terjamin selalu ada. Hal ini dikarenakan terjaminnya eksistensi nilai bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer pada graf *precedence* matriks atas aljabar max-plus.

Kata Kunci: *aljabar max-plus, eksistensi, graf precedence, nilai eigen, sirkuit elementer*

1. PENDAHULUAN

Misalkan $\mathbb{R}$ adalah himpunan semua bilangan riil. Aljabar max-plus adalah himpunan $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ yang dilengkapi dengan dua operasi biner, yaitu penjumlahan yang didefinisikan dengan $x \oplus y = \max\{x, y\}$ dan perkalian yang didefinisikan dengan $x \otimes y = x + y$, untuk setiap $x, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ [1]. Setiap elemen selain elemen netral pada $\mathbb{R}_{\max}$ tidak memiliki invers terhadap operasi penjumlahan. Struktur aljabar dari aljabar max-plus adalah semilapangan [2]. Hal ini yang menjadi perbedaan utama objek pembahasan antara aljabar max-plus dengan aljabar linier.

Pada pembahasan aljabar linier, matriks didefinisikan sebagai susunan bilangan atau fungsi yang tersusun dalam baris dan kolom serta diapit oleh dua kurung siku [3]. Pendefinisian matriks atas aljabar max-plus dilakukan secara analog seperti pendefinisian matriks pada aljabar linier. Pada aljabar max-plus, matriks persegi A dapat direpresentasikan dalam bentuk graf yang disebut dengan graf *precedence* dan dinotasikan dengan $G(A)$.

Pembahasan matriks persegi pada aljabar linier sangat berkaitan erat dengan pembahasan nilai eigen. Permasalahan nilai eigen pada aljabar linier, memiliki peranan penting pada permasalahan kehidupan sehari-hari. Penelitian tentang aplikasi nilai eigen pada aljabar linier pernah dilakukan oleh beberapa peneliti antara lain penggunaan nilai eigen dalam *analytical hierarchy process* untuk memilih tempat kerja [4], serta penggunaan nilai eigen dan vektor eigen untuk menentukan prioritas faktor-faktor penentu pemilihan tempat makan [5]. Seperti halnya pada matriks persegi aljabar linier, pada pembahasan matriks persegi atas aljabar max-plus juga berkaitan erat dengan masalah nilai eigen. Penelitian tentang aplikasi nilai eigen atas aljabar max-plus pernah dilakukan oleh beberapa peneliti, antara lain penggunaan nilai eigen atas aljabar max-plus pada model sistem produksi sederhana [6], dan penggunaan nilai eigen atas aljabar max-plus pada pengaturan sistem antrian *traffic light* [7].

Misalkan A adalah matriks persegi pada aljabar linier. Vektor taknol $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen dari A jika $A\bar{x}$ adalah kelipatan skalar dari $\bar{x}$, yaitu $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ untuk suatu skalar λ. Untuk memperoleh nilai eigen dari matriks persegi A, dapat dilakukan dengan menyelesaikan persamaan $\det(\lambda I - A) = 0$, yakni persamaan karakteristik matriks A. Karena struktur aljabar dari aljabar max-plus adalah semilapangan, maka penentuan nilai eigen tidak bisa dilakukan dengan menggunakan persamaan karakteristik seperti pada aljabar linier. Dengan demikian, perlu dilakukan pembahasan lebih lanjut tentang nilai eigen pada matriks atas aljabar max-plus. Pada artikel ini, penulis membahas tentang eksistensi nilai eigen pada matriks atas aljabar max-plus. Penulis memberikan pembuktian lebih detail serta memberikan beberapa contohnya yang belum disajikan secara detail pada [8]. Penentuan eksistensi dilakukan dengan memanfaatkan graf *precedence* dari matriks atas aljabar max-plus.

2. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan adalah studi pustaka dengan mengumpulkan dan mempelajari berbagai sumber pustaka berupa buku, jurnal, dan hasil penelitian sebelumnya yang berkaitan dengan masalah nilai eigen dan vektor eigen atas aljabar max-plus. Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan dalam menentukan eksistensi nilai eigen pada matriks A atas aljabar max-plus adalah sebagai berikut:

1. Mendefinisikan nilai eigen pada matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$.
2. Menentukan graf *precedence* $G(A)$ dari matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$.
3. Menentukan bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dari $G(A)$ yang selanjutnya dinotasikan dengan $\lambda_{\max}(A)$.
4. Mendefinisikan sirkuit kritis pada graf *precedence* $G(A)$.
5. Menentukan sirkuit (s,s) dengan $1 \le s \le n$ yang merupakan sirkuit kritis dari $G(A)$.
6. Menentukan matriks $B = -\lambda_{\max}(A) \otimes A$ dan $B^* = E_n + B^+$ dengan $B^+ = B \oplus B^2 \oplus \dots \oplus B^n$.
7. Menunjukkan bahwa bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dari $G(A)$, yaitu $\lambda_{\max}(A)$ adalah nilai eigen dari matriks A.
8. Menunjukkan bahwa kolom ke-s dari matriks B^* merupakan vektor eigen.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini merupakan pembahasan utama pada penelitian ini. Pada bagian ini disajikan pembahasan mengenai eksistensi nilai eigen pada matriks atas aljabar max-plus. Selanjutnya, disajikan juga pembahasan mengenai vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen yang sudah ditentukan eksistensinya.

Pada bagian awal pembahasan ini, terlebih dahulu disajikan definisi dari graf *precedence* dari matriks atas aljabar max-plus.

Definisi 1 [1]. *Graf precedence $G(A)$ dari matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ adalah graf berarah berbobot dengan titik sebanyak n dan busur (j,i) untuk $[A]_{ij} \neq \mathcal{E}$ dengan $i,j = 1,2,\dots,n$. Bobot busur (j,i) adalah bilangan riil $[A]_{ij}$ dan dinotasikan dengan $w(j,i) = [A]_{ij}$.*

Teorema berikut menjelaskan makna dari entri pada matriks atas aljabar max-plus yang berkaitan dengan graf *precedence* dari matriks tersebut.

Teorema 2 [2]. *Diberikan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$. Untuk setiap $k \ge 1$ berlaku*

$$[A^k]_{ij} = \max\{|\rho|_w | \rho \in P(j,i;k)\},$$

dengan $P(j,i;k)$ adalah himpunan semua lintasan dari titik j ke titik i dengan panjang k pada graf precedence $G(A)$. Apabila $P(j,i;k)$ merupakan himpunan kosong maka $[A^k]_{ij} = \mathcal{E}$.

Bukti. Pembuktian dilakukan dengan langkah induksi. Misalkan (j,i) adalah sebarang elemen di $\underline{n} \times \underline{n} = \{(j,i) | j,i \in \underline{n}\}$ dengan $\underline{n} = 1,2,\dots,n$. Untuk $k = 1$, lintasan pada $P(j,i;k)$ hanya terdiri dari satu busur dengan bobot yang diberikan oleh $[A]_{ij}$. Jika $[A]_{ij} = \mathcal{E}$, maka tidak ada busur (j, i) di $G(A)$ dan $P(j, i; k) = \emptyset$. Berarti

$$\begin{aligned}[A^1]_{ij} &= \max\{|\rho|_w | \rho \in P(j, i; 1)\} \\ &= \max\{|(j, i)|_w\} \\ &= |(j, i)|_w \\ &= [A]_{ij},\end{aligned}$$

kesimpulannya pernyataan benar untuk $k = 1$.

Misalkan pernyataan benar untuk suatu $k \neq 1$. Selanjutnya akan ditunjukkan pernyataan benar untuk $k + 1$. Untuk kasus $k + 1$, berarti diperoleh $\rho \in P(j, i; k + 1)$. Dengan demikian, minimal terdapat satu lintasan di $P(j, i; k + 1)$ supaya $P(j, i; k + 1) = \emptyset$. Lintasan ρ dapat dipecah menjadi suatu sublintasan dengan panjang k dari titik j ke titik l dan suatu sublintasan yang terdiri dari satu busur dari titik l ke titik i, atau dalam bentuk simbol dapat ditulis $\rho = \hat{\rho}, (l, i)$ dengan $\hat{\rho} \in P(j, l; k)$.

Bobot maksimum dari setiap lintasan di $P(j, i; k + 1)$ dapat diperoleh dari

$$\max_{l \in \underline{n}}\{\max\{|\hat{\rho}|_w | \hat{\rho} \in P(j, l; k)\} + [A]_{il}\}.$$

Karena pernyataan benar untuk suatu k, maka

$$\max\{|\hat{\rho}|_w | \hat{\rho} \in P(j, l; k)\} = [A^k]_{lj}.$$

Selanjutnya untuk bobot maksimum suatu lintasan dari titik j ke titik i dengan panjang $k + 1$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}\max_{l \in \underline{n}}\left\{[A^k]_{lj} + [A]_{il}\right\} &= \bigoplus_{l=1}^{n} [A^k]_{lj} \otimes [A]_{il} \\ &= [A^k \otimes A]_{ij} \\ &= \left[A^{(k+1)}\right]_{ij}.\end{aligned}$$

Untuk kasus $P(j, i; k + 1) = \emptyset$, berarti tidak ada lintasan dengan panjang $k + 1$ dari titik j ke titik i. Hal tersebut mengakibatkan untuk setiap titik l, tidak terdapat lintasan dengan panjang k dari titik j ke titik l atau tidak terdapat busur dari titik l ke titik i. Oleh karena itu, $P(j, i; k + 1) = \emptyset$ mengakibatkan paling tidak terdapat satu nilai dari $[A^k]_{lj}$ dan $[A]_{il}$ sama dengan $\mathcal{E}$. Akibatnya

$$\left[A^{(k+1)}\right]_{ij} = \mathcal{E}.$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $[A^k]_{ij}$ menyatakan bobot maksimum dari suatu lintasan dengan panjang k dari titik j ke titik i pada graf *precedence* $G(A)$. ■

Untuk selanjutnya $[A^k]_{ij}$ dinamakan bobot maksimum semua lintasan dari titik j ke titik i dengan panjang k pada graf *precedence* $G(A)$. Berdasarkan Teorema 2, dapat didefinisikan suatu matriks A^+ dan A^* dari suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ sebagai berikut:

Definisi 3 [9]. *Untuk matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, didefinisikan matriks A^+dan A^* seperti berikut*

$$A^+ = A \oplus A^2 \oplus A^3 \oplus \dots$$
$$A^* = E_n \oplus A^+.$$

Teorema berikut menjelaskan hubungan antara matriks A^+ dan A^* pada Definisi 3.

Teorema 4. *Diberikan matriks* $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$, *nilai* A^+ *adalah* $A^+ = A \otimes A^*$.
Bukti. Diperhatikan bahwa $A^+ = A \oplus A^2 \oplus A^3 \oplus \dots$ dan $A^* = E_n \oplus A^+$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned} A^+ &= A \oplus A^2 \oplus A^3 \oplus \dots \\ &= A \otimes (E_n \oplus A \oplus A^2 \oplus A^3 \oplus \dots) \\ &= A \otimes (E_n \oplus A^+) \\ &= A \otimes A^*. \blacksquare \end{aligned}$$

Berikut ini diberikan suatu teorema yang berkaitan dengan hubungan matriks A^+ dengan matriks pangkat A^k, $k = 1, 2, \dots, n$ dengan n adalah ordo dari matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$.

Teorema 5. *Jika* $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ *sedemikian sehingga setiap sirkuit di* $G(A)$ *mempunyai bobot sirkuit rata-rata kurang dari atau sama dengan 0, maka*

$$A^+ = \bigoplus_{k=1}^{n} A^k = A \oplus A^2 \oplus \dots \oplus A^n \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}.$$

Bukti. Diketahui $A^+ = \bigoplus_{k=1}^{\infty} A^k = A \oplus A^2 \oplus A^3 \oplus \dots.$

$$[A^+]_{ij} = \max\{[A^k]_{ij}, 1 \le k < \infty\} \ge \max\{[A^k]_{ij}, 1 \le k \le n\}.$$

Karena A matriks persegi, maka untuk seluruh lintasan di $G(A)$ dari titik j ke titik i yang mempunyai panjang lebih dari atau sama dengan n akan terdapat paling sedikit satu pengulangan titik. Oleh karena itu, terbentuk setidaknya satu sirkuit yang panjangnya tidak lebih dari n. Karena setiap sirkuit di $G(A)$ memiliki bobot rata-rata kurang dari atau sama dengan 0, maka maksimum bobot rata-rata sirkuit adalah 0. Oleh karena itu, bobot lintasan tidak akan bertambah setiap terjadi pengulangan titik, sehingga

$$A \oplus A^2 \oplus \dots \oplus A^n \ge A \oplus A^2 \oplus A^3 \oplus \dots.$$
$$[A^+]_{ij} = \max\{[A^k]_{ij}, 1 \le k < \infty\} \le \max\{[A^k]_{ij}, 1 \le k \le n\}.$$

Selanjutnya diperoleh bahwa

$$[A^+]_{ij} = \max\{[A^k]_{ij}, 1 \le k \le n\}.$$

Jadi, terbukti bahwa $A^+ = \bigoplus_{k=1}^{n} A^k = A \oplus A^2 \oplus \dots \oplus A^n$. $\blacksquare$

Berdasarkan Teorema 5 diketahui bahwa

$$A^+ = A \oplus A^2 \oplus \dots \oplus A^n = A \otimes (E_n \oplus A \oplus A^2 \oplus \dots \oplus A^{n-1}).$$

Sebelumnya, diketahui bahwa $A^+ = A \otimes A^*$ sehingga diperoleh

$$A^* = E_n \oplus A \oplus A^2 \oplus \dots \oplus A^{n-1}.$$

Selanjutnya dibahas terkait bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dengan maksimum diambil atas semua sirkuit elementer pada suatu graf. Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ dengan graf *precedence* $G(A)$. Bobot maksimum semua sirkuit dengan panjang k pada $G(A)$, dapat diperoleh dengan menghitung $[A^k]_{ii}$. Nilai dari $\bigoplus_{i=1}^{n} [A^k]_{ii}$ adalah maksimum dari bobot maksimum semua sirkuit dengan panjang k pada $G(A)$. Diperhatikan bahwa $\bigoplus_{i=1}^{n} [A^k]_{ii}$ adalah $\text{trace}(A^k)$, sehingga $\text{trace}(A^k)$ menyatakan bobot maksimum sirkuit dengan panjang k pada $G(A)$. Dengan demikian, $\frac{1}{k}$ $\text{trace}(A^k)$ menyatakan rata-rata maksimum dari bobot maksimum semua sirkuit dengan panjang k pada $G(A)$. Apabila diambil maksimum dari $\frac{1}{k}$ $\text{trace}\ (A^k)$ pada sirkuit dengan panjang $k \leq n$, yaitu pada semua sirkuit elementer, maka diperoleh $\bigoplus_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k}\ \text{trace}\ (A^k)\right\}$ yang menyatakan bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer pada $G(A)$. Untuk selanjutnya, $\bigoplus_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k}\ \text{trace}\ (A^k)\right\}$ dinotasikan dengan $\lambda_{\max}(A)$ atau

$$\lambda_{\max}(A) = \bigoplus_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k}\ \text{trace}\ (A^k)\right\}.$$

Definisi 6. *Diberikan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ dan himpunan semua sirkuit elementer pada $G(A)$ yang dinotasikan dengan $C(A)$. Suatu sirkuit $\rho \in C(A)$ disebut sirkuit kritis jika bobot rata-ratanya sama dengan bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer pada $G(A)$.*

Definisi 7. *Graf kritis dari $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ terdiri dari titik-titik dan busur-busur sirkuit kritis pada $G(A)$. Graf kritis dari A dinotasikan dengan $G^c(A)$ dan himpunan titik-titik pada $G^c(A)$ dinotasikan dengan $V^c(A)$.*

Pembahasan selanjutnya dilakukan pada eksistensi nilai eigen pada matriks atas aljabar max-plus. Sebelum membahas eksistensi tersebut, terlebih dahulu didefinisikan nilai eigen pada matriks atas aljabar max-plus.

Definisi 8. *Diberikan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$. Jika $\mu \in \mathbb{R}_{\max}$ adalah sebuah skalar, $\bar{v} \in \mathbb{R}_{\max}^{n}$ adalah sebuah vektor dengan $\bar{v} \neq \bar{\mathcal{E}}$, dan memenuhi*

$$A \otimes \bar{v} = \mu \otimes \bar{v},$$

maka μ disebut nilai eigen dari A dan $\bar{v}$ adalah vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan μ.

Teorema berikut menjelaskan eksistensi nilai eigen pada matriks atas aljabar max-plus.

Teorema 9. *Diberikan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$. Suatu skalar $\lambda_{\max}(A)$ yaitu bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer pada $G(A)$, merupakan nilai eigen matriks A.*

Bukti. Diperhatikan bahwa $\lambda_{\max}(A) = \bigoplus_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k}\ \text{trace}\ (A^k)\right\}$. Selanjutnya didefinisikan matriks $B = -\lambda_{\max}(A) \otimes A$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned}\lambda_{\max}(B) &= \bigoplus_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k}\ \text{trace}\ (B^k)\right\}\\ &= \bigoplus_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k}\ \text{trace}\ ((-\lambda_{\max}(A) \otimes A)^k)\right\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigoplus_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{k} \text{ trace } \left(\left(-\lambda_{\max}(A) \right)^k \otimes A^k \right) \right\} \\
&= \bigoplus_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{k} \text{trace} \left(\left(-\lambda_{\max}(A) \right)^k \otimes \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \right) \right\} \\
&= \bigoplus_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{k} \text{trace} \left(\begin{bmatrix} \left(-\lambda_{\max}(A) \right)^k \otimes a_{11} & \dots & \left(-\lambda_{\max}(A) \right)^k \otimes a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(-\lambda_{\max}(A) \right)^k \otimes a_{n1} & \dots & \left(-\lambda_{\max}(A) \right)^k \otimes a_{nn} \end{bmatrix} \right) \right\} \\
&= \bigoplus_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{k} \left(\left(\left(-\lambda_{\max}(A) \right)^k \otimes a_{11} \right) \oplus \dots \oplus \left(\left(-\lambda_{\max}(A) \right)^k \otimes a_{nn} \right) \right) \right\} \\
&= \bigoplus_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{k} \left(\left(-\lambda_{\max}(A) \right)^k \otimes (a_{11} \oplus \dots \oplus a_{nn}) \right) \right\} \\
&= \bigoplus_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{k} \left(-\lambda_{\max}(A) \right)^k \otimes \frac{1}{k} \text{trace}(A)^k \right\} \\
&= \bigoplus_{k=1}^{n} \{ -\lambda_{\max}(A) \otimes \lambda_{\max}(A) \} \\
&= \bigoplus_{k=1}^{n} \{ -\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\max}(A) \} \\
&= \bigoplus_{k=1}^{n} 0 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Hal ini menunjukkan bahwa graf *precedence* $G(B)$ tidak memiliki sirkuit dengan bobot positif. Menurut Teorema 5 diperoleh bahwa $B^+ = B \oplus B^2 \oplus \dots \oplus B^n$ dan $B^* = E_n \oplus B \oplus B^2 \oplus \dots \oplus B^{n-1}$. Karena $\lambda_{\max}(B) = 0$, maka terdapat $k \in \mathbb{N}$ dengan $k \le n$ dan suatu $s \in \{1, 2, \dots, n\}$ sehingga $(B^k)_{ss} = 0$. Selanjutnya, karena $(B^k)_{ss} = 0$ maka sirkuit elementer dengan panjang k pada $G(B)$ dengan titik awal s dan titik akhir s merupakan sirkuit kritis. Jelas bahwa $(E_n)_{ss} = 0$. Dari Definisi 2 diketahui bahwa

$$
\begin{aligned}
B^+ &= B \otimes B^* \\
B^* &= E_n \oplus B^+,
\end{aligned}
$$

dengan $(B^*)_{is} = (E_n \oplus B^+)_{is} = \begin{cases} \mathcal{E} \oplus (B^+)_{is} = (B^+)_{is}, i \neq s, \\ 0 \oplus (B^+)_{is}, i = s. \end{cases}$

Misalkan $(B^+)_{.s}$ dan $(B^*)_{.s}$ masing-masing menyatakan entri kolom ke-s matriks B^+ dan entri kolom ke-s matriks B^*, maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
(B^+)_{.s} &= (B^*)_{.s} \\
B \otimes (B^*)_{.s} &= (B^*)_{.s} \\
-\lambda_{\max}(A) \otimes A \otimes (B^*)_{.s} &= (B^*)_{.s} \\
A \otimes (B^*)_{.s} &= \lambda_{\max}(A) \otimes (B^*)_{.s}. \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

Diperoleh bahwa $\lambda_{\max}(A)$ yaitu bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer pada $G(A)$, merupakan nilai eigen pada matriks A atas aljabar max-plus. Selanjutnya $(B^*)_{.s}$ merupakan vektor eigen pada matriks A atas aljabar max-plus yang bersesuaian dengan $\lambda_{\max}(A)$. ■

Berdasarkan Teorema 9 ini, eksistensi nilai eigen pada matriks atas aljabar max-plus terjamin ada karena nilai $\lambda_{\max}(A)$ selalu ada. Selanjutnya, berdasarkan Teorema 9 dapat diperoleh langkah-langkah untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen pada matriks atas aljabar max-plus. Misal diberikan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$. Langkah-langkah untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen adalah sebagai berikut:

i. Menghitung A^k dengan $1 \leq k \leq n$.
ii. Menghitung nilai eigen dengan rumus $\lambda_{\max}(A) = \bigoplus_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{k} \text{ trace } (A^k) \right\}$.
iii. Memilih sirkuit (s, s) untuk suatu $1 \leq s \leq n$ yang merupakan sirkuit kritis dari $G(A)$.
iv. Menghitung matriks $B = -\lambda_{\max}(A) \otimes A$ dan $B^* = E_n \oplus B^+$.
v. Memilih vektor eigen dari A yang merupakan kolom ke-s dari matriks B^*.

Berikut diberikan contoh nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$.

Contoh 10.

Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{4 \times 4}$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & \varepsilon & 3 \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ 2 & 3 & 1 & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & 4 & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Diperoleh bahwa

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 5 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 10 & 8 \\ 8 & 8 & 9 & 9 \\ 10 & 8 & 9 & 9 \end{bmatrix}, \text{ dan } A^4 = \begin{bmatrix} 13 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 13 & 12 & 11 \\ 11 & 12 & 13 & 11 \\ 12 & 12 & 13 & 13 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(A) &= \bigoplus_{k=1}^{4} \left\{ \frac{1}{k} \text{ trace}(A^k) \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{1}{1}(2), \frac{1}{2}(5), \frac{1}{3}(9), \frac{1}{4}(13) \right\} \\ &= \max \left\{ 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{13}{4} \right\} \\ &= \frac{13}{4}. \end{aligned}$$

Jadi, nilai eigen dari matriks A adalah $\frac{13}{4}$. Vektor eigen dari matriks A dapat dicari dengan memanfaatkan matriks B, yaitu

$$B = -\lambda_{\max}(A) \otimes A = -\frac{13}{4} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 2 & \varepsilon & 3 \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ 2 & 3 & 1 & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & 4 & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} & \varepsilon & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \varepsilon & \varepsilon & -\frac{9}{4} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{9}{4} & \varepsilon \\ -\frac{5}{4} & \varepsilon & \frac{3}{4} & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya diperoleh bahwa

$$B^2 = \begin{bmatrix} -\frac{6}{4} & -\frac{10}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{6}{4} \\ -\frac{6}{4} & -\frac{6}{4} & -\frac{6}{4} & -\frac{2}{4} \\ -\frac{2}{4} & -\frac{10}{4} & -\frac{18}{4} & -\frac{6}{4} \\ -\frac{2}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{6}{4} & -\frac{6}{4} \end{bmatrix}, \quad B^3 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{7}{4} \\ -\frac{7}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} \\ -\frac{7}{4} & -\frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix},$$

$$B^* = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{2}{4} \\ -\frac{2}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}.$$

Karena sirkuit kritisnya adalah sirkuit $(1,1), (2,2), (3,3)$, dan $(4,4)$. Dengan demikian, vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\max}(A) = \frac{13}{4}$ adalah

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{2}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{2}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \text{ dan } \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{2}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. KESIMPULAN

Pendefinisian nilai eigen pada aljabar max-plus dapat dilakukan secara analog dengan pendefinisian nilai eigen pada aljabar linier. Penentuan nilai eigen pada matriks atas aljabar max-plus tidak dapat dilakukan dengan persamaan karakteristik seperti halnya pada aljabar linier. Penentuan eksistensi nilai eigen pada matriks atas aljabar max-plus dilakukan dengan memanfaatkan konsep bobot rata-rata maksimum dari suatu sirkuit dari graf *precedence* matriks atas aljabar max-plus. Apabila diberikan matriks atas aljabar max-plus A maka $\lambda_{\max}(A) = \bigoplus_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{k} \text{ trace } (A^k) \right\}$ selalu merupakan nilai eigen dari matriks A. Untuk selanjutnya, vektor eigen yang bersesuian dengan $\lambda_{\max}(A)$ dapat ditentukan dengan memanfaatkan konsep sirkuit kritis pada graf *precedence* $G(A)$. Selanjutnya penulis memberikan saran untuk penelitian selanjutnya dibahas terkait sifat-sifat nilai eigen dan vektor eigen pada matriks atas aljabar max-plus.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J., & Quadrat, J.-P. (2001). *Synchronization and Linearity : An Algebra for Discrete Event Systems*. Wiley.
[2] Subiono. (2015). *Aljabar Min-Max Plus dan Terapannya* (Version 3.0.0). ITS.
[3] 'Imrona, M. (2013). *Aljabar Linear Dasar* (Edisi Kedua). Penerbit Erlangga.
[4] Hafiyusholeh, M., Asyhar, A. H., & Komaria, R. (2015). Aplikasi Metode Nilai Eigen dalam Analytical Hierarchy Process Untuk Memilih Tempat Kerja . *Jurnal Matematika MANTIK*, *1*(1), 6–16.
[5] Pranata, E., & Gunawan, T. P. (2018). Penggunaan Nilai dan Vektor Eigen untuk Menentukan Prioritas Faktor-Faktor Penentu Pemilihan Tempat Makan (Restoran). *TEKNIKA*, *7*(2), 148–151.
[6] Nasrulyati, T. S. (2017). Aljabar Max-Plus dan Aplikasinya: Model Sistem Produksi Sederhana. *Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika*, *17*(1), 1–6.
[7] Wibowo, A., Wijayanti, K., & Budhiati Veronica, R. (2018). Penerapan Aljabar Max-Plus pada Pengaturan Sistem Antrian Traffic Light. *UNNES Journal of Mathematics*, *7*(2), 192–205.
[8] Musthofa, & Binatari, N. (2013). Sifat-Sifat Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks atas Aljabar Max-Plus. *Jurnal Sains Dasar*, *2*(1), 25–31.
[9] Farlow, K. G. (2009). *Max-Plus Algebra*. Virginia Polytechnic Institute and State University.