

E-ISSN 2962 - 6013



VOLUME 1 NOMOR 1  
30 September 2022

PS S1 MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA & ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS MULAWARMAN

<http://jurnal.fmipa.unmul.ac.id/index.php/Basis>



**Penerbit:**

Program Studi S1 Matematika  
Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Mulawarman  
Samarinda  
Indonesia

**September, 2022**

**Copyright © 2022 by the Authors**

**Website:** <http://jurnal.fmipa.unmul.ac.id/index.php/Basis>

**Email:** [basis-jim@fmipa.unmul.ac.id](mailto:basis-jim@fmipa.unmul.ac.id)



## **SUSUNAN DEWAN REDAKSI**

### **Penanggung Jawab**

Dr. Eng. Idris Mandang, M.Si

### **Ketua Penyunting**

Dr. Syaripuddin, S.Si, M.Si

### **Sekretaris Penyunting**

Fidia Deny Tisna Amijaya, S.Si, M.Si

### **Anggota Penyunting**

Sri Wigantono, S.Si, M.Sc

Yuki Novia Nasution, S.Si, M.Sc

Wasono, S.Si, M.Si

### **Ketua Redaksi**

Qonita Qurrota A'yun, S.Si, M.Sc

### **Sekretaris Redaksi**

Hardina Sandariria, S.Si, M.Sc

### **Anggota Redaksi**

Brilly Maxel Salindeho, S.Si, M.Si

Moh. Nurul Huda, S.Si, M.Si

Indriasri Raming, S.Si, M.Si

Desi Febriani Putri, S.Si, M.Si

### **Administrasi dan Publikasi**

Ryan Rahmad Ramadhan, S.Si

## DAFTAR ISI

<b>Judul Artikel</b>	<b>Penulis</b>	<b>Halaman</b>
<i>Pelabelan Selimut H-Ajaib Super pada Koronasi Graf Gear dengan Graf Lintasan</i>	Hardina Sandariria, Qonita Qurrota A'yun, Desi Febriani Putri	1-7
<i>Analisis Pengaruh Kanibalisme pada Model Predator-Prey dengan Struktur Usia</i>	Nur Azirah, Yuki Novia Nasution, Moh Nurul Huda	8-15
<i>Analisis Kestabilan Model Epidemik SEI pada Penyebaran Penyakit Tuberkulosis</i>	Nur Amalia Khaerunnisa, Yuki Novia Nasution, Moh. Nurul Huda	16-29
<i>Simulasi Antrean Pelayanan Nasabah pada Bank Rakyat Indonesia (BRI) Unit Timbau Tenggara menggunakan Aplikasi Promodel</i>	Vika Novitasari, Syaripuddin, Fidia Deny Tisna Amijaya	30-40
<i>Klasifikasi Penyakit Diabetes Melitus menggunakan Algoritma Naïve Bayes Classifier</i>	Latifah Uswatun Khasanah, Yuki Novia Nasution, Fidia Deny Tisna Amijaya	41-50
<i>Analisis Model Matematika Predator-Prey Perikanan pada Ekosistem Perairan Tercemar</i>	Stefanny Pratiwi, Yuki Novia Nasution, Moh Nurul Huda	51-60
<i>Penentuan Lokasi Strategis untuk Membangun Rumah Sakit di Wilayah Kabupaten Berau Menggunakan Pusat dan Pusat Berat</i>	Sitti Hafsa, Hasmawati, Nur Erawaty	61-69
<i>Penerapan Teori Permainan Berbasis Logika Fuzzy dalam Menentukan Strategi Pemasaran Optimal pada Penyedia Layanan Internet</i>	Kamalin Mastura, Syaripuddin, Qonita Qurrota A'yun	70-84
<i>Aplikasi Game Theory pada Analisis Strategi Pemasaran Jasa Transportasi Online di FMIPA Universitas Mulawarman</i>	Dewi Satriani, Wasono, Darnah A. Nohe	85-94
<i>Pemetaan Bijektif yang Mengawetkan Solvabilitas di Aljabar Lie</i>	Qonita Qurrota A'yun, Hardina Sandariria, Sri Wigantono	95-105

<i>Analisis Model Penelusuran Banjir Gelombang Difusi dengan Metode Duffort-Frankel di Wilayah Sungai Karang Mumus</i>	Indriasri Raming, Alif Jabar, Rosi, Riska Nur Sofiatunisa, Rico Dwi Cahyono, Raka Putra Pridiptama	106-114
<i>Solusi Numeris Persamaan Saint Venant pada Lateral Flow Aliran Terbuka di Kanal Sempaja</i>	Indriasri Raming, Itsar Mangiri, Anis Mujjiyarti, Rara Suciati, Maulidhina Syafitri, Riski Alfira Wulandari S, Mushalifah	115-127
<i>Penerapan Metode Beda Hingga pada Model Matematika Aliran Banjir dari Persamaan Saint Venant</i>	Indriasri Raming, Awang Romy Rehanda Putra, Wulandari, Yogie Pratama Kaindi, Saderisa, Shanaz Tulzahrah	128-138

## Pelabelan Selimut $H$ -Ajaib Super pada Koronasi Graf $Gear$ dengan Graf Lintasan

Hardina Sandariria<sup>1\*</sup>, Qonita Qurrota A'yun<sup>1</sup>, Desi Febriani Putri<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Program Studi S1 Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Mulawarman

Dikirim: September 2022; Diterima: September 2022; Dipublikasi: September 2022

Alamat Email Korespondensi: [hardinasandariria@fmipa.unmul.ac.id](mailto:hardinasandariria@fmipa.unmul.ac.id)

### Abstrak.

Graf sederhana  $G = (V, E)$  memuat selimut  $H$  jika setiap sisi pada  $E$  memuat subgraf di  $G$  yang isomorfik dengan  $H$ . Andaikan suatu graf  $G = (V(G), E(G))$  memiliki selimut- $H$ , maka suatu fungsi bijektif  $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$ , adalah pelabelan  $H$ -ajaib dari  $G$  jika terdapat bilangan bulat positif  $m(f)$  yang disebut jumlah ajaib. Untuk suatu subgraf  $H' = (V'(H'), E'(H'))$  dari  $G$  isomorfik ke  $H$  diperoleh

$$f(H') = \sum_{v \in V'} f(v) + \sum_{e \in E'} f(e) = m(f),$$

sehingga graf  $G$  disebut  $H$ -ajaib. Graf  $G$  adalah  $H$ -ajaib super dan jumlah ajaib super dinotasikan dengan  $s(f)$  untuk  $f(V(G)) = \{1, \dots, |V(G)|\}$ .

Penelitian ini untuk mencari selimut  $H$ -ajaib super pada koronasi  $gear$  dengan graf lintasan. Akan dibuktikan bahwa graf  $gear$  korona lintasan  $G_n \odot P_m$  adalah  $C_4 \odot P_m$ -ajaib super untuk  $n$  ganjil dan  $m \geq 3$ .

### Kata Kunci:

*selimut  $H$ -ajaib super, koronasi, graf lintasan, graf gear, graf siklus*

## PENDAHULUAN

Pelabelan adalah suatu pemberian nilai (dengan bilangan bulat) pada titik atau sisi dari graf atau keduanya sehingga memenuhi kondisi tertentu (Gallian [3]). Label yang digunakan berupa bilangan bulat positif atau bilangan asli. Perkembangan topik tentang pelabelan dapat diikuti dalam jurnal *Dynamics Survey of Graph Labeling* yang ditulis oleh Gallian [3].

Pelabelan yang banyak diteliti adalah pelabelan ajaib. Pada tahun 1964 untuk pertama kalinya pelabelan ajaib diperkenalkan oleh Sedláček (Gallian [3]). Pelabelan ajaib adalah pemetaan satu-satu dari elemen-elemen graf yaitu himpunan titik dan himpunan sisi ke himpunan bilangan bulat positif, sehingga terdapat suatu jumlahan ajaib. Pelabelan ajaib pada graf merupakan kajian pada keilmuan teori graf yang banyak diaplikasikan antara lain pada radar, astronomi, sistem alat jaringan komunikasi, desain sirkuit, dan teori koding.

Pada tahun 2005 Gutiérrez dan Lladó [4] memperkenalkan pelabelan  $H$ -ajaib dari suatu graf sebagai perluasan *magic valuation*. Diberikan  $H$  dan  $G = (V(G), E(G))$

adalah graf sederhana sedemikian sehingga setiap sisi dari graf  $G$  termuat dalam paling tidak satu subgraf yang isomorfik dengan  $H$ . Suatu fungsi bijektif  $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$  adalah pelabelan  $H$ -ajaib dari graf  $G$  jika terdapat suatu bilangan positif integer  $m(f)$ , disebut jumlahan ajaib. Suatu graf  $G$  adalah  $H$ -super ajaib jika  $f(V(G)) = \{1, \dots, |V(G)|\}$  dan  $s(f)$  adalah jumlahan super ajaib.

Penelitian pelabelan selimut  $H$ -ajaib dilakukan mula-mula oleh Guti errez dan Llad o [4] yang membuktikan graf bipartit lengkap dapat diselimuti dengan selimut bintang ajaib  $K_{1,n}$ . Selanjutnya Maryati dkk. [5] meneliti tentang selimut lintasan ajaib pada beberapa kelas graf *tree* di antaranya *shrubs* dan *banana tree*. Ngurah dkk. [7] meneliti selimut siklus ajaib super pada graf rantai, kipas, *triangle ladder*, *grid*, buku, dan graf yang terbentuk dari menghubungkan graf bintang  $k_{1,n}$  dengan satu *isolated vertex*.

Dalam hal ini, peneliti melakukan penelitian untuk menentukan pelabelan selimut  $H$ -ajaib super pada koronasi graf *gear* dengan graf lintasan  $G_n \odot P_m$  untuk  $n$  ganjil dan  $m \geq 3$ . Selimut  $H$  adalah koronasi graf *cycle* dengan graf lintasan  $C_4 \odot P_m$ .

## LANDASAN TEORI

Suatu graf sederhana  $G$  merupakan pasangan himpunan tak kosong berhingga  $V(G)$  yang elemen-elemennya disebut titik dan himpunan  $E(G)$  yang elemen-elemennya merupakan padananan tidak berurutan  $uv$  dengan  $u \neq v \in V(G)$  yang disebut sisi. Chartrand dan Oellermann [1] mendefinisikan bahwa dua graf  $G_1$  dan  $G_2$  adalah isomorfik jika terdapat fungsi satu-satu  $\phi$  dari  $V(G_1)$  ke  $V(G_2)$  sedemikian sehingga dua titik  $u$  dan  $v$  *adjacent* pada  $G_1$  jika dan hanya jika titik  $\phi(u)$  dan  $\phi(v)$  *adjacent* pada  $G_2$ . Jika  $G_1$  dan  $G_2$  isomorfik maka dapat dinotasikan  $G_1 \cong G_2$ . Jika dua graf dikatakan isomorfik maka kedua graf tersebut harus memiliki *order* dan *size* yang sama, serta *degree* setiap titiknya harus sama.

Pada tahun 1970, Frucht dan Harary [2] untuk pertama kalinya memperkenalkan operasi hasil kali korona dari dua graf. Korona dari suatu graf  $G$  dengan graf  $H$ , dinotasikan  $G \odot H$  adalah graf yang terbentuk dari graf  $G$  dan  $|V(G)|$  kopi graf  $H$  yaitu  $H_1, H_2, \dots, H_{|V(G)|}$ , kemudian menghubungkan setiap titik  $v_i \in V(G)$  dengan sebuah sisi ke setiap titik dari  $V(H_i)$  untuk  $i \in [1, k]$ .

Suatu pelabelan atau pemberian nilai pada graf adalah pemetaan satu-satu  $f$  yang membawa  $V(G)$  pada bilangan non negatif  $\{1, 2, \dots, |V(G)|\}$  yang disebut label. Guti errez dan Llad o pada tahun 2005 mengembangkan pelabelan total ajaib menjadi pelabelan selimut ajaib. Jika diketahui graf  $G = (V(G), E(G))$ , maka selimut sisi dari  $G$  adalah subgraf-subgraf berbeda  $H_1, H_2, \dots, H_j$  dengan  $j$  adalah bilangan bulat positif sedemikian sehingga setiap sisi dari  $G$  berada dalam paling tidak satu subgraf  $H_i$  dengan  $1 \leq i \leq j$ . Jika setiap  $H_i$  isomorfik dengan graf  $H$  yang diberikan, maka dapat dikatakan  $G$  memuat suatu selimut- $H$ .

Andaikan suatu graf  $G = (V(G), E(G))$  memiliki selimut- $H$ , maka suatu fungsi bijektif  $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$ , adalah pelabelan  $H$ -ajaib dari  $G$  jika terdapat bilangan bulat positif  $m(f)$  yang disebut jumlah ajaib. Untuk suatu subgraf  $H' = (V'(H'), E'(H'))$  dari  $G$  isomorfik ke  $H$  diperoleh

$$f(H') = \sum_{v \in V'} f(v) + \sum_{e \in E'} f(e) = m(f),$$

sehingga graf  $G$  disebut  $H$ -ajaib. Graf  $G$  adalah  $H$ -ajaib super dan jumlah ajaib super dinotasikan dengan  $s(f)$  untuk  $f(V(G)) = \{1, \dots, |V(G)|\}$ . Pelabelan selimut-ajaib ini kemudian dikembangkan menjadi selimut bintang-ajaib, selimut lintasan-ajaib, dan selimut *cycle*-ajaib ([4], [7]).

### HASIL DAN PEMBAHASAN

Teknik  $k$ -seimbang multihimpunan diperkenalkan oleh Maryati dkk. [6]. Misalkan  $k \in N$  dan  $Y$  adalah multihimpunan bilangan bulat positif. Multihimpunan  $Y$  disebut  $k$ -seimbang jika terdapat  $k$  subhimpunan dari  $Y$  yaitu  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$  sedemikian sehingga untuk setiap  $i \in [1, k]$  berlaku  $\sum Y_i = \frac{\sum Y}{k} \in N$  dan  $\biguplus_{i=1}^k Y_i = Y$ . Untuk membuktikan pelabelan selimut  $H$ -ajaib super, peneliti menggunakan Lemma 2 dan Lemma 3 Maryati dkk. [5, 6].

**Lemma 1** [8] *Misalkan  $k \in N$  dan  $x$  adalah bilangan bulat non negatif. Misal  $X = [x + 1, x + k]$  dengan  $|X| = k$  dan  $Y = [x + k + 1, x + 2k]$  dengan  $|Y| = k$ . Maka, multihimpunan  $K = X \uplus Y$  adalah  $k$ -seimbang untuk  $j \in [1, k]$ .*

Bukti. Untuk setiap  $j \in [1, k]$  didefinisikan  $K_j = \{a_j, b_j\}$  dengan

$$\begin{aligned} a_j &= x + j, \\ b_j &= x + 2k + 1 - j. \end{aligned}$$

Kemudian didefinisikan

$$\begin{aligned} A &= \{a_j \mid 1 \leq j \leq k\} = [x + 1, x + k], \\ B &= \{b_j \mid 1 \leq j \leq k\} = [x + k + 1, x + 2k]. \end{aligned}$$

Karena  $A \uplus B = K$ , maka  $\biguplus_{j=1}^k K_j = K$ . Untuk setiap  $j \in [1, k]$  diperoleh  $\sum K_j = 2(x + k) + 1$  untuk  $1 \leq j \leq k$ . Jadi,  $K$  adalah  $k$ -seimbang.

**Lemma 2** [6] *Misalkan  $x, y$ , dan  $z$  bilangan bulat non negatif dan multihimpunan  $Y = [x + 1, x + k] \uplus [y + 1, y + k] \uplus [z + 1, z + k]$ . Untuk bilangan ganjil  $k \geq 3$ ,  $Y$  adalah  $k$ -seimbang.*

Bukti. Misalkan  $k \geq 3$  adalah bilangan ganjil. Untuk setiap  $i \in [1, k]$ , didefinisikan multihimpunan  $Y_i = \{a_i, b_i, c_i\}$  dengan

$$\begin{aligned} a_i &= x + i; \\ b_i &= \begin{cases} y + \lceil \frac{k}{2} \rceil + i, & \text{untuk } i \in [1, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor]; \\ y - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + i, & \text{untuk } i \in [\lceil \frac{k}{2} \rceil, k]; \end{cases} \\ c_i &= \begin{cases} z + k + 1 - 2i, & \text{untuk } i \in [1, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor]; \\ z + k + 2\lceil \frac{k}{2} \rceil - 2i, & \text{untuk } i \in [\lceil \frac{k}{2} \rceil, k]; \end{cases} \end{aligned}$$

Kemudian didefinisikan himpunan

$$\begin{aligned} A &= \{a_i \mid 1 \leq i \leq k\} = [x + 1, x + k] \\ B &= \{b_i \mid 1 \leq i \leq k\} = [y + 1, y + k] \\ C &= \{c_i \mid 1 \leq i \leq k\} = [z + 1, z + k] \end{aligned}$$



Didapatkan bahwa  $A \uplus B \uplus C = Y$  dan  $\biguplus_{i=1}^k Y_i = Y$ . Untuk setiap  $i \in [1, k]$  diperoleh  $|Y_i| = 3$  dan  $\sum Y_i = x + y + z + k + \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1$ . Jadi, untuk  $k \geq 3$  ganjil,  $Y$  adalah  $k$ -seimbang.

**Lemma 3** [5] *Misalkan  $k \in N$  dan  $x, y$  bilangan bulat non negatif, dengan  $1 \leq x \leq y$ . Jika  $X = [x, y]$  dan  $|X|$  adalah kelipatan  $2k$ , maka  $X$  adalah  $k$ -seimbang.*

Bukti. Untuk  $i \in [1, k]$ , didefinisikan  $X_i = \{a_j^i | 1 \leq j \leq \frac{|X|}{k}\}$  dimana

$$a_j^i = \begin{cases} x - 1 + k(j - 1) + i, & \text{untuk } j \text{ ganjil;} \\ x + kj - i, & \text{untuk } j \text{ genap.} \end{cases}$$

Kemudian,  $|X_i| = \frac{|X|}{k}$ ,  $\biguplus_{i=1}^k X_i = X$ , dan  $\sum X_i = \frac{|X|}{2k}(x + y)$  untuk setiap  $i \in [1, k]$ .  $X$  adalah  $k$ -seimbang.

Selanjutnya, Lemma 4 dibangun untuk mendukung teorema yang diperoleh.

**Lemma 4** *Misalkan  $k \in N$  dan  $x, y$  adalah bilangan bulat non negatif. Misal  $X = [x + 1, x + k]$  dengan  $|X| = k$  dan  $Y = [y + k + 1, y + 2k]$  dengan  $|Y| = k$ . Maka multihimpunan  $M = X \uplus Y$  adalah  $k$ -seimbang jika terdapat  $k$  subhimpunan  $M_j$  dari  $M$  dengan  $j \in [1, k]$ .*

Bukti. Untuk setiap  $j \in [1, k]$  didefinisikan  $M_j = \{a_j, b_j\}$  dengan

$$\begin{aligned} a_j &= x + j, \\ b_j &= y + 2k + 1 - j. \end{aligned}$$

Kemudian didefinisikan

$$\begin{aligned} A &= \{a_j | 1 \leq j \leq k\} = [x + 1, x + k], \\ B &= \{b_j | 1 \leq j \leq k\} = [y + k + 1, y + 2k]. \end{aligned}$$

Karena  $A \uplus B = M$ , maka  $\biguplus_{j=1}^k M_j = M$ . Untuk setiap  $j \in [1, k]$  diperoleh  $\sum M_j = x + y + 2k + 1$  untuk  $1 \leq j \leq k$ . Jadi,  $M$  adalah  $k$ -seimbang.

**Teorema 5** *Graf  $G_n \odot P_m$  adalah  $C_4 \odot P_m$ -ajaib super untuk  $n$  ganjil dan  $m \geq 3$ .*

Bukti. Misal graf  $G$  adalah graf  $G_n \odot P_m$  didefinisikan

$$V(G) = \{v_i; 0 \leq i \leq n\} \uplus \{u_i; 0 \leq i \leq n\} \uplus \{a_j; 0 \leq j \leq (2n + 1)(m + 1)\}$$

dan

$$E(G) = \{v_0v_1, v_0v_2, \dots, v_0v_n, v_1u_1, v_2u_2, \dots, v_nu_n, u_1v_2, u_2v_3, \dots, u_{n-1}v_n, u_nv_1\} \uplus \{b_j; 0 \leq j \leq m(2n + 1)\} \uplus \{a_j^i; 0 \leq i \leq 2n + 1, 1 \leq j \leq m - 1\}$$

dengan  $|V(G)| = (2n + 1)(m + 1)$  dan  $|E(G)| = 4mn + 2m + n - 1$ . Didefinisikan fungsi bijektif  $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, 3(2mn + m + n)\}$ . Misalkan himpunan label untuk seluruh titik dan sisi dari graf  $G$  dinotasikan dengan  $Z$  dimana  $Z = [1, 3(2mn + m + n)]$ . Himpunan  $Z$  dipartisi menjadi 9 himpunan yaitu  $A = \{1\}$ ,  $B = [2, n + 1]$ ,  $C = [n + 2, 2n + 1]$ ,  $D = [2n + 2, (m + 1)(2n + 1)]$ ,  $E = [(m + 1)(2n + 1) + 1, (2m + 1)(2n + 1)]$ ,  $F = [(2m + 1)(2n + 1) + 1, m(4n + 2) + 3n + 1]$ ,  $G = [m(4n + 2) + 3n + 2, m(4n + 2) + 4n + 1]$ ,  $H = [m(4n + 2) + 4n + 2, m(4n + 2) + 5n + 1]$ , dan  $I = [m(4n + 2) + 5n + 2, 3(2mn + m + n)]$ .

Seluruh titik dan sisi graf  $G$  dilabeli dengan beberapa ketentuan. Himpunan  $A$  digunakan untuk melabeli titik pusat  $v_0$ . Himpunan  $B$  digunakan untuk melabeli titik  $v_i$  yang *adjacent* dengan  $v_0$  dan himpunan  $F$  digunakan untuk melabeli sisi  $v_0v_i$ . Menggunakan Lemma 4 dengan  $x = 1$ ,  $y = 2m(2n + 1) + n + 1$ , dan  $k = n$  diperoleh  $n$ -seimbang. Didefinisikan  $K = B \uplus F$ , diperoleh  $\sum K_i = 4mn + 2m + 3n + 3$ . Himpunan  $C$  digunakan untuk melabeli titik  $u_i$ , himpunan  $G$  digunakan untuk melabeli sisi  $v_iv_i$ , dan himpunan  $H$  digunakan untuk melabeli sisi  $\{u_1v_2, u_2v_3, \dots, u_{n-1}v_n, u_nv_1\}$ . Menggunakan Lemma 2 dengan  $x = n + 1$ ,  $y = (2m + 1)(2n + 1) + n$ ,  $z = (2m + 1)(2n + 1) + 2n$ , dan  $k = n$  diperoleh  $n$ -seimbang. Didefinisikan  $L = C \uplus G \uplus H$ , diperoleh  $\sum L_i = m(8n + 4) + 9n + 4 + \lceil \frac{n}{2} \rceil$ . Himpunan  $D$  digunakan untuk melabeli titik  $a_j$  dan himpunan  $E$  digunakan untuk melabeli sisi  $b_j$ . Menggunakan Lemma 1 dengan  $x = 2n + 1$  dan  $k = m(2n + 1)$ . Didefinisikan  $M = D \uplus E$ , diperoleh  $\sum M_i = m(4n + 2) + 4n + 3$ .

Himpunan  $I$  digunakan untuk melabeli sisi  $a_j^i$ . Didefinisikan  $a_j^i$  adalah himpunan sisi pada lintasan. Pembuktian dibagi menjadi 2 kasus berdasarkan nilai  $m$

**Kasus 1.**  $m$  ganjil ( $m \geq 3$ ).

Berdasarkan Lemma 3 dengan  $x = m(4n + 2) + 5n + 2$ ,  $y = 3(2mn + m + n)$ , dan  $|I| = (2n + 1)(m - 1)$  diperoleh  $(2n + 1)$ -seimbang dengan  $\sum I_i = \frac{(m-1)}{2}(5m(2n + 1) + 8n + 2)$ .

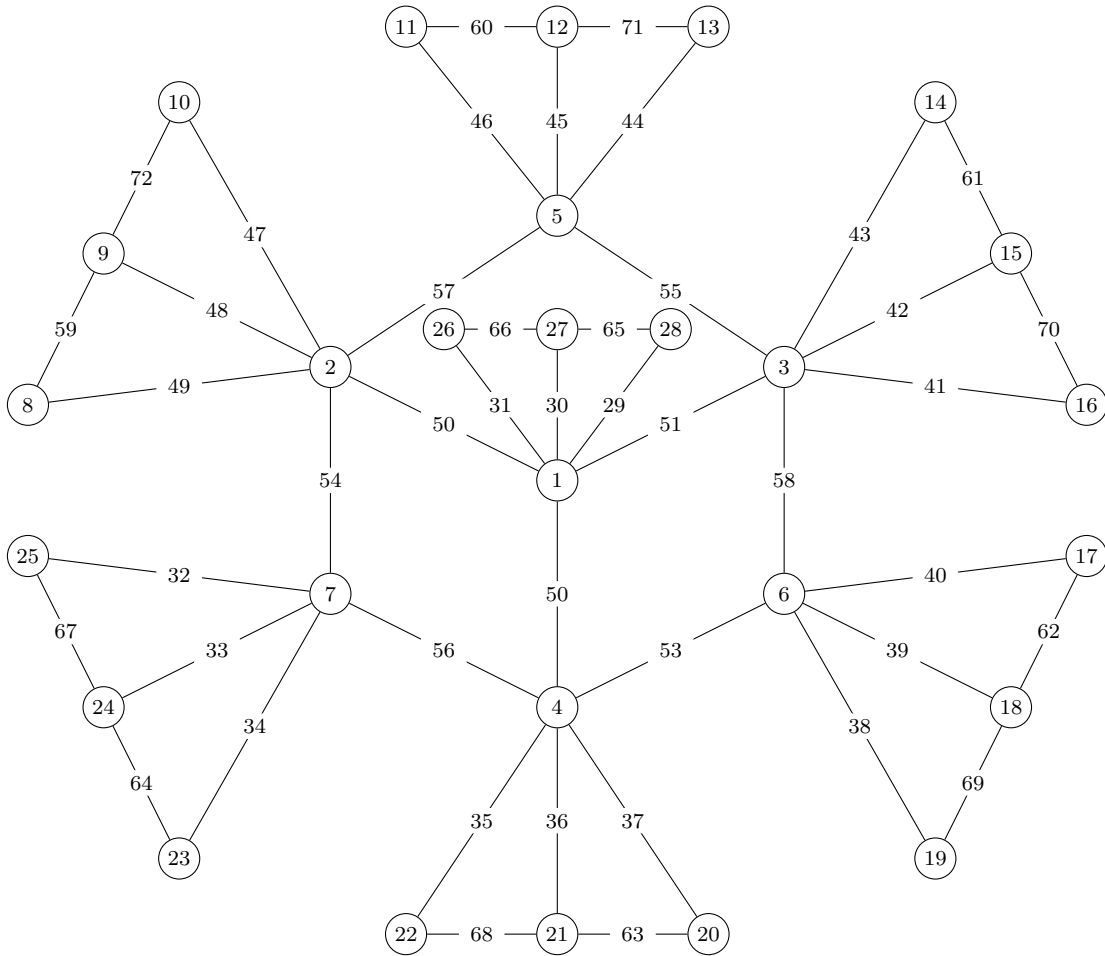
**Kasus 2.**  $m$  genap.

Partisi himpunan  $I$  menjadi dua subhimpunan yaitu  $I_1 = [m(4n + 2) + 5n + 2, m(4n + 2) + 11n + 4]$  dan  $I_2 = [m(4n + 2) + 11n + 4, 3(2mn + m + n)]$ . Untuk  $m = 4$  didefinisikan  $I = I_1$ . Sedangkan untuk  $m \geq 6$  didefinisikan  $I = I_1 \uplus I_2$ . Berdasarkan Lemma 2 dengan  $x = m(4n + 2) + 5n + 1$ ,  $y = m(4n + 2) + 7n + 2$ , dan  $z = m(4n + 2) + 9n + 3$  diperoleh himpunan  $I_{1i}$  adalah  $(2n + 1)$ -seimbang dengan  $\sum I_{1i} = 6m(2n + 1) + 23n + \lceil \frac{2n+1}{2} \rceil + 8$ .

Kemudian menggunakan Lemma 3, untuk  $x = m(4n + 2) + 11n + 4$  dan  $y = 3(2mn + m + n)$  dengan  $|I_2| = (2n + 1)(m - 4)$  diperoleh  $(2n + 1)$ -seimbang dengan  $\sum I_{2i} = \frac{m-4}{2}(5m(2n + 1) + 14n + 4)$ . Karena didefinisikan untuk  $m \geq 6$  adalah  $I = I_1 \uplus I_2$ , maka  $\sum I_i = m^2(5n + \frac{5}{2}) - m(n + 2) - 5n + \lceil \frac{2n+1}{2} \rceil$ .

Untuk selanjutnya, jumlahan semua titik dan sisi pada setiap subgraf  $C_4 \odot P_m$  adalah konstan dengan

$$f(C_4 \odot P_m) = \begin{cases} 18m^2(2n + 1) + 14m(2n + 1) - n + \lceil \frac{n}{2} \rceil + 7, & \text{untuk } m \text{ ganjil;} \\ (8m^2 + 40m)(2n + 1) + 4m + 107n + \lceil \frac{n}{2} \rceil + \lceil \frac{2n+1}{2} \rceil + 43, & \text{untuk } m = 4 ; \\ (18m^2 + 12m)(2n + 1) + n(4m - 5) + \lceil \frac{n}{2} \rceil + 4\lceil \frac{2n+1}{2} \rceil + 11, & \text{untuk } m \text{ genap, } m \geq 6. \end{cases}$$



Gambar 1: Pelabelan Selimut  $C_4 \odot P_3$ -ajaib Super pada Graf  $G_3 \odot P_3$

## PENUTUP

Berdasarkan uraian pembahasan, didapatkan kesimpulan bahwa Graf  $G_n \odot P_m$  adalah  $C_4 \odot P_m$ -ajaib super untuk  $n$  ganjil dan  $m \geq 3$ . Saran yang dapat diberikan penulis adalah belum dibuktikan bahwa graf  $G_n \odot P_m$  untuk  $n$  genap adalah  $H$ -ajaib super dengan  $H$  adalah graf  $C_4 \odot P_m$ .

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Chartrand, G. dan Oellermann, O. R. (1993). *Applied and Algorithmic Graph Theory, International Series in Pure and Applied Mathematics*. McGraw-Hil Inc, California.
- [2] Frucht, R. dan Harary, F. (1970). The Corona of Two Graphs. *Aequationes Math* (4), 322-325.
- [3] Gallian, J.A. (2021). Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics #DS6*, (24), 1-576.

- [4] Gutiérrez, A. dan Lladó, A. (2005). Magic Coverings. *J. Combin. Math. Combin. Computing* (55), 43-46.
- [5] Maryati, T. K., Baskoro, E. T., dan Salman, A. N. M. (2008).  $P_h$ -supermagic Labelings of Some Trees. *J. Combin. Math. Combin. Computing* (65), 182-189.
- [6] Maryati, T. K., Salman, A. N. M., Baskoro, E. T., Ryan, J., dan Miller, M. (2010). On H-Supermagic Labelings for Certain Shackles and Amalgamations of a Connected Graph. *Utilitas Mathematica* (83), 333-342.
- [7] Ngurah A. A. G., Salman, A. N. M., dan Susilowati, L. (2010). H-supermagic Labelings. *Discrete Mathematics*, 1293-1300.
- [8] Roswitha, M., Baskoro, E. T., Maryati, T. K., Kurdhi, N. A., dan Susanti, I. (2013). Further Result on Cycle-Supermagic Labeling. *ACKE Int. J. Graphs Comb.* (10), 211-220.

## **Analisis Pengaruh Kanibalisme pada Model *Predator-Prey* dengan Struktur Usia**

Nur Azirah<sup>1\*</sup>, Yuki Novia Nasution<sup>1</sup>, Moh Nurul Huda<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratorium Matematika Komputasi Program Studi Matematika Jurusan matematika FMIPA Unniversitas Mulawarman

Dikirim: Mei 2022; Diterima: Juni 2022; Dipublikasi: September 2022

Alamat Email Korespondensi: [azirah0311@gmail.com](mailto:azirah0311@gmail.com)

### **Abstrak**

Pada penelitian ini telah dibahas analisis pengaruh model *predator-prey* dengan struktur usia. Analisis dinamik yang dilakukan meliputi penentuan titik kesetimbangan, syarat eksistensi titik kesetimbangan, analisis kestabilan lokal dan kestabilan global titik kesetimbangan dan simulasi numerik kestabilan titik kesetimbangan. Hasil analisis dinamik menunjukkan bahwa model memiliki empat titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan trivial bersifat tidak stabil, titik kesetimbangan ketika populasi *predator* punah bersifat stabil asimtotik lokal, titik kesetimbangan ketika populasi *prey* punah bersifat stabil asimtotik lokal dan titik kesetimbangan ketika *predator-prey* hidup berdampingan bersifat stabil asimtotik lokal. Kemudian hasil simulasi numerik mendukung hasil analisis dinamik yang dilakukan, yaitu setiap orbit solusi nilai awal menuju ke masing titik kesetimbangan.

### **Kata kunci:**

*Analisis kestabilan, kanibalisme, model predator-prey, titik kesetimbangan.*

## **PENDAHULUAN**

Ekologi merupakan cabang ilmu biologi yang mempelajari hubungan antara manusia, hewan, tumbuhan dan makhluk hidup lainnya dengan lingkungannya [1]. Makhluk hidup di bumi ini sangat beragam, terdiri dari berbagai spesies yang hidup bersama dan membentuk populasi [2]. Organisme disebut individu, dan populasi adalah kumpulan individu serupa yang berinteraksi pada tempat dan waktu yang sama. Populasi yang berbeda dari spesies yang berbeda yang hidup bersama disebut komunitas. Kelompok yang memiliki karakteristik tertentu dan terdiri dari beberapa komunitas yang berbeda dikenal dengan ekosistem [1].

Ekosistem terdiri dari semua organisme yang hidup dalam komunitas yang sama dan juga semua faktor-faktor abiotik yang berinteraksi dengan organisme tersebut. Salah satu interaksi antar populasi dalam ekosistem adalah predasi, yaitu hubungan *prey* dan *predator*. Hubungan ini sangat erat karena tanpa *prey*, *predator* tidak dapat bertahan hidup karena tidak ada sumber makanan [3].

Predasi adalah bentuk interaksi antara organisme yang memakan organisme lainnya pada suatu tempat tertentu. Secara matematika, suatu bentuk interaksi predasi dimodelkan sebagai model *predator-prey*. Model *predator-prey* adalah model matematika yang mengasumsikan bahwa ada interaksi predasi antara *predator* sebagai organisme pemangsa dan *prey* sebagai organisme yang dimangsa [4].

Peristiwa interaksi *predator-prey* dapat disajikan secara matematis menggunakan model matematika. Model matematika biasanya digunakan untuk menganalisis interaksi antar kelompok. Objek yang diamati adalah jumlah dari dua populasi yang bertambah setiap waktu. Secara matematika ini disebut model *predator-prey* yang diperkenalkan oleh Lotka dan Volterra pada tahun 1926. Interaksi antara *prey* dan *predator* akan mempengaruhi perkembangan kedua populasi tersebut. Model matematika yang digunakan adalah sistem Persamaan diferensial biasa, yang berfungsi untuk mengamati perubahan jumlah individu pada setiap populasi dari waktu ke waktu [5].

Pertemuan antara dua *predator* yang memiliki perbedaan rasa lapar dan perbedaan ukuran dapat menyebabkan peristiwa unik. Peristiwa unik tersebut adalah kanibalisme. Individu yang sangat lapar cenderung lebih agresif dan kanibal [6]. Kanibalisme adalah proses membunuh dan memakan individu dari spesies yang sama [7]. Secara biologis, kanibalisme digunakan sebagai pengendali populasi untuk mencegah perkembangbiakan yang berlebihan [8].

Kajian mengenai model *predator-prey* telah banyak dibahas oleh para peneliti. [9] mengkaji model *predator-prey stage-structured* dengan kanibalisme pada *prey*. [10] mengkaji analisis dinamik model *predator-prey* dengan kanibalisme pada *prey*. [7] mengkaji analisis dinamik model *predator-prey stage-structured* dengan kanibalisme pada *predator*. Berbeda dari penelitian sebelumnya, [11] mengkaji dampak kanibalisme pada dinamika model *predator-prey* dengan mempertimbangkan efek dari tingkat serangan kanibalisme dan manfaat kanibal yang sesuai dengan dinamika model.

Berdasarkan uraian di atas penulis tertarik mengkaji model yang ditulis oleh [11]. Model matematika yang dikaji terdiri dari tiga persamaan, yaitu laju pertumbuhan populasi *predator* dewasa, laju pertumbuhan populasi *predator* muda dan laju pertumbuhan populasi *prey*. Berdasarkan model tersebut dilakukan analisis kestabilan titik kesetimbangan dengan menentukan titik kesetimbangan model dan menganalisis jenis kesetimbangan titik kesetimbangan model. Simulasi numerik dilakukan untuk menunjukkan hasil analisis kestabilan yang telah diperoleh.

## LANDASAN TEORI

### 1. Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah sistem yang dapat diketahui jika kondisi diberikan, kondisi masa depan di masa sekarang atau di masa lalu. Sistem dinamik dalam penerapannya dibagi menjadi dua jenis, yaitu sistem dinamik diskrit dan sistem dinamik kontinu. Sistem dinamik kontinu dinyatakan sebagai Persamaan diferensial biasa, secara umum dapat ditulis [12]

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}_t), \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

### 2. Sistem Autonomous

Sistem *autonomous* adalah sistem Persamaan diferensial biasa yang berbentuk,

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y, z),$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= G(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= H(x, y, z),\end{aligned}\tag{2}$$

dimana  $F, G$  dan  $H$  tidak bergantung secara eksplisit pada variabel tak bebas  $t$  [13].

**Definisi 1.** [14] *Titik Kesetimbangan Sistem Autonomus*

Titik  $\vec{x}^* = (x^*, y^*, z^*)$  disebut titik kritis sistem autonomus (2) jika memenuhi  $F(x^*, y^*, z^*) = 0$ ,  $G(x^*, y^*, z^*) = 0$  dan  $H(x^*, y^*, z^*) = 0$ . Titik kritis  $\vec{x}^* = (x^*, y^*, z^*)$  merupakan solusi dari Persamaan (2) yang bernilai konstan karena  $\frac{d\vec{x}}{dt} = 0$ . Hal ini disebut keadaan setimbang dan titik kritis adalah titik yang terpenuhi, sehingga titik kritis disebut titik kesetimbangan.

**Definisi 2.** [14] *Kestabilan Titik Kesetimbangan*

Titik kesetimbangan  $\vec{x}^*$  sistem autonomus (2) dikatakan

- a. stabil, jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat  $\delta > 0$  sedemikian sehingga setiap solusi  $\vec{x}(t)$  dari sistem (2.11) dimana  $t = 0$  sehingga

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta,$$

dan untuk setiap  $t$  positif dan memenuhi

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon, \forall t \geq 0.$$

- b. stabil asimtotik, jika  $\vec{x}^*$  stabil dan terdapat  $\delta_0 > 0$  sedemikian sehingga jika solusi  $x(t)$  memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta_0$$

berlaku

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*$$

- c. tidak stabil, jika tidak memenuhi kondisi stabil.

### 3. Kriteria Routh-Hurwitz

Nilai eigen matriks Jacobi  $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$  dapat digunakan untuk menganalisis kestabilan titik kesetimbangan sistem (2). Persamaan karakteristik matriks Jacobi  $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$  adalah

$$|J - \lambda I| = 0\tag{3}$$

dengan  $\lambda$  merupakan nilai eigen matriks Jacobi  $J$ . Bentuk umum Persamaan (3) adalah

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0\tag{4}$$

dengan  $a_n \neq 0$ . Titik kesetimbangan sistem *autonomus* linier bersifat stabil asimtotik jika semua akar Persamaan karakteristik terdapat bagian real negatif. Pada beberapa kasus, tidak mudah untuk menentukan akar Persamaan dari (4), sehingga dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz dapat diketahui kestabilan titik kesetimbangannya dengan tanpa menentukan akar-akar Persamaan karakteristiknya [15].

Akar Persamaan karakteristik (4) memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika  $a_n > 0$  dan

$$H = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix}\tag{5}$$

Determinan matriks ke- $k$  dinotasikan sebagai  $\Delta_k$ , untuk  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ . jika semua  $\Delta_k$  bernilai positif, maka semua akar-akar karakteristik dari polynomial  $P(\lambda)$  memiliki bagian real negatif [15].

Misalkan diberikan matriks berukuran  $3 \times 3$  dengan Persamaan karakteristik berderajat tiga

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0. \quad (6)$$

Akar Persamaan (6) memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika

- $\Delta_1 = |a_1| > 0$
- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3 > 0$ , karena jika  $\Delta_2 > 0$  maka
- $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3 - a_3^2 > 0$ .

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### 1. Konstruksi Model *Predator-Prey* dengan Kanibalisme

Model interaksi *predator-prey* terdiri dari populasi *predator* dewasa ( $X$ ) sebagai pemangsa *predator* muda dan *prey*, populasi *predator* muda ( $Y$ ) sebagai pemangsa *prey* namun dia juga dimangsa oleh *predator* dewasa dan populasi *prey* ( $Z$ ) sebagai mangsa.

Model *predator-prey* dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} &= -d_1X + \mu Y + \varepsilon_1XY + cXZ, \\ \frac{dY}{dT} &= B_1X - \mu Y - d_2Y - \beta_1XY, \\ \frac{dZ}{dT} &= (B_2 - \alpha_1Z - \theta X)Z, \end{aligned} \quad (7)$$

dengan  $d_1$  koefisien kematian alami *predator* dewasa,  $\mu$  koefisien pertumbuhan *predator* muda,  $\varepsilon_1$  koefisien penangkapan *predator* dewasa dengan memangsa *predator* muda,  $c$  koefisien Penangkapan *predator* dewasa dengan memangsa *prey*,  $B_1$  koefisien kelahiran dari *predator* dewasa,  $d_2$  koefisien kematian alami pada *predator* muda,  $\beta_1$  koefisien kanibalisme oleh *predator* dewasa,  $B_2$  koefisien pertumbuhan *prey*,  $\alpha_1$  koefisien pertumbuhan *prey* dan  $\theta$  koefisien predasi oleh *predator* dewasa.

Sistem (7) disederhanakan dengan mengkombinasikan variabel dan parameter baru. Misalkan

$X = \frac{d_1x}{\theta}$ ,  $Y = \frac{d_1^2y}{\theta\mu}$ ,  $Z = \frac{d_1z}{c}$  dan  $T = \frac{t}{d_1}$ , sehingga diperoleh sistem baru yaitu

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x + y + \varepsilon xy + xz, \\ \frac{dy}{dt} &= b_1x - \sigma y - \beta xy, \\ \frac{dz}{dt} &= (b_2 - \alpha z - x)z, \end{aligned} \quad (8)$$

dengan  $\varepsilon = \frac{d_1\varepsilon_1}{\theta\mu}$ ,  $b_1 = \frac{B_1\mu}{d_1^2}$ ,  $\sigma = \mu + d_2$ ,  $\beta = \frac{\beta_1}{\theta}$ ,  $b_2 = \frac{B_2}{d_1}$ ,  $\alpha = \frac{\alpha_1}{c}$  dan syarat awal  $x(0) > 0$ ,  $y(0) > 0$ ,  $z(0) > 0$ .

### 2. Titik Keseimbangan Model

Pada sistem (8) diperoleh empat titik keseimbangan yang eksis, yaitu  $E_0 = (0, 0, 0)$ ,  $E_1 = (0, 0, \frac{b_2}{\alpha})$ ,  $E_2 = (\hat{x}, \hat{y}, 0) = (\frac{(\sigma - b_1)}{(\varepsilon b_1 - \beta)}, \frac{(\sigma - b_1)}{(\varepsilon \sigma - \beta)}, 0)$  dan  $E_3 = (x^*, y^*, z^*) = (\frac{B + \sqrt{D}}{2A}, \frac{b_1x^*}{(\sigma + \beta x^*)}, \frac{(b_2 - x^*)}{\alpha})$ , dengan  $A = \beta$ ,  $B = -[\alpha\varepsilon b_1 - \sigma - \beta(\alpha - b_2)]$  dan  $C = [\alpha(\sigma - b_1) - \sigma b_2]$ . Titik keseimbangan  $E_2$  eksis jika  $\frac{\beta}{\varepsilon} < b_1 < \sigma$ , sedangkan titik keseimbangan  $E_3$  eksis jika  $\beta > 0$  dan  $\varepsilon > 0$ .

### 3. Kestabilan Titik Keseimbangan



- a. Titik Kesetimbangan  $E_0 = (0,0,0)$

Hasil linearisasi di sekitar  $E_0$  menghasilkan matriks Jacobi  $J(E_0)$ , yaitu

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ b_1 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

dan diperoleh nilai eigen  $\lambda_1 = b_2$ ,  $\lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  dan  $\lambda_3 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  dengan  $a = 1$ ,  $b = 1 + \sigma$  dan  $c = \sigma - b_1$ . Oleh karena nilai eigen  $\lambda_1$  bernilai positif, maka titik kesetimbangan  $E_0$  bersifat tidak stabil.

- b. Titik Kesetimbangan  $E_1 = (0,0, \frac{b_2}{\alpha})$

Titik kesetimbangan  $E_1$  menunjukkan bahwa populasi *predator* dewasa dan *predator* muda punah. Matriks Jacobi hasil linearisasi di sekitar  $E_1$  adalah

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -1 + \frac{b_2}{\alpha} & 1 & 0 \\ b_1 & -\sigma & 0 \\ -\frac{b_1}{\alpha} & 0 & -b_2 \end{bmatrix}$$

dan nilai eigen yang diperoleh, yaitu  $\lambda_1 = -b_2$ ,  $\lambda_2 = \frac{-e + \sqrt{e^2 - 4df}}{2d}$  dan  $\lambda_3 = \frac{-e - \sqrt{e^2 - 4df}}{2f}$  dengan  $d = 1$ ,  $e = -(\frac{b_2}{\alpha} - \sigma - 1)$  dan  $f = (\sigma - \frac{b_2\sigma}{\alpha} - b_1)$ . Titik Kesetimbangan ini bersifat stabil asimtotik lokal jika  $\frac{b_2}{\alpha} + \frac{b_1}{\sigma} < 1$ .

- c. Titik Kesetimbangan  $E_2 = (\hat{x}, \hat{y}, 0) = (\frac{(\sigma - b_1)}{(\varepsilon b_1 - \beta)}, \frac{(\sigma - b_1)}{(\varepsilon \sigma - \beta)}, 0)$

Titik kesetimbangan  $E_2$  menunjukkan bahwa populasi *prey* punah. Matriks Jacobi hasil linearisasi di sekitar  $E_2$  adalah

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} -\frac{\hat{y}}{\hat{x}} & \frac{\hat{x}}{\hat{y}} & \hat{x} \\ \frac{\sigma \hat{y}}{\hat{x}} & -\frac{b_1 \hat{x}}{\hat{y}} & 0 \\ 0 & 0 & b_2 - \frac{\sigma - b_1}{\varepsilon b_1 - \beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix}$$

dan nilai eigen yang diperoleh, yaitu  $\lambda_1 = m_{33}$ ,  $\lambda_2 = \frac{-r + \sqrt{r^2 - 4qs}}{2q}$  dan  $\lambda_3 = \frac{-r - \sqrt{r^2 - 4qs}}{2q}$  dengan  $q = 1$ ,  $r = -m_{11} - m_{22}$  dan  $s = m_{11}m_{22} + m_{12}m_{21}$ . Titik kesetimbangan ini akan stabil asimtotik lokal jika  $\sigma\varepsilon < \beta$  dan  $\frac{\sigma + \beta b_2}{1 + \varepsilon b_2} < b_1 < \frac{\beta}{\varepsilon}$ .

- d. Titik Kesetimbangan  $E_3 = (x^*, y^*, z^*)$

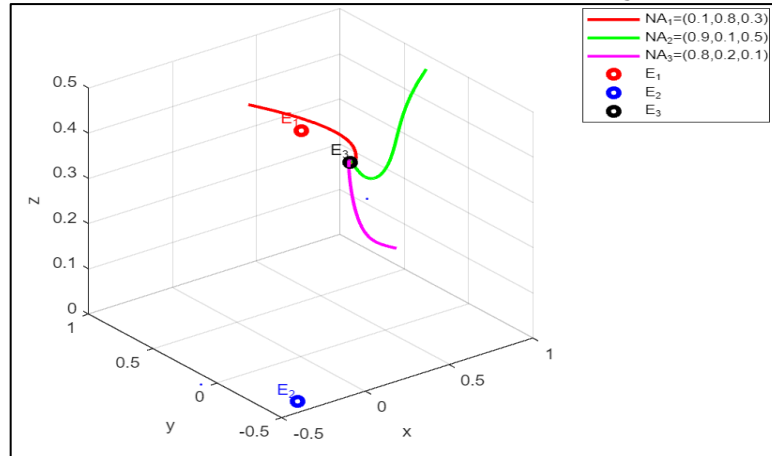
Titik kesetimbangan  $E_3$  menunjukkan bahwa populasi *predator-prey* hidup berdampingan. Matriks Jacobi hasil linearisasi di sekitar  $E_3$  adalah

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} -\frac{y^*}{x^*} & \frac{(1 - z^*)x^*}{y^*} & x^* \\ \frac{\sigma y^*}{x^*} & -\frac{b_1 x^*}{y^*} & 0 \\ -z^* & 0 & -\alpha z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, titik kesetimbangan  $E_3$  bersifat stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika  $a_1 a_2 - a_3 > 0$ , dengan  $a_1 = -(g_{11} + g_{22} + g_{33})$ ,  $a_2 = g_{11}g_{22} + g_{11}g_{33} - g_{12}g_{21} + g_{22}g_{33} - g_{13}g_{31}$  dan  $a_3 = -g_{11}g_{22}g_{33} + g_{12}g_{21}g_{33} + g_{13}g_{22}g_{31}$ .

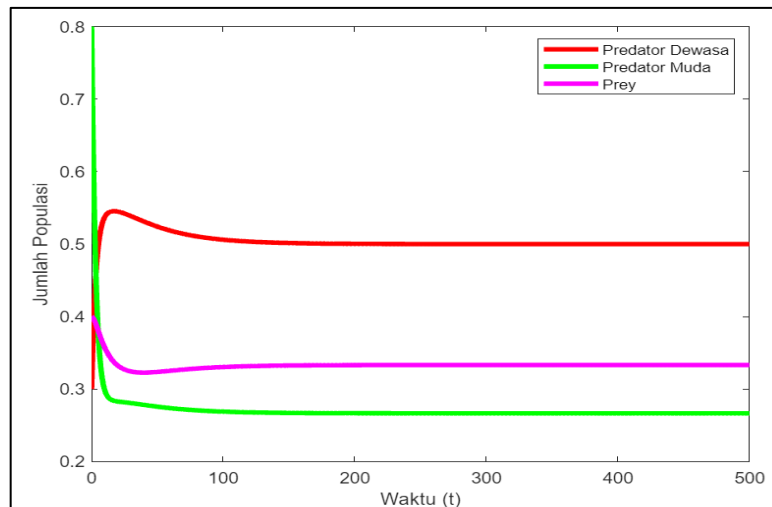
## 4. Simulasi Numerik

Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dan *software MATLAB*. Simulasi ini bertujuan untuk melengkapi hasil-hasil yang diperoleh secara analisis pada materi sebelumnya. parameter yang digunakan untuk titik kesetimbangan  $E_1$  adalah  $b_1 = 2,5$ ;  $b_2 = 1,5$ ;  $\sigma = 4,4$ ;  $\alpha = 4$ ;  $\beta = 5$  dan  $\varepsilon = 1,89$  dengan nilai awal  $NA_1 = (0,1; 0,8; 0,3)$ ,  $NA_2 = (0,9; 0,1; 0,5)$  dan  $NA_3 = (0,8; 0,2; 0,1)$ .



Gambar 1. Grafik Sistem (8) yang Menuju Kestabilan Titik Kesetimbangan  $E_3$

Hasil simulasi Gambar 1 menunjukkan bahwa orbit solusi tiga nilai awal yang berbeda menuju titik kesetimbangan  $E_3$ , dengan kata lain titik kesetimbangan  $E_3(0,5; 0,27; 0,33)$  bersifat stabil asimtotik lokal.

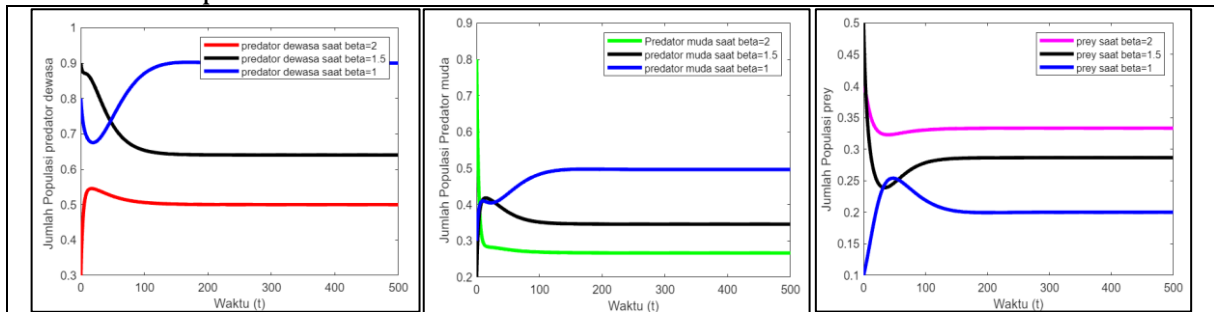


Gambar 2. Grafik *Predator-Prey* hidup berdampingan

Gambar 2 menunjukkan grafik hasil penyelesaian model dan jumlah populasi *predator* dewasa, *predator* muda dan *prey* dengan nilai awal  $NA_1 = (0,1; 0,8; 0,3)$ . Berdasarkan grafik di atas didapatkan jumlah populasi *prey* yaitu 0,33, jumlah populasi *predator* dewasa yaitu 0,5 dan jumlah populasi *predator* muda yaitu 0,27. Berdasarkan Gambar 1 dan Gambar 2 didapatkan nilai yang sama untuk jumlah populasi *predator* dewasa, *predator* muda dan *prey*.

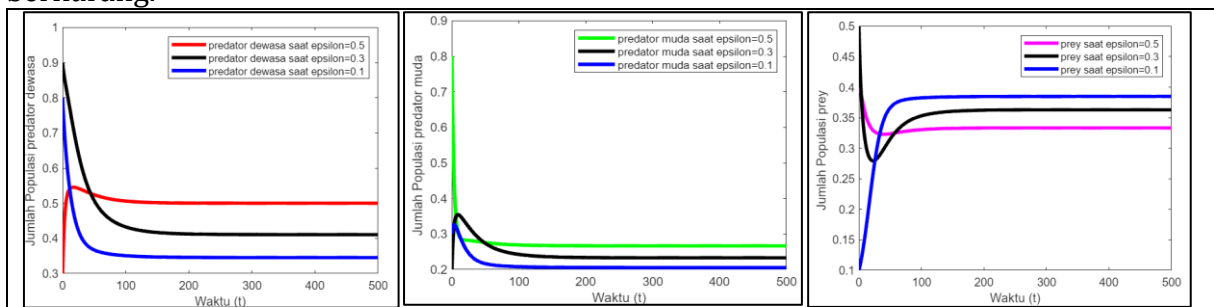
Analisis kanibalisme dilakukan dengan menggunakan nilai input yang berbeda-beda dari salah satu parameter yang mempengaruhi efek kanibalisme pada *predator* sementara parameter yang lain tetap. Parameter yang dipilih adalah  $\beta$  (laju kanibalisme *predator* dewasa) dan  $\varepsilon$  (laju memangsa *predator* muda). Pengaruh naik turunnya

parameter yang mempengaruhi efek kanibalisme terhadap sub populasi disajikan dalam Gambar 3 sampai Gambar 4.



Gambar 3. Gambar Perubahan Nilai  $\beta$  Terhadap Populasi  $x, y, z$

Gambar 3 menunjukkan pengaruh kanibalisme predator dewasa terhadap jumlah dari setiap populasi. Jika nilai  $\beta$  semakin kecil maka jumlah populasi *predator* dewasa semakin bertambah begitu pula yang terjadi pada populasi *predator* muda dan populasi *prey* sebaliknya, yaitu jika nilai  $\beta$  semakin berkurang maka jumlah populasi *prey* semakin berkurang.



Gambar 4. Gambar Perubahan Nilai  $\epsilon$  Terhadap Populasi  $x, y, z$

Gambar 4 menunjukkan pemangsaan terhadap *predator* muda terhadap jumlah dari setiap populasi. Jika nilai  $\epsilon$  semakin berkurang maka jumlah populasi *predator* dewasa semakin berkurang begitu pula yang terjadi dengan populasi *predator* muda dan populasi *prey* sebaliknya, yaitu jika nilai  $\epsilon$  semakin berkurang maka jumlah populasi *prey* semakin bertambah.

## PENUTUP

Model *predator-prey* dengan struktur usia memiliki empat titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan trivial (ketiga populasi punah). Titik kesetimbangan ketika populasi *predator* dewasa dan *predator* muda punah. Titik kesetimbangan ketika populasi *prey* punah dan titik kesetimbangan ketika *predator-prey* hidup berdampingan. Titik kesetimbangan trivial dan titik kesetimbangan ketika populasi *predator* dewasa dan *predator* muda punah selalu eksis, sedangkan titik kesetimbangan ketika populasi *prey* punah dan titik kesetimbangan ketika *predator-prey* hidup berdampingan eksis dengan syarat tertentu. Berdasarkan hasil analisis kestabilan pada titik kesetimbangan, titik kesetimbangan trivial bersifat tidak stabil, titik kesetimbangan ketika populasi *predator* dewasa dan *predator* muda punah, titik kesetimbangan ketika populasi *prey* punah dan titik kesetimbangan ketika *predator-prey* hidup berdampingan bersifat stabil asimtotik lokal dengan syarat tertentu. Hasil simulasi ketiga populasi mempengaruhi jumlah populasi ketika nilai parameter laju kestabilan *predator* dewasa dan laju pemangsaan *predator* muda berubah.

**DAFTAR PUSTAKA**

- [1] Wijayanti, H., Sri, S., Mardika, W. (2011). Metode Runge Kutta dalam Penyelesaian Model Radang Akut. *Jurnal Program Studi Matematika*, 11(2), 46-52.
- [2] Winarni, dkk. (2020). Analisis Pengaruh Tingkat Kompetensi dan Interaksi antara Prey dan Predator pada Perilaku Model Dinamik Diskrit Lotka-Volterra. *Journal of Mathematics and Mathematics Education*, 2(2), 109-118.
- [3] Taufiq, Irham, dan Agustino D. (2018). Model Predator-Prey dengan Dua Predator dan Satu Prey Terinfeksi. *Journal of Mathematics Education*, 1(1), 8-15.
- [4] Safitri, Oryza dan Mardijah. (2019). Kontrol Optimum pada Model Prey-Predator dengan Pemanenan pada Ikan Prey dan Ikan Predator. *Journal of Mathematics and Its Applications*, 16(1), 39-49.
- [5] Mu'tamar, K., dan Zulkarnain. (2017). Model Predator-Prey dengan Adanya Infeksi dan Pengobatan pada Populasi Mangsa. *Jurnal Sains, Teknologi dan Industri*, 15(1), 1-6.
- [6] Petersen, A., Kristian, T, N., Christian, B, C., dan Soren, T. (2010). The Advantage of Starving: Success in Cannibalistic Encounters Among Wolf Spiders. *Behavioral Ecology*, Vol 21(5), 1112 – 1117.
- [7] Zhang, F., Chen Y., dan Li J. (2018). Dynamical Analysis of a Stagestructured Predator-Prey Model with Cannibalism. *Mathematical Biosciences*, 307, 33-41.
- [8] Jia, Y., Yi, L., dan Jianhua, W. (2016). Effect of Predator Cannibalism and Prey Growth on the Dynamic Behavior for an Predatorstage structured Population Model with Diffusion. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 449(2), 1479 – 1501.
- [9] Zhang, L., dan Zhang, C. (2010). Rich Dynamic of a stage-structured prey-predator model with canibalism and periodic attacking rate. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(12), 4029-4040.
- [10] Basheer, A., Emmanuel, Q., Suman, B., dan Rana, D. P. (2016). Prey cannibalism alters the dynamics of Holling-Tanner-type predator-prey models. *Nonlinear Dynamics*, 85(4), 2549-2567.
- [11] Li, J., Xue, Z., Xiaolin, L., dan Jia,L. (2019). Impact of cannibalism on dynamicsof a structured predator–prey system. *Applied Mathematical Modelling*, 78, 1-9.
- [12] Alligood, K. T., T. D. Sauer., dan J, A. Yorke. (2000). *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. New York: Springer.
- [13] Goode, S. W., dan Annin, S. A. (2015). *Differential Equations and Linear Algebra*. Fourth Edition. California State University. New York: Fullerton.
- [14] Boyce, W.E., dan DiPrima, R.C. (2009). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. United State of America: Ninth Edition. John Willey & Sons, Inc.
- [15] Murray, J. D. (2002). *Mathematical Biology: An Introduction. Third Edition*. New York: Springer-Verlag.

## Analisis Kestabilan Model Epidemik SEI Pada Penyebaran Penyakit Tuberkulosis

Nur Amalia Khaerunnisa<sup>1\*</sup>, Yuki Novia Nasution<sup>1</sup>, Moh. Nurul Huda<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Laboratorium Matematika Komputasi Program Studi Matematika Jurusan matematika FMIPA Universitas Mulawarman*

Dikirim: Mei 2022;

Diterima: Mei 2022;

Dipublikasi: September 2022

Alamat Email Korespondensi: [nuramaliakhaerunnisa21@gmail.com](mailto:nuramaliakhaerunnisa21@gmail.com)

### Abstrak

Pada penelitian ini telah dikaji model matematika nonlinier tipe *SEI* (*Susceptible, Exposed, Infected*) untuk menggambarkan penyebaran penyakit tuberkulosis. Pembahasan difokuskan pada perhitungan titik kesetimbangan dan analisis kestabilan titik kesetimbangan. Angka reproduksi dasar ( $R_0$ ) telah dihitung dengan menggunakan metode matriks generasi selanjutnya. Berdasarkan model *SEI* telah diperoleh dua titik kesetimbangan yang terdiri dari titik kesetimbangan bebas penyakit ( $E_0$ ) dan titik kesetimbangan endemik ( $E^*$ ). Simulasi numerik dibagi menjadi tiga simulasi dengan menggunakan nilai-nilai parameter dan populasi awal. Simulasi pertama dilakukan dengan menurunkan laju infeksi ( $\alpha$ ) sehingga diperoleh nilai  $R_0 = 0.303 < 1$  serta titik-titik kesetimbangan  $E_0(S_0, E_0, I_0) = (3.017, 0, 0)$  dan  $E^*(S^*, E^*, I^*) = (3.296, -0.114, -0.067)$ . Simulasi kedua dengan meningkatkan laju infeksi ( $\alpha$ ) sehingga diperoleh nilai  $R_0 = 1.010 > 1$  serta titik-titik kesetimbangan, yaitu  $E_0(S^0, E^0, I^0) = (3.017, 0, 0)$  dan  $E^*(S^*, E^*, I^*) = (0.989, 0.832, 0.490)$ . Simulasi ketiga dengan nilai  $R_0 = 1$  serta titik-titik kesetimbangan, yaitu  $E_0(S^0, E^0, I^0) = (3.017, 0, 0)$  dan  $E_*(S^*, E^*, I^*) = (0.999, 0.827, 0.488)$ . Jika  $R_0 \geq 1$ , maka titik kesetimbangan endemik stabil, sedangkan jika  $R_0 < 1$ , maka titik kesetimbangan bebas penyakit stabil.

### Kata Kunci:

*Angka Reproduksi Dasar Kestabilan, Matriks Generasi Selanjutnya, Sistem Dinamik, Titik Kesetimbangan.*

### PENDAHULUAN

Tuberkulosis termasuk salah satu dari daftar sepuluh penyebab kematian di dunia. Diperkirakan total angka kematian akibat penyakit ini adalah 1,3 juta jiwa. Tuberkulosis merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh bakteri *Mycobacterium tuberculosis* [1]. Penyakit Tuberkulosis (TB) masih menjadi beban masalah kesehatan di Indonesia hingga saat ini. Di saat yang bersamaan Indonesia juga menghadapi wabah *Coronavirus Disease* (COVID-19) dan harus lebih diwaspadai oleh pasien TB. Setiap tahun 100 juta orang di seluruh dunia meninggal akibat bakteri *Mycobacterium tuberculosis*, dimana 845.000 di antaranya berada di Indonesia, negara dengan beban TB tertinggi ketiga setelah India dan China [2].

Model matematika merupakan sekumpulan persamaan atau pertidaksamaan yang mengungkapkan perilaku masalah yang sebenarnya [3]. Model matematika yang dapat digunakan untuk menganalisis penyebaran penyakit antara lain model epidemik SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*), SEIR (*Susceptible-Exposed-Infected-Recovered*), dan lainnya. Model matematika SEIR merupakan model permasalahan epidemiologi khususnya model penyebaran penyakit menular [4].

Penelitian mengenai penyakit tuberkulosis (TB) pernah dilakukan oleh [5] menggunakan model SEIR dengan demografi digunakan dalam pengaturan deterministik dan stokastik untuk tujuan perbandingan. [6] Menggunakan model SIR yang ditambahkan dengan faktor penggunaan masker medis pada penyebaran penyakit tuberkulosis.

Penelitian menggunakan model matematika pernah dilakukan oleh [7] melalui model SEIR mengusulkan regulasi yang digerakkan oleh mobilitas dari laju transmisi SEIR pada COVID-19 di kota-kota besar AS bulan Maret-Agustus 2020.[8] Menggunakan model SEIR-SEI pada penyebaran penyakit malaria dengan memperhatikan peluang kegagalan vaksinasi manusia.

Model SEI (*Susceptible, Exposed, Infected*) merupakan model penyebaran penyakit yang membagi populasi menjadi 3 subpopulasi, yaitu subpopulasi individu yang rentan (S), subpopulasi individu yang terpapar (E), subpopulasi individu yang terinfeksi (I). Pada penelitian ini, penulis menggunakan model SEI yang berasal dari pengembangan model SIS dan model SEIR. Model SEI diperoleh dengan membuat  $r$  subjek pada persamaan SEIR dan diatur  $r = 1 - s - e - i$ , sehingga didapatkan model SEI melalui perhitungan numerik dengan metode Runge-Kutta [4].

Penelitian ini membahas penjabaran dan simulasi model SEI pada penyakit tuberkulosis. Langkah-langkah dalam penelitian ini adalah menganalisis dan mereduksi model SEI pada penyakit tuberkulosis, menentukan titik kesetimbangannya, menghitung bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ), mencari kestabilan titik kesetimbangannya dan melakukan simulasi model SEI.

## LANDASAN TEORI

### 1) Sistem *Autonomous* Nonlinier

Diberikan sistem *autonomous* nonlinier 3 dimensi berikut ini :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} &= h(x, y, z).\end{aligned}\tag{1}$$

Anggap bahwa fungsi  $f$ ,  $g$ , dan  $h$  mempunyai turunan parsial dan merupakan fungsi yang kontinu. Titik kesetimbangan diperoleh dengan melakukan ekspansi deret Taylor di sekitar titik  $(x^*, y^*, z^*)$ , sehingga fungsi  $f$ ,  $g$ , dan  $h$  dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$f(x, y, z) = f(x^*, y^*, z^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial y}(y - y^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial z}(z - z^*) + \eta_1(x, y, z)\tag{2}$$

$$g(x, y, z) = g(x^*, y^*, z^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial y}(y - y^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial z}(z - z^*) + \eta_2(x, y, z)\tag{3}$$

$$h(x, y, z) = h(x^*, y^*, z^*) + \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial y}(y - y^*) + \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial z}(z - z^*) + \eta_3(x, y, z), \quad (4)$$

dengan  $\eta_1(x, y, z)$ ,  $\eta_2(x, y, z)$ , dan  $\eta_3(x, y, z)$  adalah suku sisa. Untuk hampiran orde satu di atas, suku sisa memenuhi sifat-sifat

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y,z) \rightarrow (x^*,y^*,z^*)} \frac{\eta_1(x, y, z)}{\|\vec{w}\|} &= 0, \\ \lim_{(x,y,z) \rightarrow (x^*,y^*,z^*)} \frac{\eta_2(x, y, z)}{\|\vec{w}\|} &= 0, \\ \lim_{(x,y,z) \rightarrow (x^*,y^*,z^*)} \frac{\eta_3(x, y, z)}{\|\vec{w}\|} &= 0, \end{aligned}$$

dengan  $\vec{w} = (x - x^*, y - y^*, z - z^*)^T$ .

Berdasarkan persamaan (2), (3), dan (4), serta mengingat

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d(x - x^*)}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{d(y - y^*)}{dt}, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{d(z - z^*)}{dt}, \end{aligned}$$

maka sistem persamaan (1) dapat ditulis dalam bentuk matriks, yaitu

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \\ z - z^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f(x^*, y^*, z^*) \\ g(x^*, y^*, z^*) \\ h(x^*, y^*, z^*) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial y}(y - y^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial z}(z - z^*) \\ \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial y}(y - y^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial z}(z - z^*) \\ \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial y}(y - y^*) + \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial z}(z - z^*) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \eta_1(x, y, z) \\ \eta_2(x, y, z) \\ \eta_3(x, y, z) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

atau

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \\ z - z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x^*, y^*, z^*) \\ g(x^*, y^*, z^*) \\ h(x^*, y^*, z^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x - x^*) \\ (y - y^*) \\ (z - z^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x, y, z) \\ \eta_2(x, y, z) \\ \eta_3(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Matriks  $\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \end{bmatrix}$  disebut matriks Jacobi atau *partial derivative matrix* dan dinotasikan dengan  $J(x^*, y^*, z^*)$ .

*matrix* dan dinotasikan dengan  $J(x^*, y^*, z^*)$ .

Karena  $f(x^*, y^*, z^*) = g(x^*, y^*, z^*) = h(x^*, y^*, z^*) = 0$ , maka persamaan (5) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x, y, z) \\ \eta_2(x, y, z) \\ \eta_3(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Bentuk (6) dapat ditulis sebagai :

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w} + \vec{\eta}. \quad (7)$$

Titik  $(x, y, z)$  yang berada cukup dekat dengan  $(x^*, y^*, z^*)$ ,  $(u, v, w)$  bernilai kecil sehingga  $\|\vec{\eta}\| \leq \|\vec{w}\|$ , abatnya nilai  $\vec{\eta}$  dapat diabaikan dan di sekitar  $(x^*, y^*, z^*)$  sistem nonlinier (7) dapat dihampiri oleh sistem linier

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w}. \quad (8)$$

Nilai  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{y}^*$  dan  $\mathbf{z} = \mathbf{z}^*$  diperoleh  $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*, \mathbf{w}^*) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ , sehingga sistem *autonomous* nonlinier (8) memiliki titik kesetimbangan  $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*, \mathbf{w}^*) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ [9].

## 2) Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan digunakan untuk mengetahui nilai dari bilangan reproduksi dasar. Titik kesetimbangan diperlukan dalam proses menganalisis penyebaran penyakit.

**Definisi 1.** [10] Diberikan sistem persamaan diferensial tingkat satu  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  dengan  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , penyelesaian dengan keadaan awal  $x(0) = x_0$  dinotasikan dengan  $x(t, x_0)$ .

1. Vektor  $\dot{x}$  yang memenuhi  $f(\bar{x}) = 0$  disebut suatu titik setimbang.

2. Suatu titik setimbang  $\bar{x}$  dikatakan stabil bila untuk setiap  $\varepsilon > 0$  ada  $\delta > 0$  dan  $t_\delta$  sedemikian sehingga bila  $\|x_{t_\delta} - \bar{x}\| < \delta$  maka  $\|x(t, x_{t_\delta}) - \bar{x}\| < \varepsilon$  untuk semua  $t > t_\delta$ .



3. Suatu titik setimbang ( $\bar{x}$ ) dikatakan stabil asimtotik bila titik-titik kesetimbangannya stabil dan terdapat  $\delta_1 > 0$  sedemikian sehingga  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$ , bila  $\|x_{t_0} - \bar{x}\| < \delta_1$ .
4. Suatu titik setimbang dikatakan tidak stabil jika titik kesetimbangan tidak memenuhi point kedua.

Titik kesetimbangan dapat diklasifikasikan menjadi dua yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan bebas penyakit adalah suatu kondisi sudah tidak ada lagi penyakit yang menyerang atau dalam arti tidak ada lagi individu yang terserang penyakit. Titik kesetimbangan endemik adalah suatu kondisi penyakit selalu ada dalam populasi tersebut, maksudnya adalah bahwa selalu saja ada individu yang terserang penyakit [11].

### 3) Bilangan Reproduksi Dasar ( $R_0$ )

Menurut [12], bilangan reproduksi dasar merupakan rata-rata jumlah individu rentan yang terinfeksi secara langsung oleh individu lain yang telah terinfeksi, dan masuk ke dalam populasi yang seluruhnya masih rentan. Kondisi yang akan timbul adalah salah satu di antara kemungkinan berikut [13] :

- Jika  $R_0 < 1$ , maka penyakit akan menghilang.
- Jika  $R_0 = 1$ , maka penyakit akan menetap (endemik).
- Jika  $R_0 > 1$ , maka penyakit akan meningkat menjadi wabah.

### 4) Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Sistem autonomous dengan sebuah matriks jacobii yang terdapat pada persamaan (8) mempunyai nilai eigen yang dapat diperoleh dengan menyelesaikan  $\det(J - \lambda I) = 0$ , sehingga diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (9)$$

Solusi sistem *autonomous* tersebut akan stabil jika semua akar persamaan di atas bernilai negatif, atau dengan kata lain  $\lambda_m < 0, m = 1, 2, \dots, n$ .

**Teorema 2.** [14] Dengan menggunakan koefisien-koefisien persamaan karakteristik (9), dibangun  $m$  matriks sebagai berikut :

$$H_1 = [a_1], H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}, \dots, H_m = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_m \end{bmatrix}.$$

Jika  $\det(H_m) > 0$ , maka  $\lambda_m < 0, m = 1, 2, \dots, n$ . Sehingga, untuk  $n = 3$  persamaan karakteristik (1) menjadi

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0. \quad (10)$$

Akar-akar persamaan (10) akan bernilai negatif jika dan hanya jika semua koefisien  $a_1, a_2$ , dan  $a_3$  bernilai positif, dan  $a_1a_2 > a_3$ .

Teorema Routh-Hurwitz untuk kasus khusus matriks

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (11)$$

dapat diselesaikan dengan Lemma 2.6. Persamaan karakteristik matriks (11) adalah

$$\lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3 = 0.$$

**Lemma 2.** [15] Misalkan  $A_1 = -tr(J)$ ,  $A_2 = J_a + J_b + J_c$ , dan  $A_3 = -det(J)$  dengan  $J_a = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$ ,  $J_b = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ,  $J_c = a_{11}a_{33}$ . Matriks (11) akan stabil (semua nilai eigennya bernilai negatif) jika dan hanya jika memenuhi kondisi

$$(i) A_1 > 0,$$

$$(ii) A_2 > 0,$$

$$(iii) A_3 > 0,$$

$$(iv) A_1A_2 - A_3 > 0,$$

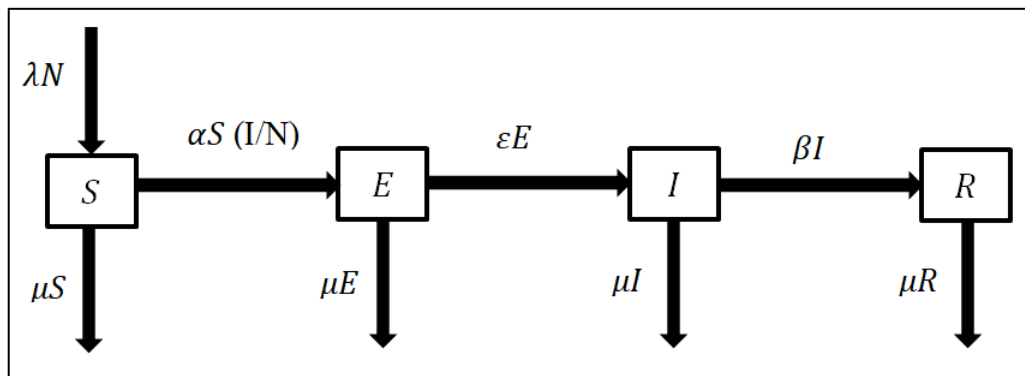
dari matriks (11) dapat diketahui nilai  $A_1A_2 - A_3$  adalah

$$\begin{aligned} A_1A_2 - A_3 &= -(a_{11} + a_{22} + a_{33})(J_a + J_b + J_c) + \det(J) \\ &= -a_{11}(J_b + J_c) - a_{22}(J_a + J_b + J_c) - a_{33}(J_a + J_c) - a_{11}a_{22}a_{33} \\ &\quad + a_{13}a_{21}a_{32}. \end{aligned}$$

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### 1) Konstruksi Model Epidemik SEI

Model matematika tuberkulosis merujuk pada [8] yang menggambarkan model deterministik dirumuskan dengan membagi populasi inang menjadi empat kelas : *Susceptible* adalah rentan ( $S$ ), *Exposed* adalah Terkena ( $E$ ), *Infectious* adalah Infeksi ( $I$ ), *Recovery* adalah Pemulihan ( $R$ ) dan  $N$  adalah Total Populasi. Laju perubahan keempat populasi pada model adalah sebagai berikut :



Gambar 1. Ilustrasi Model SEIR

Berdasarkan Gambar 1. diperoleh model persamaan sebagai berikut :

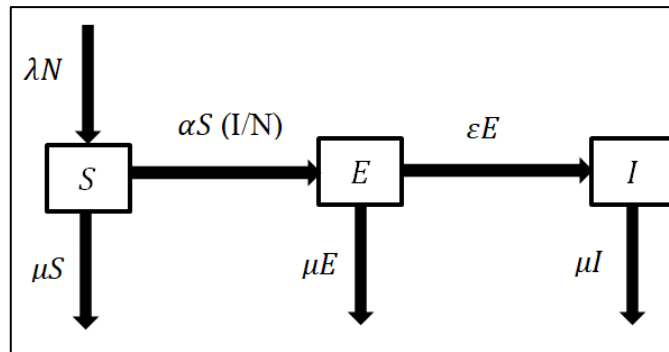
$$\frac{ds}{dt} = \gamma - \mu s - \alpha si, \quad (12)$$

$$\frac{de}{dt} = \alpha si - (\varepsilon + \mu)e, \quad (13)$$

$$\frac{di}{dt} = \varepsilon e - (\beta + \mu)i, \quad (14)$$

$$\frac{dr}{dt} = \beta i - \mu r, \quad (15)$$

dimana  $s + e + i + r = 1$ . Misalkan  $r = 1 - s - e - i$ , sehingga model yang dikaji cukup memperhatikan sistem pada model persamaan (16), (17), dan (18).



Gambar 2. Ilustrasi Model SEI

$$\frac{ds}{dt} = \gamma - \mu s - \alpha si, \quad (16)$$

$$\frac{de}{dt} = \alpha si - (\varepsilon + \mu)e, \quad (17)$$

$$\frac{di}{dt} = \varepsilon e - (\beta + \mu)i. \quad (18)$$

Sistem persamaan diferensial biasa pada persamaan (16), (17), dan (18) diselesaikan secara numerik melalui metode Runge-Kutta.

## 2) Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan terdiri dari titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Pada sistem Persamaan (16),(17),(18) diperoleh nilai titik kesetimbangan bebas penyakit ( $E_0$ ) adalah  $E_0 = \left\{ \frac{\gamma}{\mu}, 0, 0 \right\}$  dan nilai titik kesetimbangan endemik adalah

$$E^* = \left\{ s^* = \frac{(\mu + \varepsilon)(\mu + \beta)}{\alpha \varepsilon}, e^* = \frac{\gamma \alpha \varepsilon - \mu(\mu + \varepsilon)(\mu + \beta)}{\alpha \varepsilon(\mu + \varepsilon)}, i^* = \frac{\gamma \alpha \varepsilon - \mu(\mu + \varepsilon)(\mu + \beta)}{\alpha(\mu + \varepsilon)(\mu + \beta)} \right\}$$

## 3) Bilangan Reproduksi Dasar ( $R_0$ )

Bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) diperoleh dengan menggunakan metode matriks generasi selanjutnya (*next generation*). Bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) ditentukan menggunakan sistem Persamaan (16), (17), dan (18) dengan nilai titik kesetimbangan bebas penyakit ( $E_0$ ) =  $\left\{ \frac{\gamma}{\mu}, 0, 0 \right\}$ . Pada model ini, sistem Persamaan (17) dan Persamaan (18) merupakan subpopulasi kelas terinfeksi yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \alpha si - (\varepsilon + \mu)e, \\ \frac{di}{dt} &= \varepsilon e - (\beta + \mu)i. \end{aligned}$$

Matriks generasi selanjutnya dapat diperoleh dari  $\frac{de}{dt}$  dan  $\frac{di}{dt}$  sehingga didapatkan :

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \varphi \left( \frac{ds}{dt}, \frac{de}{dt} \right) - \psi \left( \frac{ds}{dt}, \frac{de}{dt} \right), \\ \frac{di}{dt} &= \varphi \left( \frac{ds}{dt}, \frac{di}{dt} \right) - \psi \left( \frac{ds}{dt}, \frac{di}{dt} \right), \end{aligned}$$

dengan :

$$\varphi = \begin{bmatrix} \alpha si \\ \varepsilon e \end{bmatrix},$$

$$\psi = \begin{bmatrix} (\varepsilon + \mu)e \\ (\beta + \mu)i \end{bmatrix}.$$

Adapun matriks Jacobian dari  $\varphi$  dan  $\psi$  masing-masing adalah :

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial e} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial i} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial e} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha s \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial e} & \frac{\partial \psi_1}{\partial i} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial e} & \frac{\partial \psi_2}{\partial i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon + \mu & 0 \\ 0 & \beta + \mu \end{bmatrix}.$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit disubstitusikan pada matriks  $F$  dan matriks  $V$ , sehingga diperoleh :

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} \varepsilon + \mu & 0 \\ 0 & \beta + \mu \end{bmatrix}.$$

Mengalikan matriks  $F$  dan invers  $V$ , diperoleh matriks  $K$  sebagai matriks generasi selanjutnya sebagai berikut :

$$K = FV^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon + \mu} & -0 \\ -0 & \frac{1}{\beta + \mu} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha}{\beta + \mu} \\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \mu} & 0 \end{bmatrix}.$$

Sehingga, didapatkan nilai eigen dominan :

$$\rho(K) = \frac{\alpha\varepsilon}{(\beta + \mu)(\varepsilon + \mu)}.$$

Jadi, diperoleh bilangan reproduksi dasar :

$$R_0 = \rho(K) = \frac{\alpha\varepsilon}{(\beta + \mu)(\varepsilon + \mu)}.$$

#### 4) Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

**Teorema 3.** Titik kesetimbangan bebas penyakit dari sistem persamaan (16), (17), dan (18) stabil secara asimtotik jika dan hanya jika  $R_0 < 1$  dan tidak stabil jika  $R_0 > 1$ .

$$J(s, e, i) = \begin{bmatrix} -\mu - \alpha i & 0 & -\alpha s \\ \alpha i & -(\varepsilon + \mu) & \alpha s \\ 0 & \varepsilon & -(\beta + \mu) \end{bmatrix}$$

Linearisasi

$$J(s, e, i)_{DFE} - I\lambda = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\alpha \\ 0 & -(\mu + \varepsilon) & \alpha \\ 0 & \varepsilon & -(\mu + \beta) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Maka, diperoleh persamaan karakteristik  $J(s, e, i)_{DFE} - I\lambda$  dengan mendapatkan determinan dan menyamakannya dengan nol :

$$|J(s, e, i)_{DFE} - I\lambda| = \begin{vmatrix} -(\mu + \lambda) & 0 & -\alpha \\ 0 & -\{(\mu + \varepsilon) + \lambda\} & \alpha \\ 0 & \varepsilon & -\{(\mu + \beta) + \lambda\} \end{vmatrix}$$

$$|J(s, e, i)_{DFE} - I\lambda| = \lambda^3 + (3\mu + \varepsilon + \beta)\lambda^2 + (3\mu^2 + 2\mu\beta + 2\mu\varepsilon - \varepsilon\beta - \alpha\varepsilon)\lambda + (\mu^3 + \mu^2\beta + \mu^2\varepsilon + \mu\varepsilon\beta - \mu\alpha\varepsilon) = 0.$$

Dimisalkan  $Y$  dan  $Z$  menjadi koefisien dari  $\lambda^2$  dan  $\lambda$ . Sehingga,

$$Y = 3\mu + \varepsilon + \beta,$$

$$Z = 3\mu^2 + 2\mu\beta + 2\varepsilon\mu + \varepsilon\beta - \alpha\varepsilon,$$

$$A = \mu^3 + \mu^2\beta + \mu^2\varepsilon + \mu\varepsilon\beta - \mu\alpha\varepsilon,$$

Jadi, persamaan karakteristik menjadi  $\lambda^3 + Y\lambda^2 + Z\lambda + A$ .

Berdasarkan analisis kriteria stabilitas Routh-Hurwitz, jika  $Y > 0, Z > 0$  dan  $YZ - A > 0$ , maka semua akar persamaan karakteristik memiliki bagian riil negatif. Oleh karena itu, titik kesetimbangan bebas penyakit atau *disease-free equilibrium point* (DFEP) stabil. ■

### 5) Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik

**Teorema 4.** Titik kesetimbangan endemik dari sistem persamaan (16), (17), dan (18) stabil secara asimtotik bila  $R_0 > 1$  dan tidak stabil bila  $R_0 < 1$ .

Bukti. Mendapatkan matriks Jacobian tentang titik  $(s^*, e^*, i^*)$  diperoleh

$$J(s^*, e^*, i^*) = \begin{bmatrix} -\mu - \alpha i^* & 0 & -\alpha s^* \\ \alpha i^* & -(\mu + \varepsilon) & \alpha s^* \\ 0 & \varepsilon & -(\mu + \beta) \end{bmatrix}.$$

$$J(s^*, e^*, i^*)_{EEP} - I\lambda = \begin{bmatrix} -\mu - \alpha i^* & 0 & -\alpha s^* \\ \alpha i^* & -(\mu + \varepsilon) & \alpha s^* \\ 0 & \varepsilon & -(\mu + \beta) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -(\mu + \alpha i^* + \lambda) & 0 & -\alpha s^* \\ \alpha i^* & -(\mu + \varepsilon + \lambda) & \alpha s^* \\ 0 & \varepsilon & -(\mu + \beta + \lambda) \end{bmatrix}.$$

Sehingga, diperoleh persamaan karakteristik  $J(s^*, e^*, i^*)_{EEP} - I\lambda$  dengan menemukan determinan  $J(s^*, e^*, i^*)_{EEP} - I\lambda$  dan menyamakannya dengan nol :

$$|J(s^*, e^*, i^*)_{EEP} - I\lambda| = \begin{vmatrix} -(\mu + \alpha i^* + \lambda) & 0 & -\alpha s^* \\ \alpha i^* & -(\mu + \varepsilon + \lambda) & \alpha s^* \\ 0 & \varepsilon & -(\mu + \beta + \lambda) \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 + (3\mu + \alpha i^* + \varepsilon + \beta)\lambda^2 + (3\mu^2 + 2\mu\varepsilon + 2\mu\beta + 2\mu\alpha i^* + \alpha i^*\varepsilon + \alpha i^*\beta + \varepsilon\beta - \alpha s^*\varepsilon)\lambda + (\mu^3 + \varepsilon\mu^2 + \mu\varepsilon\beta - \mu\alpha s^*\varepsilon + \alpha i^*\mu^2 + \alpha i^*\varepsilon\mu + \alpha i^*\varepsilon\beta + \alpha i^*\mu\beta + \mu^2\beta) = 0.$$

Dimisalkan  $Y_1$  dan  $Z_1$  menjadi koefisien dari  $\lambda^2$  dan  $\lambda$ . Sehingga,

$$Y_1 = 3\mu + \alpha i^* + \varepsilon + \beta,$$

$$Z_1 = 3\mu^2 + 2\mu\varepsilon + 2\mu\beta + 2\mu\alpha i^* + \alpha i^*\varepsilon + \alpha i^*\beta + \varepsilon\beta - \alpha s^*\varepsilon,$$

$$A_1 = \mu^3 + \varepsilon\mu^2 + \mu\varepsilon\beta - \mu\alpha s^*\varepsilon + \alpha i^*\mu^2 + \alpha i^*\varepsilon\mu + \alpha i^*\varepsilon\beta + \alpha i^*\mu\beta + \mu^2\beta.$$

Jadi, persamaan karakteristik menjadi  $\lambda^3 + Y_1\lambda^2 + Z_1\lambda + A_1$ .

Berdasarkan analisis kriteria stabilitas Routh-Hurwitz, jika  $Y_1 > 0, Z_1 > 0$  dan  $Y_1Z_1 - A_1 > 0$ , maka semua akar persamaan karakteristik memiliki bagian riil negatif. Oleh karena itu, titik kesetimbangan endemik atau *endemic equilibrium point* (EEP) stabil. ■

## 6) Simulasi Numerik

Simulasi numerik dilakukan menggunakan *software Matlab* R2015a dengan metode Runge-Kutta orde empat (RK4). Simulasi numerik dibagi menjadi tiga simulasi dengan menggunakan nilai-nilai parameter dan populasi awal. Dimisalkan kematian alami adalah 232 kematian per 1000 individu, kelahiran adalah 700 per 1000 individu, masa infeksi rata-rata dan rata-rata periode terpapar adalah 3 minggu.

Variabel dan parameter yang digunakan disajikan pada Tabel 1. dan Tabel 2. sebagai berikut :

Tabel 1. Variabel yang Digunakan

Variabel	Penjelasan
$s$	Proporsi populasi yang rentan terkena penyakit tuberkulosis
$e$	Proporsi populasi yang terkena penyakit tuberkulosis
$i$	Proporsi populasi yang terinfeksi penyakit tuberkulosis
$r$	Proporsi populasi yang pulih dari penyakit tuberkulosis
$S$	Populasi yang rentan terkena penyakit tuberkulosis
$E$	Populasi yang terkena penyakit tuberkulosis
$I$	Populasi yang terinfeksi penyakit tuberkulosis
$R$	Populasi yang pulih dari penyakit tuberkulosis

Tabel 2. Parameter yang Digunakan

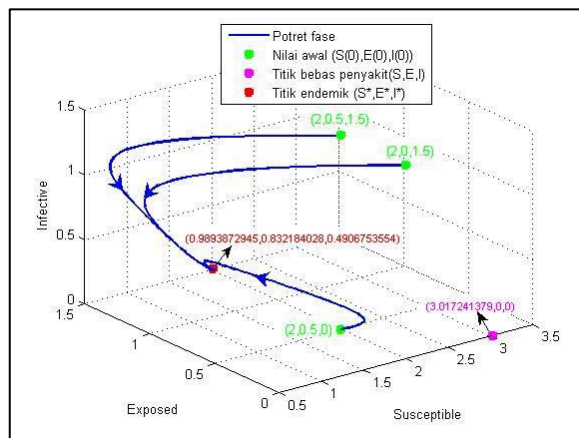
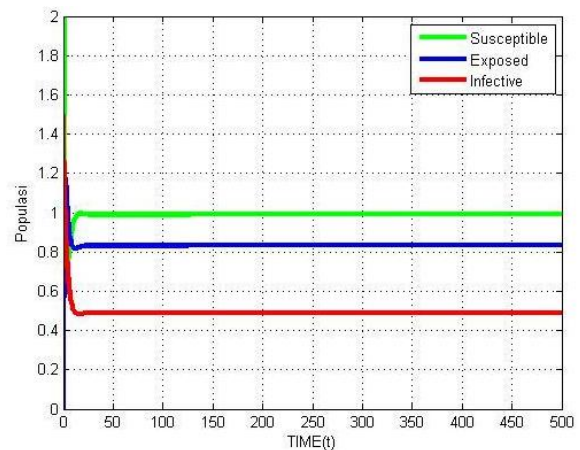
Parameter	Penjelasan	Formula	Nilai	Keterangan
$\gamma$	Laju kelahiran	$\frac{\text{Total Kelahiran}}{\text{Total Populasi}}$	0.7	-
$\mu$	Laju kematian	$\frac{\text{Total Kematian}}{\text{Total Populasi}}$	0.232	-
$\alpha$	Laju infeksi	$\frac{\text{Effective Contact}}{\text{Total Contact}}$	$\alpha_1 = 0.96909$	$\alpha_1$ digunakan untuk simulasi $R_0 > 1$ ,
			$\alpha_2 = 0.29085$	$\alpha_2$ digunakan untuk simulasi $R_0 < 1$ ,
			$\alpha_3 = 0.95892$	$\alpha_3$ digunakan untuk simulasi $R_0 = 1$
$\varepsilon$	Laju seseorang berpindah dari kelas <i>exposed</i> ke kelas <i>infectious</i>	$\frac{1}{\text{Masa Infeksi Rata - rata}}$	0.34	-
$\beta$	Laju pemulihan individu yang terinfeksi	$\frac{1}{\text{Rata - rata Periode Terpapar}}$	0.34	-

a. Simulasi numerik untuk  $R_0 > 1$ 

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter  $\alpha_1 = 0.96909$ , dan nilai parameter yang lain seperti yang tercantum dalam Tabel 2. Model disimulasikan saat nilai awal atau populasi awal  $(S(0), E(0), I(0)) = (2, 0.5, 1.5), (2, 0, 1.5), (2, 0.5, 0)$  sehingga diperoleh

$$R_0 = \frac{\varepsilon \alpha_1}{(\beta + \mu)(\varepsilon + \mu)} = \frac{(0.34)(0.96909)}{(0.34 + 0.232)(0.34 + 0.232)} = 1.010726543 > 1.$$

Serta titik-titik kesetimbangan, yaitu  $E_0(S^0, E^0, I^0) = (3.017241379, 0, 0)$  dan  $E^*(S^*, E^*, I^*) = (0.9893872945, 0.832184028, 0.4906753554)$ . Berdasarkan titik kesetimbangan tersebut terlihat bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik eksis. Hasil simulasi numeriknya ditunjukkan pada potret fase di Gambar 3.

Gambar 3. Potret Fase untuk  $R_0 > 1$  dengan  $\alpha_1$ 

Gambar 4. Populasi Terhadap Waktu dengan Nilai Awal (2,0,1.5)

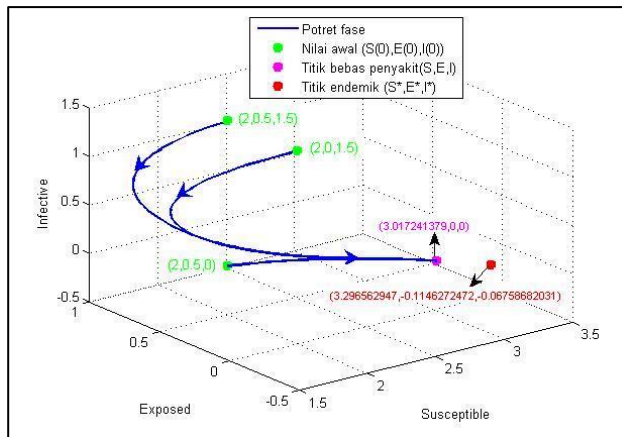
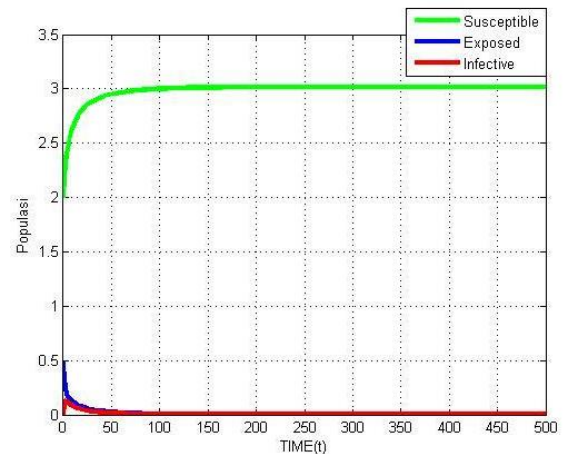
Berdasarkan Gambar 3. dan Gambar 4. dapat diketahui bahwa dengan tiga nilai awal yang berbeda, populasi dalam jangka panjang akan stabil di titik kesetimbangan endemik. Berdasarkan Teorema 4, titik kesetimbangan endemik stabil secara asimtotik jika  $R_0 > 1$ . Hal tersebut sesuai dengan perhitungan analitik yang menunjukkan jika  $R_0 > 1$  maka titik kesetimbangan endemik bersifat stabil. Serta, berdasarkan perhitungan analisis kriteria stabilitas Routh-Hurwitz diperoleh nilai  $Y_1 = 1.838175247 > 0$ ,  $Z_1 = 0.7999563681 > 0$  dan  $Y_1 Z_1 - A_1 = 1.318486607 > 0$  dan semua akar persamaan karakteristik memiliki bagian riil negatif. Sehingga, titik kesetimbangan endemik stabil.

b. Simulasi numerik untuk  $R_0 < 1$ 

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter  $\alpha_2 = 0.29085$ , dan nilai parameter yang lain seperti yang tercantum dalam Tabel 2. Model disimulasikan saat nilai awal atau populasi awal  $(S(0), E(0), I(0)) = (2, 0.5, 1.5), (2, 0, 1.5), (2, 0.5, 0)$  sehingga diperoleh

$$R_0 = \frac{\varepsilon \alpha_2}{(\beta + \mu)(\varepsilon + \mu)} = \frac{(0.34)(0.29085)}{(0.34 + 0.232)(0.34 + 0.232)} = 0.3033462476 < 1.$$

Serta titik-titik kesetimbangan, yaitu  $E_0(S^0, E^0, I^0) = (3.017241379, 0, 0)$  dan  $E^*(S^*, E^*, I^*) = (3.296562947, -0.1146272472, -0.06758682031)$ . Berdasarkan titik kesetimbangan tersebut, terlihat bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit eksis dan titik kesetimbangan endemik tidak eksis. Hasil simulasi numeriknya ditampilkan pada potret fase di Gambar 5.

Gambar 5. Potret Fase untuk  $R_0 < 1$  dengan  $\alpha_2$ 

Gambar 6. Populasi Terhadap Waktu dengan Nilai Awal (2,0,5,0)

Berdasarkan Gambar 5. dan Gambar 6. karena laju infeksi diperkecil, maka populasi *exposed* terus mengalami penurunan, sehingga populasinya akan habis. Penurunan populasi *exposed* diikuti juga dengan penurunan populasi *infectious*, sehingga populasi *infected* juga akan habis, akibatnya dalam jangka panjang hanya terdapat populasi *susceptible* yang hidup dan stabil di titik kesetimbangan bebas penyakit yang eksis dan bersifat stabil, sedangkan titik kesetimbangan endemik tidak eksis. Berdasarkan Teorema 3, titik kesetimbangan bebas penyakit stabil secara asimtotik jika  $R_0 < 1$ . Hal tersebut sesuai dengan perhitungan analitik yang menunjukkan jika  $R_0 < 1$  maka titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil. Serta, berdasarkan perhitungan analisis kriteria stabilitas Routh-Hurwitz, diperoleh nilai  $Y = 1.362666666 > 0$ ,  $Z = 0.4849664444 > 0$  dan  $YZ - A = 0.6091923954 > 0$  dan semua akar persamaan karakteristik memiliki bagian riil negatif. Sehingga, titik kesetimbangan bebas penyakit stabil.

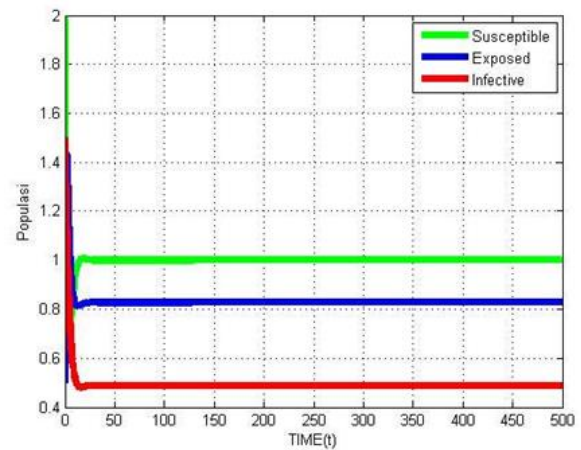
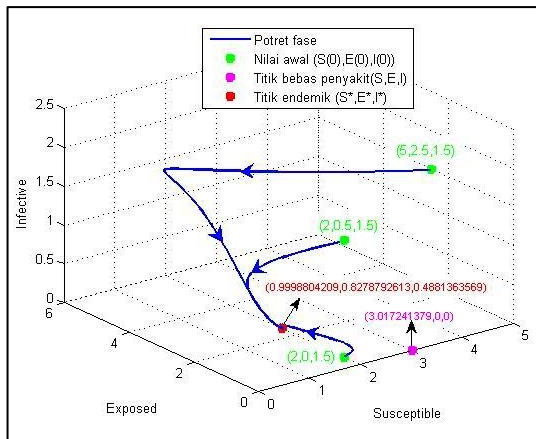
### c Simulasi numerik untuk $R_0 = 1$

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter  $\alpha_3 = 0.95892$ , dan nilai parameter yang lain seperti yang tercantum dalam Tabel 2. Model disimulasikan saat nilai awal  $(S(0), E(0), I(0)) = (2, 0.5, 1.5), (2, 0.5, 0), (5, 2.5, 1.5)$  sehingga diperoleh

$$R_0 = \frac{\varepsilon \alpha_3}{(\beta + \mu)(\varepsilon + \mu)} = \frac{(0.34)(0.95892)}{(0.34 + 0.232)(0.34 + 0.232)} = 1$$

Serta titik-titik kesetimbangan, yaitu  $E_0(S^0, E^0, I^0) = (3.017241379, 0, 0)$  dan  $E_*(S^*, E^*, I^*) = (0.9998804209, 0.8278792613, 0.4881363569)$ . Berdasarkan titik kesetimbangan tersebut, terlihat bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit eksis dan titik kesetimbangan endemik juga eksis. Hasil simulasi numeriknya juga ditunjukkan pada potret fase di Gambar 7.





Gambar 7. Potret Fase untuk  $R_0 = 1$  dengan  $\alpha_3$  Gambar 8. Populasi Terhadap Waktu dengan Nilai Awal (2,0.5,1.5)

Berdasarkan Gambar 5. dan Gambar 6. dapat diketahui bahwa populasi akan stabil di titik kesetimbangan endemik. Berdasarkan teori Bilangan Reproduksi Dasar menurut Giesecke (2002) saat  $R_0 = 1$  maka penyakit akan menetap atau endemik. Hal tersebut sesuai dengan perhitungan analitik yang menunjukkan jika  $R_0 = 1$ . Serta, berdasarkan perhitungan analisis kriteria stabilitas Routh-Hurwitz untuk titik kesetimbangan endemik diperoleh nilai  $Y_1 = 1.830750382 > 0$ ,  $Z_1 = 0.7915613210 > 0$  dan  $Y_1 Z_1 - A_1 = 1.299550803 > 0$  dan semua akar persamaan karakteristik memiliki bagian riil negatif sedangkan untuk titik kesetimbangan bebas penyakit terdapat akar persamaan karakteristik positif, Sehingga, hanya titik kesetimbangan endemik yang stabil.

## PENUTUP

Model SEI pada penyakit tuberkulosis berupa sistem *autonomous* nonlinier dengan tiga persamaan dan lima parameter. Titik kesetimbangan model SEI pada penyakit tuberkulosis terdiri dari dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Berdasarkan analisis pada titik kesetimbangan, jika  $R_0 > 1$  terdapat dua titik kesetimbangan eksis, sedangkan jika  $R_0 < 1$  hanya titik kesetimbangan bebas penyakit yang eksis, dan jika  $R_0 = 1$  terdapat dua titik kesetimbangan eksis. Berdasarkan hasil simulasi numerik, jika  $R_0 > 1$ , maka titik kesetimbangan endemik stabil, sedangkan jika  $R_0 < 1$ , maka titik kesetimbangan bebas penyakit stabil, dan jika  $R_0 = 1$ , maka titik kesetimbangan endemik stabil. Simulasi numerik yang dilakukan menunjukkan hasil yang sesuai dengan hasil analisis.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Kemenkes RI. (2018). Situasi TBC di Indonesia. Retrieved from <https://tbindonesia.or.id/informasi/tentang-tbc/situasi-tbc-di-indonesia-2/>
- [2] Kemenkes RI. (2020, March 24). Pasien TBC Harus Lebih Waspada Corona. Retrieved from [https://www.kemkes.go.id/article/view/20032500003/\\_pasien-tbc-harus-lebih-waspada-corona.html](https://www.kemkes.go.id/article/view/20032500003/_pasien-tbc-harus-lebih-waspada-corona.html)
- [3] Maesaroh, U. dan Sugiyanto. (2013). Model Matematika Untuk Kontrol Campak Menggunakan Vaksinasi. *Jurnal Fourier*. 2(2),81-89.
- [4] Roni, T.P. (2011). *Kestabilan Lokal Bebas Penyakit Model Epidemi SEIR dengan kumpulan Infeksi pada Periode Laten*. Padang: Politeknik Negeri Padang.

- [5] Mettle, F.O., Affi, P.O., & Twumasi, C. (2020). Modelling the Transmission Dynamics of Tuberculosis in the Ashanti Region of Ghana. *Hindawi*. 1-16.
- [6] Inayah, N., Manaqib, M., Fitriyati, N., Yupinto. I. (2020). Model Matematika Penyebaran Penyakit Pulmonary Tuberculosis dengan Penggunaan Masker Medis. Barekeng: *Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*. 14(3), 461-472.
- [7] Parker, D and Pianykh, O. (2021). Mobility-Guided Estimation Of Covid-19 Transmission Rates. *American Journal of Epidemiology*. doi: <https://doi.org/10.1093/aje/kwab001>
- [8] Oliy, I.R., Sigar, T., Mulyana., & Djafar, A.M.A. (2020). Model Epidemik SEIR-SEI penyebaran Penyakit Malaria dengan Peluang Kegagalan pada Vaksinasi. *SANDIMATIKA 2020*.
- [9] Boyce, W.E. and DiPrima, R.C. (2009). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. United State of America : Ninth Ed., John Willey & Sons, Inc.
- [10] Olsder, G. J dan J.W. Van Der Woude. (2004). *Mathematical Systems Theory Intermediatethird edition*. The Netherlands: VSSD.
- [11] Giesecke, J. (2002). *Modern Infectious Disease Epidemiology. Second Edition*. Florida: CRC Press.
- [12] Tamrin, H dan Riyanto, M.Z. (2007). *Model SIR Penyakit Tidak Fatal*. Yogyakarta: Jurusan Matematika FMIPA UGM.
- [13] Blyuss, K.B. and Kyrychko, Y.N. (2005). On A Basic Model Of A Two-Disease Epidemic. *Elsevier applied Mathematics and computation*. 160, 177-187.
- [14] Murray, J. D. (2002). *Mathematical Biology: I. An Introduction*. Third Ed., Springer-Verlag. New York Berlin Heidelberg.
- [15] Liu, X. and Y. Takeuchi. (2006). Spread of Disease with Transport Related Infection and Entry Screening. *Journal of Theoretical Biology*. 242, 517-528.

## Simulasi Antrean Pelayanan Nasabah pada Bank Rakyat Indonesia (BRI) Unit Timbau Tenggara menggunakan Aplikasi Promodel

Vika Novitasari<sup>1\*</sup>, Syaripuddin<sup>1</sup>, Fidia Deny Tisna Amijaya<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratorium Matematika Komputasi Program Studi Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Mulawarman

Dikirim: Mei 2022;

Diterima: Mei 2022;

Dipublikasi: September 2022

Alamat Email Korespondensi: [vikanovitasari00@gmail.com](mailto:vikanovitasari00@gmail.com)

### Abstrak

Teori antrean adalah teori model yang menyangkut studi matematis dari antrean-antrean atau baris-baris penunggu. Fenomena antrean yang dibahas pada penelitian ini adalah, laju kedatangan, laju pelayanan, ukuran kinerja sistem dan rancangan sistem antrean pelayanan nasabah BRI dengan sistem antrean jalur berganda (M/M/s). Hasil analisis menunjukkan bahwa laju pelayanan nasabah BRI yaitu 75 nasabah per tiga jam dengan laju pelayanan yaitu 32 orang perjam. Penghitungan ukuran kinerja efisien untuk kualitas pelayanan nasabah BRI dengan satu jalur antrean yang diterapkan sudah efisien dan dapat dipertahankan karena kinerja sistem antrean diperoleh Probabilitas adanya 0 nasabah dalam sistem ( $P_0$ ) sebesar 0.000005, permintaan rata-rata nasabah dalam sistem ( $L_s$ ) sebesar 2,070, jumlah rata-rata nasabah dalam antrean ( $L_q$ ) yaitu sebanyak 0,09 orang, waktu tunggu rata-rata dalam sistem ( $W_s$ ) yaitu selama 0,075 jam per orang, dan waktu tunggu rata-rata dalam antrean ( $W_q$ ) yaitu selama 2,054 jam per orang, dan didapat peluang sibuk *teller* ( $p$ ) sebesar 98%. Hasil simulasi antrean menggunakan *software* Promodel diperoleh bahwa antrean dengan menggunakan 2 *teller* masih kurang baik dikarenakan nasabah yang mengantri masih terlalu panjang dan tingkat kesibukan *teller* masih terlalu tinggi, kemudian dibuat simulasi menggunakan 3 *teller* dan 4 *teller* diperoleh hasil jumlah *teller* yang cukup baik untuk melayani nasabah pada bank tersebut adalah dengan menggunakan 3 *teller*.

### Kata Kunci:

*Antrean, teori antrean, simulasi ProModel, teller, sistem antrean jalur berganda (M/M/s).*

### PENDAHULUAN

Antrean dapat membantu pihak pengelola dalam melayani masyarakat untuk menciptakan sistem antrean yang tepat. Salah satunya menentukan jumlah masyarakat pengguna jasa yang datang, memperkirakan waktu sibuk dan menentukan jumlah loket pelayanan yang dibuka dengan tepat. Proses antrean (*queueing process*) berhubungan dengan kedatangan seorang pelanggan pada suatu fasilitas pelayanan, kemudian menunggu dalam suatu baris antrean jika semua pelayannya sibuk, dan akhirnya meninggalkan fasilitas tersebut. Sifat dari fasilitas pelayanan, berfokus pada tiga hal, yaitu tatanan fisik sistem antrean, disiplin antrean, dan distribusi probabilitas yang sesuai atas waktu pelayanan dan dapat menentukan struktur model antrean yang digunakan [1].

Proses antrean memiliki beberapa model antrean yaitu *Single Channel Single Phase*, *Multi Channel Single Phase*, *Single Channel Multi Phase* dan *Multi Channels Multi Phase*. Model antrean *Multi Channel Single Phase* adalah model antrean yang terjadi kapan saja dimana ada dua atau lebih fasilitas pelayanan dialiri oleh antrean tunggal [2].

Semakin berkembangnya zaman, teknologi bukanlah hal asing bagi semua orang sehingga memungkinkan masalah antrean dapat disimulasikan dengan menggunakan aplikasi seperti Promodel. Promodel adalah sebuah aplikasi yang berfungsi untuk menyimulasikan atau memodelkan berbagai jenis sistem manufaktur dan pelayanan. Sistem manufaktur tersebut seperti *job shop*, *converors*, perakitan, sistem *just-in-time*, sistem manufaktur yang fleksibel, dan itu semua bisa dimodelkan oleh Promodel.

Pada penelitian ini membahas tentang antrean yang terjadi pada Bank Rakyat Indonesia (BRI) Kantor Unit Timbau Tenggara, berdasarkan pengamatan yang dilakukan, *Teller* yang dimiliki oleh Bank BRI Unit Timbau Tenggara sebanyak 2 orang *Teller* sehingga untuk meminimalkan sistem antrean digunakan perhitungan dengan teori antrean.

## LANDASAN TEORI

### 1. Karakteristik Antrean

Karakteristik antrean yang selanjutnya berkaitan dengan aturan antrean (disiplin antrean). Aturan antrean mengacu pada aturan urutan pelanggan dalam barisan yang akan menerima pelayanan. Sebagian besar sistem menggunakan aturan antrean yang disebut aturan *first in first out* (FIFO) [3].

### 2. Karakteristik Kedatangan

Distribusi kedatangan diasumsikan dengan kecepatan rata-rata yang konstan dan bebas satu sama lain, maka kejadian tersebut sesuai dengan distribusi probabilitas Poisson. Dalam hal ini probabilitas dari  $n$  kedatangan pada periode ke- $T$  didefinisikan pada Persamaan 1 [4]

$$P(n, T) = \frac{e^{-\lambda T} (\lambda T)^n}{n!} \{ n = 0, 1, 2, \dots, n \} \quad (1)$$

Metode kedua untuk menspesifikasikan kedatangan adalah waktu antar kedatangan. Pada hal ini ditentukan distribusi probabilitas dari suatu variable acak kontinu yang mengukur waktu dari satu kedatangan berikutnya. Jika kedatangan mengikuti distribusi Poisson, dapat ditunjukkan secara matematis bahwa waktu antar kedatangan akan terdistribusi sesuai dengan distribusi eksponensial dapat dilihat pada persamaan 2

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, 0 \leq t < \infty \quad (2)$$

Pola kedatangan dianggap sebagai kedatangan yang tidak terikat satu sama lain dan kedatangan tersebut tidak dapat diramalkan secara tepat (acak). Permasalahan antrean yang sering terjadi adalah banyaknya kedatangan pada setiap unit berdasarkan waktu yang telah diperkirakan berdasarkan distribusi probabilitas yang dikenal dengan distribusi Poisson (*poisson distribution*). Rumus distribusi Poisson dapat dilihat pada Persamaan 3

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda} (\lambda)^x}{x!}, \text{ untuk } x = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, n \quad (3)$$

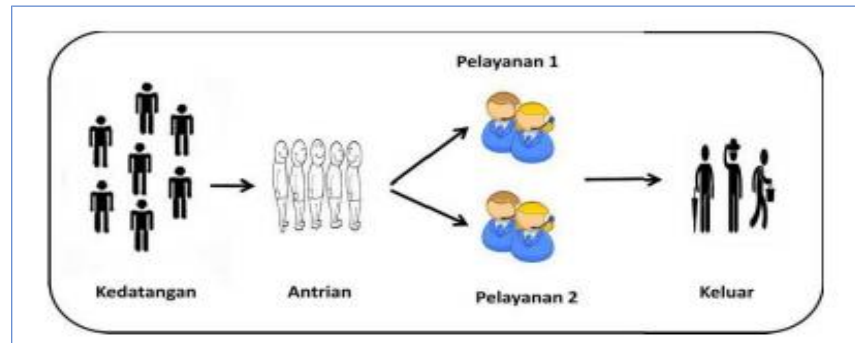
### 3. Karakteristik Pelayanan

Pelayanan atau mekanisme pelayanan dapat terdiri dari satu atau lebih pelayanan atau satu atau lebih fasilitas pelayanan. Tiap-tiap fasilitas pelayanan disebut sebagai

saluran (*channel*). Dalam mekanisme pelayanan, ada tiga aspek yang diperhatikan, yaitu tersedianya pelayanan dan kapasitas pelayanan [5].

#### 4. Lama Pelayanan

Sistem *multi Channel-Single Phase* terjadi apabila terdapat dua atau lebih fasilitas pelayanan dialiri oleh antrean tunggal. Contoh model ini adalah antrean pada sebuah bank dengan beberapa *teller*. Model struktur antrean *multi channel-single phase* dapat dilihat pada Gambar 4.



Gambar 1. Model Struktur Antrean *Multi Channel- Single Phase*

#### 5. Pola Kedatangan dan Kepergian

Pola kedatangan pelanggan dapat dilihat dari waktu antar kedatangan dua pelanggan yang berurutan (*interarrival time*). Rumus untuk menghitung rata-rata kedatangan sebagai berikut [6]:

$$\lambda = \frac{N}{I} \quad (4)$$

Pola kepergian adalah pola pembentukan antrean akibat kepergian pelanggan selama periode waktu tertentu. Pola kepergian biasanya dicirikan oleh waktu pelayanan, yaitu waktu yang dibutuhkan oleh seorang pelayan untuk melayani seorang pelanggan. Waktu pelayanan dapat bersifat deterministik atau berupa suatu variabel acak dengan distribusi peluang tertentu. Rumus untuk menghitung laju waktu pelayanan sebagai berikut[2].

$$\mu = \frac{\text{Jumlah Pengunjung}}{\text{Jam Pengamatan}} \quad (5)$$

#### 6. Model Antrean Jalur Berganda (M/M/s)

Pelayanan dilakukan secara *first-come-first-served* dan semua stasiun pelayanan diasumsikan memiliki tingkat pelayanan yang sama. Asumsi lain yang terdapat model jalur tunggal yang berlaku, walaupun demikian persamaan ini digunakan dengan cara yang sama dan menghasilkan jenis informasi yang sama seperti model yang lebih sederhana. Ada beberapa rumus yang dapat dikembangkan dari model antrean jalur berganda adalah sebagai berikut[10]:

a) Probabilitas terdapat 0 nasabah dalam sistem (tidak adanya pelanggan dalam sistem).

$$P_0 = \frac{1}{\left[ \sum_{n=0}^{M-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right] + \frac{1}{M!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M \frac{M\mu}{M\mu - \lambda}} \quad (6)$$

b) Jumlah permintaan rata-rata dalam sistem

$$L_s = \frac{\lambda \mu \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M}{(M-1)!(M\mu - \lambda)^2} P_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \quad (7)$$

c) Waktu rata-rata yang dihabiskan oleh seorang pelanggan dalam antrean atau sedang dilayani dalam sistem

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} \quad (8)$$

d) Jumlah orang atau unit rata-rata yang menunggu dalam antrean.

$$L_q = L_s - \frac{\lambda}{\mu} \quad (9)$$

e) Waktu rata-rata yang dihabiskan oleh seorang pelanggan atau unit untuk menunggu dalam antrean.

$$W_q = W_s - \frac{\lambda}{\mu} \quad (10)$$

f) Faktor utilitas sistem

$$P = \frac{\lambda}{M\mu} \quad (11)$$

## 7. Uji Kecocokan Distribusi

Uji kecocokan distribusi yang digunakan adalah uji Kolmogorov-Smirnov. Uji keselarasan (*goodness of fit*) merupakan uji kecocokan distribusi yang bermanfaat untuk mengevaluasi sampai seberapa jauh suatu model mampu mendekati situasi nyata yang digambarkannya, dalam hal ini adalah distribusi yang sesuai. Adapun prosedur pengujian *Kolmogorov-Smirnov* adalah sebagai berikut: [8].

- a. Menentukan Hipotesis
- b. Taraf nyata
- c. Kaidah Pengujian
- d. Menghitung  $D_{hitung}$
- e. Membandingkan  $D_{tabel}$  dan  $D_{hitung}$ ,
- f. Membuat keputusan

## 8. Promodel

Promodel merupakan salah satu *software* simulasi yang dapat berjalan di atas *platform windows* untuk disimulasikan dan menganalisis sistem produksi dari seluruh tipe sistem dan ukuran. Promodel menyediakan kombinasi yang sempurna dari kemudahan, fleksibilitas dan kemampuan untuk memodelkan semua situasi dan dengan kemampuan animasi yang hidup membuat simulasi semakin nyata [7].

## METODOLOGI / METHODS

Pada penelitian membahas tentang penyelesaian masalah antrean nasabah Bank BRI Unit Timbau Tenggara. Penyelesaian masalah antrean nasabah menggunakan aplikasi ProModel. Teknik sampling yang digunakan dalam penelitian ini adalah teknik sampling *purposive* sampling [9].

### Teknik Analisis

Adapun Teknik analisis data yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan data yang akan digunakan yaitu data kedatangan nasabah di bank BRI Unit Timbau Tenggarong di Jalan. K.H. Ahmad Muksin No.RT 1, Timbau, Kec. Tenggarong, Kabupaten Kutai Kartanegara, Kalimantan Timur 75513
2. Menentukan karakteristik sisten antrian yang ada di Bank BRI Unit Timbau tenggarong. Di Bank BRI Unit Timbau Tenggarong Karakteristik antrianya yang digunakan adalah *First In First Out* (FIFO) Artinya lebih duluan datangan, yang lebih dulu dilayani.
3. Menentun proses antrean pada Bank BRI Unit Timbau Tenggarong. Pelayanan yang ada di Bank BRI Unit Timbau Tenggarong adalah Multi Channel-Single Phase artinya terdapat dua atau lebih fasilitas pelayanan yang dialiri oleh antrean tunggal.
4. Menghitung nilai kepergian dan kedatangan nasabah menggunakan Rumus persamaan (2.4) dan persamaan (2.5)

$$\lambda = \frac{\text{Total Kedatangan}}{\text{Total Pelayanan}}$$

$$\mu = \frac{\text{Jumlal orang dilayani}}{\text{Jumlah Lama waktu pelayanan}}$$

5. Menghitung nilai Model antrean jalur berganda (M/M/s). menghitung nilai probabilitas terdapat 0 nasabah dalam sistem antrean menggunakan persamaan (2.6), menghitung Ekspektasi dalam sistem antrean menggunakan prsamaan (2.7), menghitung ekspektasi panjang antrean menggunakan persamaan (2.8), menghitung ekspektasi waktu menunggu dalam sistem meggunkan persamaan (2,9), menghitung wkspektasi waktu menggu dalam antrean meggunkan persamaan (2.10), dana terakhir mnghitung peluang sibuk teller meggunkan persamaan (2.11)
6. Menghitung uji kecocokan distribusi
  - Membuat hipotesis dalam uraian kalimat.
  - Menentukan taraf nyata.
  - Kaidah pengujian.
  - Menghitung  $D_{hitung}$  menggunakan persamaan (2.20) sampe dengan persamaan (2.26).
  - Membandingkan  $D_{tabel}$  dan  $D_{hitung}$ .
  - Membuat keputusan.
7. Mebuat simulasi sistem antrean menggunakan aplikasi ProModel dengan 2 teller, dan menghitung dengan percobaan 3 teller dan juga 4 teller.

### HASIL DAN PEMBAHASAN

#### 1. Data Penelitian

Data yang digunakan adalah kedatangan nasabah dan waktu pelayanan nasabah meliputi jumlah kedatangan nasabah dan waktu pelayanan yang ada di *teller* dan nasabah yang dilayani oleh *teller* menggunakan model pelayanan *Multi-channel-single phase*. Hasil pengamatan kedatangan dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Waktu Kedatangan Nasabah

Frekuensi kedatangan jam	Hari						Jumlah	
	Senin	Selasa	Rabu	Kamis	Jumat	Senin		Selasa
08:30 - 09:00	24	31	28	21	24	32	31	191
09:00 - 10:00	21	28	25	29	17	21	29	170
10:00 - 11:00	17	19	21	23	15	19	20	134
11:00 - 11:30	13	16	12	11	8	11	16	87
Jumlah	75	94	86	84	64	83	96	582

## 2. Analisis Data

Adapun perhitungan kecepatan kedatangan nasabah dan kecepatan pelayanan nasabah di bank BRI Unit Timbau Tenggaraing sebagai berikut:

### a. Kecepatan Kedatangan Nasabah ( $\lambda$ )

$$(\lambda) = \frac{\text{Total Kedatangan}}{\text{Total Pelayanan}}$$

$$(\lambda) = \frac{582}{21}$$

$$= 27,71$$

Kecepatan kedatangan nasabah adalah 27,71 menit per nasabah

### b. Kecepatan Pelayanan ( $\mu$ )

$$(\mu) = \frac{\text{Jumlah orang dilayani}}{\text{jumlah lama waktu pelayanan}}$$

$$(\mu) = \frac{562}{2,495}$$

$$= \frac{582}{41,58}$$

$$= 14,00$$

Rata-rata pelayanan di Bank BRI Unit Timbau Tenggaraing adalah 14,00 menit per nasabah

## 3. Uji Kesesuaian Distribusi

Pengujian kesesuaian dilakukan dengan menggunakan uji *Goodness of fit* untuk mengetahui apakah jumlah kedatangan nasabah berdistribusi Poisson. Hipotesis tentang kedatangan nasabah di Bank BRI Unit Timbau Tenggaraing dalam penelitian ini sebagai berikut:

### 3.1 Uji Kolmogorov-Smirnov Terhadap kedatangan Nasabah

Hasil Pengujian kesesuaian Distribusi Poisson menggunakan Kolmogorov Simirnov, dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2. Hasil Perhitungan Uji Data Kedatangan Nasabah

No.	Pelayanan	(i - 1)n	i/n	Ti	z	C <sub>p</sub>	d <sub>1</sub>	d <sub>2</sub>	(t <sub>i</sub> - t) <sup>2</sup>
1.	75	0	0.143	64	-1.742	0.041	0.041	0.102	366.449
2.	94	0.143	0.286	75	-0.741	0.230	0.087	0.056	66.306
3.	86	0.286	0.429	83	-0.013	0.500	0.214	-0.071	0.020
4.	84	0.429	0.571	84	0.078	0.508	0.079	0.063	0.735
5.	64	0.571	0.714	86	0.260	0.591	0.020	0.123	8.163
6.	83	0.714	0.857	94	0.988	0.819	0.104	0.039	117.878
7.	96	0.857	1	96	1.170	0.867	0.009	0.133	165.306



Dari tabel Nilai kritis uji Klomogorov simirnov dengan tarif nyata  $\alpha = 0.05$  sehingga diperoleh  $D_{(\alpha, n-1)} = D_{(0.05, 7-1)} = 0.519$  maka  $D_{hitung} (0.2143) < D_{tabel} (0.519)$  maka  $H_0$  Diterima artinya kedatangan nasabah berdistribusi poisson.

### 3.2 Uji Kolmogorov-Smirnov Terhadap Pelayanan Nasabah

Hasil pengujian kesesuaian Distribusi Eksponensial menggunakan Kolmogorov-Smirnov dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3. Hasil Perhitungan Uji Data Pelayanan Nasabah

No.	Pelayanan	$(i-1)n$	$i/n$	$T_i$	$z$	$C_p$	$d_1$	$d_2$	$(t_i - t)^2$
1.	4.8	0	0.143	3.6	-1.786	0.038	0.038	-0.105	0.520
2.	4.1	0.143	0.286	4.1	-0.548	0.295	0.152	0.009	0.049
3.	4.5	0.286	0.429	4.25	-0.177	0.433	0.147	0.004	0.005
4.	4.25	0.429	0.571	4.3	-0.053	0.480	0.052	-0.091	0.0004
5.	4.3	0.571	0.714	4.5	0.442	0.67	0.099	-0.044	0.032
6.	4.7	0.714	0.857	4.7	0.937	0.824	0.110	-0.033	0.143
7.	3.6	0.857	1	4.8	1.184	0.881	0.024	-0.119	0.229
8.	4.8	0	0.143	3.6	-1.786	0.038	0.038	-0.105	0.520

Dari tabel Nilai kritis uji Kolmogorov-Smirnov dengan tarif nyata  $\alpha = 0.05$  sehingga diperoleh  $D_{(\alpha, n-1)} = D_{(0.05, 7-1)} = 0.519$  maka  $D_{hitung} (0,152) < D_{tabel} (0,519)$  maka  $H_0$  diterima artinya waktu pelayanan nasabah di Bank BRI Unit Timbau Tenggaraong berdistribusi Eksponensial.

#### 4. Analisis Hasil Penelitian (Menentukan Ukuran Kinerja Sistem Antrean)

Salah satu ukuran kinerja sistem antrean yang terjadi di Bank Rakyat Indonesia (BRI) Unit Timbau Tenggaraong Sebagai Berikut:

##### a. Probabilitas terdapat 0 nasabah dalam sistem

Probabilitas rata-rata antrean di dalam proses pelayanan nasabah dapat dicari menggunakan persamaan di bawah ini:

$$P_0 = \frac{1}{\left[ \sum_{n=0}^{M-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right] + \frac{1}{M!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M \frac{M\mu}{M\mu - \lambda}}$$

$$= \frac{1}{\left[ \sum_{n=0}^{2-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{27,71}{14,00}\right)^n \right] + \frac{1}{2!} \left(\frac{27,71}{14,00}\right)^2 \frac{2(14,00)}{2(14,00) - 27,71}}$$

$$= 0,000005$$

##### b. Ekspektasi dalam sistem ( $L_s$ )

Proses kedatangan nasabah dan lamanya pelayanan sampai akhirnya keluar dari fasilitas pelayanan BRI Unit Timbau dapat ditentukan berapa banyak rata-rata nasabah yang mengantri dalam sistem antrean dan dapat dicari menggunakan persamaa di bawah ini:

$$L_s = \frac{\lambda \mu \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M}{(M-1)! (M\mu - \lambda)^2} P_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$= \frac{(27,71)(14,00) \left(\frac{27,71}{14,00}\right)^2 (0,000005)}{(2-1)(2(14,00) - 27,71)^2} + \frac{27,71}{14,00}$$

$$= 2,070$$

Jadi rata-rata panjang antrean selama melayani nasabah di BRI Unit timbau Tenggaraong yaitu 0.075 Menit pernasabah yang datang.

d. Ekspektasi Waktu Menunggu dalam Sistem ( $L_q$ )

Proses kedatangan nasabah dan lama pelayanan sampai akhirnya keluar dari fasilitas pelayanan di BRI Unit Timbau Tenggara dapat dihitung menggunakan persamaan di bawah ini:

$$\begin{aligned} L_q &= L_s - \frac{\lambda}{\mu} \\ &= 2.070 + \frac{27,71}{14,00} \\ &= 0,09 \end{aligned}$$

Jadi rata-rata waktu menunggu seorang Nasabah BRI Unit Timbau dari proses kedatangan sampai selesai dilayani yaitu 0,09 detik per nasabah.

e. Ekspektasi Waktu Menunggu dalam Antrean ( $W_q$ )

Rata-rata waktu menunggu seorang nasabah yang akan dilayani oleh *teller* dapat dicari menggunakan persamaan di bawah ini:

$$\begin{aligned} W_q &= W_s - \frac{\lambda}{\mu} \\ &= 0,075 + \frac{27,71}{14,00} \\ &= 2,054 \end{aligned}$$

Jadi rata-rata waktu menunggu seorang nasabah di BRI Unit Timbau sebelum dilayani yaitu 2,054 menit pernasabah.

f. Peluang Sibuk ( $p$ )

Masa sibuk *teller* dalam melayani nasabah dapat dicari dengan menggunakan persamaan di bawah ini:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\lambda}{M\mu} \\ &= \frac{27,71}{2(14,00)} \\ &= 0,98 \\ &= 98\% \text{ Kesibukan } \textit{teller}. \end{aligned}$$

Jadi peluang kesibukan *teller* melayani nasabah yaitu 98 %, semakin banyak kedatangan nasabah ke Bank BRI Unit Timbau maka kesibukan *teller* melayani nasabah semakin meningkat.

Berdasarkan pembahasan di atas mempunyai arti tingkat kedatangan berdistribusi poisson, waktu pelayanan tidak berdistribusi eksponensial melainkan berdistribusi normal. Jumlah keseluruhan dalam sistem ganda, jumlah satuan pelayanan waktu adalah *first in first out*. Jumlah nasabah yang boleh masuk tidak dibatasi dalam sistem antrean dan ukuran populasi pada sumber masukkan yaitu tidak berhingga.

Tabel 4. Hasil Analisis Kinerja Sistem Antrean pada Bank

No.	Kinerja Sistem Antrean	Hasil Analisis
1.	Kecepatan Kedatangan ( $\lambda$ )	27,71 Menit per nasabah
2.	Kecepatan Pelayanan ( $\mu$ )	14,00 Menit per nasabah
3.	Probabilitas terdapat 0 nasabah ( $P_0$ )	0,000005 Menit per nasabah
4.	Ekspektasi dalam system ( $L_s$ )	2.070 Menit pernasabah
5.	Ekspektasi waktu menunggu dalam system ( $W_s$ )	0,075 Menit per nasabah
6.	Ekspektasi Banyaknya Antrean ( $L_q$ )	0,09 Menit per nasabah
7.	Ekspektasi waktu menunggu dalam antrean ( $W_q$ )	2,054 Menit per nsabah
8.	Peluang masa sibuk ( $\rho$ )	98% per Nasabah

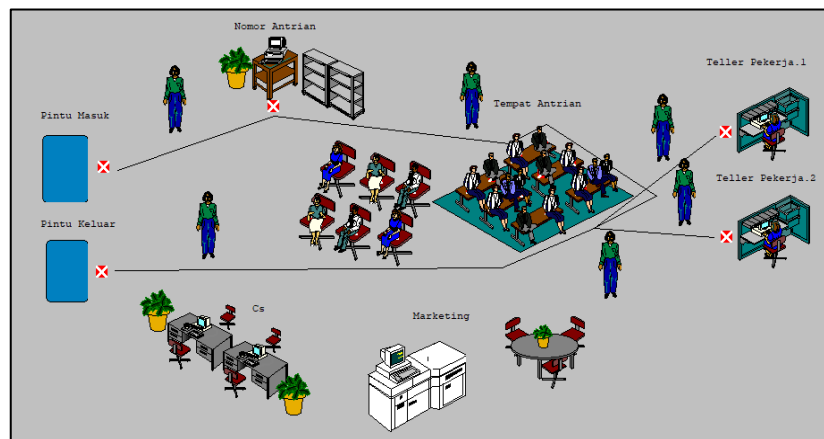
Berdasarkan Tabel 4 hasil analisis data pada waktu kedatangan nasabah di BRI Unit Timbau Tenggara dan waktu pelayanan didapatkan nilai yaitu ekspektasi kecepatan kedatanga ( $\lambda$ ) = 27,71 menit per nasabah, Ekspektasi kecepatan Pelayanan ( $\mu$ ) = 14,00 menit per nasabah, Probabilitas terdapat 0 nasabah ( $P_0$ ) = 0.000005 menit per nasabah, Ekspektasi dalam system ( $L_s$ ) = 2,070 menit per nasabah, ekspektasi waktu menunggu dalam sistem ( $W_s$ ) = 0,075 menit per nasabah, ekspektasi banyaknya antrian ( $L_q$ ) = 0,09 menit pernasabah, ekspektasi waktu menunggu dalam antrian ( $W_q$ ) = 2,054 menit per nasabah, Peluang masa sibuk ( $p$ ) = 98% kesibukan teller.

Berdasarkan hasil kinerja sistem antrian pada Bank Rakyat Indonesia (BRI) Unit Timbau Tenggara, teller terlalu sibuk melayani nasabah, kemudian waktu menunggu nasabah sedikit lebih lama harna seharusnya waktu menunggu nasabah adalah 2 menit pernasabah. Jadi kinerja sistem teller harus di perbaiki karena waktu menunggu antrian 10 sampai 60 menit pernasabah. Sehingga perlu di perbaiki dengan menambah kariawan pada fasilitas teller. Sehingga nasabah tidak harus menunggu terlalu lama lagi.

## 5. Simulasi Model Layanan

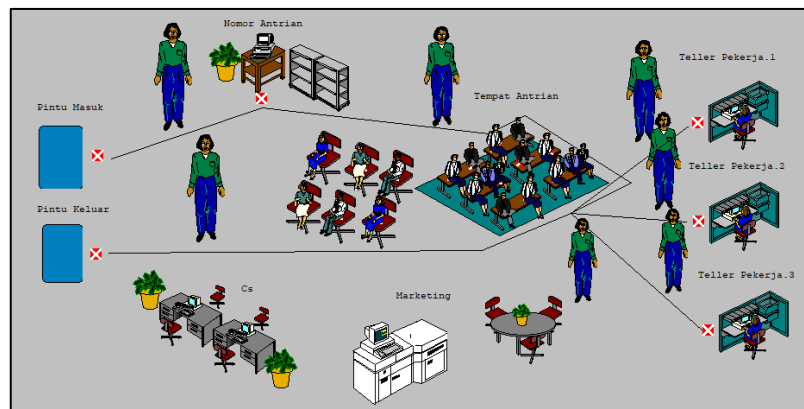
Diperoleh simulasi dengan software Promodel didapat hasil 2 Teller, 3 Teller dan 4 Teller Pada Bank Rakyat Indonesia (BRI) Unit Timbau Tenggara.

### 5.1 Analisis Model Simulasi dengan 2 Teller



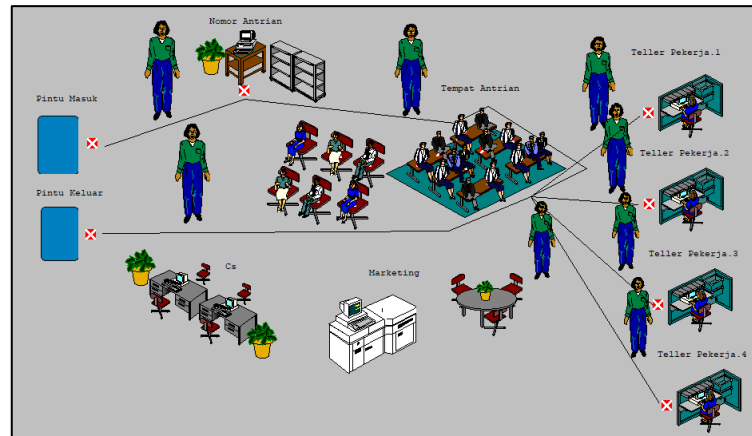
Gambar 2. Layout Model 2 Teller

### 5.2 Analisis Model Simulasi dengan 3 Teller



Gambar 3. Layout Model 3 Teller

### 5.3 Analisis Model Simulasi dengan 4 Teller



Gambar 4. Layout Model 4 Teller

## 6. Perbandingan Model Layanan

Setelah ketiga model simulasi telah dibuat kemudian di jalankan dan hasil simulasi dibandingkan. Hal ini dilakukan agar diketahui seberapa besar pengaruh kinerja terhadap sistem yang ada di bank BRI Unit Timbau Tenggara. Adapun rangkuman hasil analisis data simulasi setelah model dijalankan dapat dilihat pada Tabel 5.

Tabel 5. Perbandingan Model layanan

Keterangan	Teller 2	Teller 3	Teller 4
Waktu rata-rata di dalam sistem	33,45 Menit	6,68 Menit	5,41 Menit
Waktu rata-rata di dalam antrean	25,29 Menit	0,83 Menit	0,08 Menit
Utilitas	97,78%	67,92%	50,78%
Idle	2,22%	32,08%	49,22%

Berdasarkan Tabel 5 perbandingan model layanan dari hasil simulasi, waktu rata-rata berada di dalam sistem dengan menggunakan 2 teller adalah 33,45 dan waktu rata-rata nasabah berada di dalam antrean adalah 25,29 Menit dengan tingkat utilitas pelayanan sebesar 97,78 % dan sisanya adalah Idle sebesar 2,22%. Hal ini Belum bisa dikatakan cukup baik dikarenakan para nasabah harus menunggu di dalam antrean sekitar 25,29 Menit untuk melakukan transaksi dengan teller. Kemudian dibuat skenario simulasi antrean dengan menggunakan 3 teller dan 4 teller untuk mengurangi antrean yang terjadi di bank BRI Unit Timbau Tenggara.

Berdasarkan Tabel 5 dengan menambah 1 teller waktu rata-rata nasabah di dalam sistem adalah sebesar 6,68 Menit Jika dilihat dari waktu rata-rata di dalam antreanya sebesar 0,83 menit. Dan jika dilihat dari tingkat kegunaan 3 teller adalah sebesar 67,92%, dengan tingkat menganggur sebesar 32,08%, apabila dibandingkan dengan hasil simulasi dengan menambah 2 teller. Jika waktu rata-rata di dalam sistem sebesar 5,41 menit dan waktu rata-rata di dalam antrean sebesar 0,08 menit. Bagi nasabah mungkin sangat menguntungkan karena nasabah tidak harus menunggu terlalu lama di bank akan tetapi bagi pihak bank kemungkinan dapat membuat mereka rugi karena jika mereka menambah 2 teller lagi dari awal mulanya 2 teller tingkat utilitas atau beban kerja yang dikeluarkan oleh teller tersebut sebesar 50,78 % dan sisanya adalah Idle sebesar 49,22 %.

Berdasarkan Tabel 5 maka diperoleh hasil simulasi perbaikan sistem antrean yang paling optimal adalah simulasi dengan menambah 1 teller dengan awal mula 2 teller menjadi 3 teller. Pada simulasi ke 3 bagi nasabah mungkin sangat menguntungkan tapi bagi pihak bank akan sangat merugikan mereka. Akan tetapi jika dilihat pada simulasi

kedua rata-rata nasabah menunggu di dalam sistem sebesar 6,68 menit dan waktu rata-rata di dalam antreannya adalah sebesar 0,83 menit dengan tingkat utilitas teller sebesar 67,92% hal ini berarti bahwa bagi pihak bank maupun nasabah mungkin tidak terlalu merugikan mereka daripada menggunakan 2 teller maupun 4 teller yang dapat menguntungkan salah satu pihak saja baik itu nasabah maupun pihak bank.

## **PENUTUP**

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat ditarik kesimpulan yang terkait dengan simulasi antrean nasabah pada Bank BRI Unit Timbau Tenggara dengan aplikasi ProModel antara lain, laju kedatangan Nasabah yang melakukan transaksi ke teller di Bank BRI Unit Timbau Tenggara yaitu sebanyak 75 nasabah selama tiga jam pelayanan untuk dua *teller* dalam sistem antrean. Laju pelayanan yaitu sebanyak 32 nasabah per jam dengan menggunakan dua *teller* dalam sistem antrean. Waktu rata-rata nasabah di dalam sistem dengan menggunakan 2 *teller* adalah sebesar 33,45 menit dan waktu rata-rata nasabah di dalam antrean sebesar 25,29 menit dengan tingkat utilitas pelayanan teller 97,78% sisanya adalah *idle* sebesar 2,22% keadaan tersebut belum dapat dikatakan baik dikarenakan semakin tinggi tingkat utilitas yang ada pada *teller* maka jumlah antrean akan semakin bertambah.

## **DAFTAR PUSTAKA**

- [1] Hasan, I. (2011). Model Optimasi pelayanan Nasabah Berdasarkan Metode Antrean (Queuing System). *Jurnal Keuangan Dan Perbankan* 15, no.1, 151.
- [2] Anggoro, S.B. (2015). Sejarah Teori Peluang Dan statistika. *Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika* 6, no. 1, 14.
- [3] Heizer, J. dan Render, B. (2005). *Manajemen Operasi* Edisi Ketujuh. Jakarta: Salemba Empat.
- [4] Irjani, dan Mulya, A.A. (2012). Optimalisasi Kualitas Layanan Melalui Analisis Antrian Pada Pusat Pelayanan Mahasiswa Di Fakultas Tarbiyah IAIN Mataram. *Jurnal Beta* 5, no. 2, 128.
- [5] Schroeder. (1997). *Manajemen Operasi Pengambilan Keputusan dalam Fungsi Operasi Jilid II Edisi Ketiga*. Erlangga; Jakarta
- [6] Mulyono, S. (1996). *Riset Operasi*. Jakarta: Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia.
- [7] Riyanto, A. (2011). *Aplikasi Metodologi Penelitian kesehatan* (hal. 65-82). Yogyakarta: Nuha Medika.
- [8] Siagian, P. (1987). *Penelitian Operasional Teknik dan Praktek*. Jakarta: Penerbit UI Press.
- [9] Schroeder. (1997). *Manajemen Operasi Pengambilan Keputusan dalam Fungsi Operasi Jilid II Edisi Ketiga*. Erlangga; Jakarta
- [10] Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2014). *Introduction to Operations Research Seventh Edition*. New York: McGraw-Hill.

## Klasifikasi Penyakit Diabetes Melitus Menggunakan Algoritma *Naïve Bayes Classifier*

Latifah Uswatun Khasanah<sup>1,\*</sup>, Yuki Novia Nasution<sup>1</sup>, Fidia Deny Tisna Amijaya<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Laboratorium Matematika Komputasi Program Studi Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Mulawarman*

Dikirim: Mei 2022;

Diterima: Mei 2022;

Dipublikasi: September 2022

Alamat Email Korespondensi: [latifah.khasanah7@gmail.com](mailto:latifah.khasanah7@gmail.com)

### Abstrak

Klasifikasi merupakan sebuah teknik analisis data yang mengekstrak model untuk mendeskripsikannya ke dalam kelas tertentu. Salah satu algoritma yang dapat digunakan untuk klasifikasi adalah algoritma *Naïve Bayes Classifier*. Algoritma *Naïve Bayes Classifier* merupakan salah sebuah metode klasifikasi yang memprediksi peluang di masa depan berdasarkan pengalaman di masa sebelumnya dengan menggunakan Teorema Bayes. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui hasil klasifikasi pasien ke dalam dua kategori diagnosis diabetes melitus yaitu 'Ya' dan 'Tidak' menggunakan algoritma *Naïve Bayes Classifier* dan mengetahui tingkat akurasi dari empat proporsi data yaitu 60:40, 70:30, 80:20 dan 90:10. Sampel pada penelitian ini adalah data pasien di RS Dirgahayu Samarinda Tahun 2018 s/d 2021 sebanyak 130 data pasien. Berdasarkan hasil analisis, pada proporsi data *testing* 40% dan 30% masing-masing terdapat 4 pasien hasil klasifikasinya tidak tepat. Pada proporsi data *testing* 20% dan 10% masing-masing terdapat 2 data pasien hasil klasifikasinya tidak tepat. Adapun tingkat akurasi pada proporsi data *testing* 40%, 30%, 20% dan 10% secara berurutan adalah sebesar 92,31%; 89,74%; 92,31%; dan 84,62%. Berdasarkan tingkat akurasi yang telah diketahui, nilai akurasi terbaik adalah pada proporsi data *testing* 40% dan 20% dengan nilai akurasi sebesar 92,31%.

### Kata Kunci:

*Akurasi, diabetes melitus, klasifikasi, Naïve Bayes Classifier*

### PENDAHULUAN

Penyakit tidak menular (PTM) merupakan penyebab kematian yang tinggi di dunia. Kasus PTM paling banyak terjadi di negara yang berpenghasilan rendah. Pada tahun 2016 terdapat sekitar 36 juta jiwa atau sekitar 71% kematian yang disebabkan oleh PTM. Diabetes melitus merupakan salah satu bagian dari penyakit tidak menular (PTM) yang kasusnya cukup tinggi di Indonesia. Penyakit diabetes melitus adalah suatu penyakit metabolik dimana pankreas tidak cukup memproduksi insulin atau sel-sel dalam tubuh tidak dapat menggunakan insulin yang diproduksi dengan efektif [1].

*World Health Organization* (WHO) memprediksi kenaikan jumlah penderita diabetes di Indonesia dari 8,4 juta jiwa pada tahun 2000 menjadi sekitar 21,3 juta jiwa pada tahun 2030. Hasil Riset Kesehatan Dasar (Riskesdas) yang dilaksanakan pada tahun 2018 melakukan pengumpulan data penderita diabetes melitus pada penduduk berumur  $\geq 15$  tahun menunjukkan bahwa hasil prevalensi sebesar 2%.

Angka ini menunjukkan peningkatan prevalensi diabetes melitus pada tahun 2013 sebesar 1,5%. Peningkatan prevalensi diabetes melitus ditunjukkan oleh hampir semua provinsi di Indonesia. Empat provinsi dengan prevalensi tertinggi pada tahun 2013 dan 2018 yaitu DI Yogyakarta, DKI Jakarta, Sulawesi Utara dan Kalimantan Timur [2].

Pada zaman modern dimana pertukaran informasi dapat terjadi secara cepat menjadi salah satu penyebab meningkatnya jumlah data. Kecanggihan teknologi berperan penting dalam beberapa bidang salah satunya adalah bidang kesehatan. Pada bidang kesehatan dibutuhkan sistem atau alat yang dapat mendiagnosa atau memprediksi penyakit berdasarkan faktor-faktor pertimbangan tertentu. Dari sekian banyak data yang terkumpul di rumah sakit atau fasilitas layanan kesehatan lainnya dapat digunakan untuk memprediksi suatu penyakit menggunakan teknik data *mining*.

Data *mining* dapat diartikan sebagai proses penambangan data yang menghasilkan sebuah *output* (keluaran) berupa pengetahuan. Data *mining* terdiri dari gabungan beberapa bidang keilmuan seperti teknik pembelajaran mesin, *artificial intelligence*, statistika dan sistem basis data dan ilmu-ilmu lainnya. Terdapat beberapa pekerjaan yang berkaitan dengan data *mining*, antara lain analisis kluster, analisis asosiasi, deteksi anomali dan model prediksi. Model prediksi terdiri dari dua jenis, yaitu klasifikasi dan regresi [3].

Klasifikasi merupakan sebuah teknik analisis data yang mengekstrak model untuk mendeskripsikannya ke dalam kelas tertentu. Terdapat beberapa algoritma klasifikasi yang dapat digunakan, salah satunya adalah algoritma *Naïve Bayes Classifier*. *Naïve Bayes Classifier* merupakan salah satu algoritma klasifikasi yang menggunakan memprediksi peluang di masa depan berdasarkan pengalaman di masa sebelumnya, atau yang lebih dikenal dengan teorema Bayes [4].

Penelitian terkait algoritma *Naïve Bayes Classifier* telah dilakukan oleh beberapa peneliti sebelumnya. [5] melakukan penelitian mengenai aplikasi metode *Naïve Bayes* dalam prediksi risiko penyakit Jantung melakukan dua kali percobaan dengan menggunakan data *testing* sebanyak 25 data dan 50 data. [6] melakukan penelitian terkait penerapan algoritma *Naïve Bayes* untuk prediksi penerimaan siswa baru. Sementara itu [7] menerapkan metode *Naïve Bayes* dalam implementasi *text mining*.

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka penulis tertarik melakukan penelitian yaitu klasifikasi terhadap data pasien di RS Dirgahayu Samarinda dengan menggunakan Algoritma *Naïve Bayes Classifier*. Pada penelitian ini menggunakan sebanyak enam variabel yaitu usia, jenis kelamin, status merokok, kadar glukosa, tekanan darah, dan kelas.

## **METODE PENELITIAN**

Penelitian ini termasuk ke dalam penelitian kuantitatif dengan populasi yang digunakan adalah seluruh pasien di RS Dirgahayu Samarinda. Adapun sampel yang digunakan adalah pasien di RS Dirgahayu Samarinda bulan September Tahun 2018 s/d 2021. Pada penelitian ini tahapan analisis data yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Pembersihan data

Pembersihan data merupakan proses persiapan data dengan cara memeriksa apakah terdapat *missing value* atau data yang tidak konsisten.

## 2. Randomisasi data

Randomisasi data merupakan proses pengacakan data agar diperoleh sampel representatif yang mewakili populasi.

## 3. Analisis deskriptif

Analisis deskriptif adalah salah satu teknik analisis data kuantitatif yang digunakan untuk menganalisis data dengan cara mendeskripsikan data yang telah terkumpul.

4. Klasifikasi *Naïve Bayes*

Penelitian ini menggunakan penerapan algoritma *Naïve Bayes* dengan langkah-langkah sebagai berikut:

- Membaca data *training*. Penelitian ini menggunakan empat proporsi data *training* dan data *testing* yaitu 60:40, 70:30, 80:20 dan 90:10.
- Menghitung nilai *prior* data *training*.
- Menghitung nilai probabilitas setiap variabel terhadap setiap kelasnya dengan menggunakan rumus probabilitas bersyarat sebagai berikut

$$P(H|X) = \frac{P(X \cap H)}{P(X)} \quad (1)$$

dengan:

$P(H|X)$  = probabilitas terjadinya  $H$  dengan syarat  $X$  telah terjadi

$P(X \cap H)$  = probabilitas awal  $H$  dengan petunjuk  $X$  telah terjadi secara simultan

$P(X)$  = probabilitas terjadinya  $X$

- Menghitung nilai akumulasi probabilitas dari setiap kelas menggunakan persamaan berikut

$$P(C_i|X) = \prod_{k=1}^n P(x_k|C_i) = P(x_1|C_i) \times P(x_2|C_i) \times \dots \times P(x_n|C_i) \quad (2)$$

- Menghitung perkalian probabilitas *prior* dengan nilai akumulasi probabilitas variabel bebas dari masing-masing kelas.
- Menentukan hasil klasifikasi obyek berdasarkan nilai paling maksimum dari kedua kelas.

## 5. Evaluasi model klasifikasi

Evaluasi model klasifikasi bertujuan untuk mengetahui tingkat akurasi model klasifikasi yang telah dibuat dengan rumus

$$Accuracy = \frac{TP + TN}{P + N} \quad (3)$$

dengan keterangan sebagai berikut

- 1)  $TP$  atau *True Positives* adalah jumlah *tuple* positif yang dilabeli dengan benar oleh *classifier*. *Tuple* positif adalah *tuple* aktual yang berlabel positif, seperti *tuple* dengan label Bonus = 'Ya'.
- 2)  $TN$  atau *True Negatives* adalah jumlah *tuple* negatif yang dilabeli dengan benar oleh *classifier*. *Tuple* negatif adalah *tuple* aktual yang berlabel negatif, seperti *tuple* dengan label Bonus = 'Tidak'.
- 3)  $FP$  atau *False Positives* adalah jumlah *tuple* negatif yang salah dilabeli oleh *classifier*. Misalnya, sebuah *tuple* pelanggan yang berlabel Bonus = 'Tidak' akan tetapi oleh *classifier* dilabeli Bonus = 'Ya'.



- 4) *FN* atau *False Negatives* adalah jumlah *tuple* positif yang salah dilabeli oleh *classifier*. Misalnya, sebuah *tuple* pelanggan yang berlabel Bonus = 'Ya' akan tetapi oleh *classifier* dilabeli Bonus = 'Tidak'. Empat istilah di atas dapat digambarkan sebagai *confusion matrix* seperti yang diilustrasikan pada Tabel 1 berikut

Tabel 1. *Confusion Matrix*

No.	Kelas Aktual	Kelas Hasil Prediksi		
		Ya	Tidak	Jumlah
1	Ya	<i>TP</i>	<i>FN</i>	<i>P</i>
2	Tidak	<i>FP</i>	<i>TN</i>	<i>N</i>
3	Jumlah	<i>P'</i>	<i>N'</i>	<i>P + N</i>

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Data yang digunakan dalam penelitian ini berjumlah 130 data dengan enam variabel yaitu usia, jenis kelamin, status merokok, kadar glukosa, tekanan darah dan kelas.

Teknik analisis data yang dilakukan pertama kali adalah menggunakan teknik analisis deskriptif untuk mengetahui gambaran dari keseluruhan data sampel yang digunakan. Langkah selanjutnya adalah membagi data *training* dan data *testing* sesuai dengan masing-masing proporsi yang dapat dilihat pada Tabel 2 berikut.

Tabel 2. Jumlah Data *Training* dan Data *Testing*

No.	Proporsi Data <i>Training</i> dan Data <i>Testing</i>	Jumlah Data <i>Training</i>	Jumlah Data <i>Testing</i>	Total Data
1.	60 : 40	78	52	130
2.	70 : 30	91	39	130
3.	80 : 20	104	26	130
4.	90 : 10	117	13	130

### Algoritma *Naïve Bayes Classifier*

Pada bagian sebelumnya telah diketahui bahwa proporsi data *training* dan data *testing* yang digunakan adalah 60:40, 70:30, 80:20 dan 90:10. Adapun data *training* proporsi data 60:40 dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3. Data *Training* Proporsi 60:40

No.	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$C$
1.	MENENGAH	P	TIDAK	TERINDIKASI	HIPERTENSI	YA
2.	MENENGAH	P	TIDAK	TIDAK TERINDIKASI	TIDAK HIPERTENSI	TIDAK
3.	MENENGAH	L	TIDAK	TERINDIKASI	HIPERTENSI	YA
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
78.	MENENGAH	P	TIDAK	TERINDIKASI	TIDAK HIPERTENSI	YA

dengan:

$F_1$  = Usia (tahun)

$F_2$  = Jenis Kelamin

$F_3$  = Status Merokok

$F_4$  = Kadar Glukosa

$F_5$  = Tekanan Darah

$C$  = Kelas

Berikut ini adalah contoh perhitungan manual algoritma *Naïve Bayes Classifier* dengan menggunakan proporsi data *training* sebesar 60% dan data *testing* sebesar 40%.

### 1. Perhitungan Nilai Probabilitas Prior dari Setiap Kelas

Pada proporsi 60% data *training* dan 40% data *testing* diperoleh jumlah data *training* sebanyak 78 orang dan data *testing* sebanyak 52 orang. Langkah awal klasifikasi menggunakan algoritma *Naïve Bayes Classifier* adalah menghitung nilai probabilitas *prior* pada kedua kelas dalam data *training* menggunakan rumus

$$P(C_i) = \frac{n_i}{N} \quad (4)$$

a) kelas pertama (pasien RS Dirgahayu dengan diagnosa penyakit diabetes "Ya")

Pada 78 data *training* yang ada, terdapat 28 pasien memiliki diagnosa penyakit diabetes melitus sehingga nilai probabilitas *prior* kelas pertama adalah

$$P(C_1) = \frac{28}{78} = 0,359$$

b) kelas kedua (pasien RS Dirgahayu dengan diagnosa penyakit diabetes "Tidak")

Pada 78 data *training* yang ada, terdapat 50 pasien tidak memiliki diagnosa penyakit diabetes melitus sehingga nilai probabilitas *prior* kelas kedua adalah

$$P(C_2) = \frac{50}{78} = 0,641$$

### 2. Perhitungan Nilai Probabilitas Setiap Variabel Terhadap Setiap Kelas

Perhitungan nilai probabilitas setiap variabel pada kedua kelas berdasarkan masing-masing probabilitas dari data *training* menggunakan Persamaan (1). Data *testing* yang digunakan adalah data pasien ke-1 yang dapat dilihat pada Tabel 4.

Tabel 4. Data *Testing* Pertama Proporsi 60:40

No.	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$C$
1.	Menengah	Perempuan	Tidak	Tidak Terindikasi	Hipertensi	?

#### - Usia ( $F_1$ )

Pada variabel usia terdapat 1 pasien kategori usia "Muda", 66 pasien kategori usia "Menengah", dan 11 pasien kategori usia "Tua". Data *testing* pertama menunjukkan kategori usia "Menengah", sehingga kategori usia inilah yang digunakan dalam perhitungan probabilitas bersyarat. Diketahui bahwa dari 66 pasien kategori usia "Menengah", terdapat 22 pasien berada di dalam kelas "Ya" dan 44 pasien berada di dalam kelas "Tidak".

Nilai probabilitas variabel usia ( $F_1$ ) dengan kategori "Menengah" terhadap kelas "Ya" melalui perhitungan sebagai berikut:

$$P(F_1 = \text{"Menengah"} \mid C = \text{"Ya"}) = \frac{22}{66} = 0,333$$

sehingga nilai probabilitas variabel usia ( $F_1$ ) dengan kategori "Menengah" pada kelas "Ya" adalah 0,333.

Nilai probabilitas variabel usia ( $F_1$ ) dengan kategori "Menengah" pada kelas "Tidak" melalui perhitungan sebagai berikut:

$$P(F_1 = \text{"Menengah"} \mid C = \text{"Tidak"}) = \frac{44}{66} = 0,667$$

sehingga nilai probabilitas variabel usia ( $F_1$ ) dengan kategori “Menengah” pada kelas “Tidak” adalah 0,667.

- **Jenis Kelamin ( $F_2$ )**

Pada variabel jenis kelamin terdapat 46 pasien dengan jenis kelamin “Laki-laki” dan 32 pasien dengan jenis kelamin “Perempuan”. Data *testing* pertama menunjukkan kategori jenis kelamin “Perempuan”, sehingga kategori jenis kelamin inilah yang digunakan dalam perhitungan probabilitas bersyarat. Diketahui bahwa dari 46 pasien kategori jenis kelamin “Perempuan” terdapat 15 pasien berada di dalam kelas “Ya” dan 31 pasien berada di dalam kelas “Tidak”.

Nilai probabilitas variabel jenis kelamin ( $F_2$ ) dengan kategori “Perempuan” pada kelas “Ya” melalui perhitungan sebagai berikut:

$$P(F_2 = \text{"Perempuan"} | C = \text{"Ya"}) = \frac{15}{46} = 0,326$$

sehingga nilai probabilitas variabel jenis kelamin ( $F_2$ ) dengan kategori “Perempuan” pada kelas “Ya” adalah 0,326.

Nilai probabilitas variabel jenis kelamin ( $F_2$ ) dengan kategori “Perempuan” pada kelas “Tidak” melalui perhitungan sebagai berikut:

$$P(F_2 = \text{"Perempuan"} | C = \text{"Tidak"}) = \frac{31}{46} = 0,674$$

sehingga nilai probabilitas variabel jenis kelamin ( $F_2$ ) dengan kategori “Perempuan” pada kelas “Tidak” adalah 0,674.

- **Status Merokok ( $F_3$ )**

Pada variabel status merokok terdapat 77 pasien dengan status merokok “Tidak” dan 1 pasien dengan status merokok “Ya”. Data *testing* pertama menunjukkan kategori status merokok “Tidak”, sehingga kategori status merokok inilah yang digunakan dalam perhitungan probabilitas bersyarat. Diketahui bahwa dari 77 pasien kategori status merokok “Tidak” terdapat 28 pasien berada di dalam kelas “Ya” dan 49 pasien berada di dalam kelas “Tidak”.

Nilai probabilitas variabel status merokok ( $F_3$ ) dengan kategori “Tidak” pada kelas “Ya” melalui perhitungan sebagai berikut:

$$P(F_3 = \text{"Tidak"} | C = \text{"Ya"}) = \frac{28}{77} = 0,364$$

sehingga nilai probabilitas variabel status merokok ( $F_3$ ) dengan kategori “Tidak” pada kelas “Ya” adalah 0,364.

Nilai probabilitas variabel status merokok ( $F_3$ ) dengan kategori “Tidak” pada kelas “Tidak” melalui perhitungan sebagai berikut:

$$P(F_3 = \text{"Tidak"} | C = \text{"Tidak"}) = \frac{49}{77} = 0,636$$

sehingga nilai probabilitas variabel status merokok ( $F_3$ ) dengan kategori “Tidak” pada kelas “Tidak” adalah 0,636.

- **Kadar Glukosa ( $F_4$ )**

Pada variabel kadar glukosa terdapat 56 pasien dengan kategori “Tidak terindikasi” dan 22 pasien dengan kategori “Terindikasi”. Data *testing* pertama menunjukkan kategori “Tidak terindikasi”, sehingga kategori kadar glukosa inilah yang digunakan dalam perhitungan probabilitas bersyarat. Diketahui bahwa dari 56 pasien kategori “Tidak terindikasi” terdapat 7 pasien berada di dalam kelas “Ya” dan 49 pasien berada di dalam kelas “Tidak”.

Nilai probabilitas variabel kadar glukosa ( $F_4$ ) dengan kategori "Tidak Terindikasi" pada kelas "Ya" melalui perhitungan sebagai berikut:

$$P(F_4 = \text{"Tidak Terindikasi"} | C = \text{"Ya"}) = \frac{7}{56} = 0,125$$

sehingga nilai probabilitas variabel kadar glukosa ( $F_4$ ) dengan kategori "Tidak Terindikasi" pada kelas "Ya" adalah 0,125.

Nilai probabilitas variabel kadar glukosa ( $F_4$ ) dengan kategori "Tidak Terindikasi" pada kelas "Tidak" melalui perhitungan sebagai berikut:

$$P(F_4 = \text{"Tidak Terindikasi"} | C = \text{"Tidak"}) = \frac{49}{56} = 0,875$$

sehingga nilai probabilitas variabel kadar glukosa ( $F_4$ ) dengan kategori "Tidak Terindikasi" pada kelas "Tidak" adalah 0,875.

#### - Tekanan Darah ( $F_5$ )

Pada variabel tekanan darah terdapat 23 pasien dengan kategori "Hipertensi" dan 55 pasien dengan kategori "Tidak hipertensi". Data *testing* pertama menunjukkan kategori tekanan darah "Hipertensi", sehingga kategori tekanan darah inilah yang digunakan dalam perhitungan probabilitas bersyarat. Diketahui bahwa dari 23 pasien kategori tekanan darah "Hipertensi" terdapat 14 pasien berada di dalam kelas "Ya" dan 9 pasien berada di dalam kelas "Tidak".

Nilai probabilitas variabel tekanan darah ( $F_5$ ) dengan kategori "Hipertensi" pada kelas "Ya" melalui perhitungan sebagai berikut:

$$P(F_5 = \text{"Hipertensi"} | C = \text{"Ya"}) = \frac{14}{23} = 0,609$$

sehingga nilai probabilitas variabel tekanan darah ( $F_5$ ) dengan kategori "Hipertensi" pada kelas "Ya" adalah 0,609.

Nilai probabilitas variabel tekanan darah ( $F_5$ ) dengan kategori "Hipertensi" pada kelas "Tidak" melalui perhitungan sebagai berikut:

$$P(F_5 = \text{"Hipertensi"} | C = \text{"Tidak"}) = \frac{9}{23} = 0,391$$

sehingga nilai probabilitas variabel tekanan darah ( $F_5$ ) dengan kategori "Hipertensi" pada kelas "Tidak" adalah 0,391.

### 3. Perhitungan Nilai Akumulasi Probabilitas dari Setiap Kelas

Jika bagian sebelumnya telah diketahui probabilitas masing-masing variabel pada setiap kelas, maka langkah selanjutnya adalah menghitung nilai akumulasi dari setiap kelas dengan cara mengalikan semua probabilitas pada kelas. Adapun perhitungan nilai akumulasi probabilitas berdasarkan Persamaan (2) dapat dilihat sebagai berikut:

- kelas pertama (pasien RS Dirgahayu dengan diagnosa penyakit diabetes "Ya")

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{k=5} P(F_k | C_1) &= P(F_1 | C_1) \times P(F_2 | C_1) \times P(F_3 | C_1) \times P(F_4 | C_1) \times P(F_5 | C_1) \\ &= 0,333 \times 0,326 \times 0,364 \times 0,125 \times 0,609 \\ &= 0,003 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh nilai akumulasi probabilitas semua variabel ada kelas "Ya" adalah 0,003.

- kelas kedua (pasien RS Dirgahayu dengan diagnosa penyakit diabetes "Tidak")

$$\prod_{k=1}^{k=5} P(F_k | C_2) = P(F_1 | C_2) \times P(F_2 | C_2) \times P(F_3 | C_2) \times P(F_4 | C_2) \times P(F_5 | C_2)$$

$$= 0,667 \times 0,674 \times 0,636 \times 0,875 \times 0,391$$

$$= 0,098$$

sehingga diperoleh nilai akumulasi probabilitas semua variabel ada kelas “Tidak” adalah 0,098.

#### 4. Perhitungan Perkalian Probabilitas Prior dengan Nilai Akumulasi Probabilitas dari Masing-masing Kelas

Nilai akumulasi probabilitas dari masing-masing kelas selanjutnya perlu dikalikan dengan nilai probabilitas *prior* setiap kelas yang telah dihitung pada langkah awal.

- kelas pertama (pasien RS Dirgahayu dengan diagnosa penyakit diabetes “Ya”). Diketahui perhitungan nilai probabilitas *prior* dan nilai akumulasi probabilitas dari kelas pertama pada proporsi data 60:40 adalah sebagai berikut:

$$P(C_1) = 0,359$$

$$\left( \prod_{k=1}^{k=5} P(F_k|C_1) \right) = 0,003$$

Hasil perhitungan perkalian probabilitas *prior* dengan nilai akumulasi probabilitas pada kelas pertama adalah sebagai berikut:

$$P(C_1|F) = P(C_1) \times \left( \prod_{k=1}^{k=5} P(F_k|C_1) \right)$$

$$= 0,359 \times 0,003$$

$$= 0,00108$$

- kelas kedua (pasien RS Dirgahayu dengan diagnosa penyakit diabetes “Tidak”). Diketahui perhitungan nilai probabilitas *prior* dan nilai akumulasi probabilitas dari kelas kedua pada proporsi data 60:40 adalah sebagai berikut:

$$P(C_2) = 0,641$$

$$\left( \prod_{k=1}^{k=5} P(F_k|C_2) \right) = 0,098$$

Hasil perhitungan perkalian probabilitas *prior* dengan nilai akumulasi probabilitas pada kelas kedua adalah sebagai berikut:

$$P(C_2|F) = P(C_2) \times \left( \prod_{k=1}^{k=5} P(F_k|C_2) \right)$$

$$= 0,641 \times 0,098$$

$$= 0,06282$$

#### 5. Penentuan Hasil Klasifikasi Obyek Berdasarkan Nilai Paling Maksimum dari Kedua Kelas Kelas

Pada data *testing* pertama nilai probabilitas *posterior* pasien pada kelas “Tidak” sebesar 0,06282 lebih maksimum dibandingkan dengan pasien pada kelas “Ya” sebesar 0,00108, dengan demikian data *testing* pertama yang tertera pada Tabel 3 diklasifikasikan masuk ke dalam kelas kedua yaitu status “TIDAK” terdiagnosis diabetes melitus.

Pada data *testing* selanjutnya menggunakan cara perhitungan yang sama dengan di atas, sehingga hasil klasifikasi proporsi data 60:40 dapat dilihat pada Tabel 5.

Tabel 5. Hasil Klasifikasi Proporsi Data *Testing* 40%

No.	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	C
1.	Menengah	Perempuan	Tidak	Tidak Terindikasi	Hipertensi	TIDAK
2.	Menengah	Perempuan	Tidak	Tidak Terindikasi	Tidak Hipertensi	TIDAK
3.	Menengah	Laki-laki	Tidak	Terindikasi	Hipertensi	YA
...	...	...	...	...	...	...
10.	Menengah	Laki-laki	Ya	Tidak Terindikasi	Hipertensi	TIDAK
...	...	...	...	...	...	...
21.	Menengah	Laki-laki	Tidak	Tidak Terindikasi	Tidak Hipertensi	YA
...	...	...	...	...	...	...
25.	Menengah	Laki-laki	Tidak	Terindikasi	Tidak Hipertensi	YA
...	...	...	...	...	...	...
45.	Menengah	Laki-laki	Tidak	Terindikasi	Tidak Hipertensi	YA
...	...	...	...	...	...	...
52.	Menengah	Perempuan	Tidak	Tidak Terindikasi	Tidak Hipertensi	TIDAK

Pada Tabel 5 menunjukkan hasil klasifikasi proporsi data *testing* 40% terdapat 4 objek yang salah klasifikasi yaitu pada data ke-10, 21, 25 dan 45.

Pada proporsi data lainnya yaitu proporsi data 70:30, 80:20 dan 90:10 menggunakan cara perhitungan manual yang sama dengan cara perhitungan pada proporsi data 60:40.

### Evaluasi Model

Model klasifikasi yang telah dibuat selanjutnya dievaluasi menggunakan nilai akurasi yang dapat dihitung dengan menggunakan rumus (3) yang direpresentasikan menggunakan *confusion matrix* sehingga diperoleh nilai akurasi pada proporsi data 60:40 adalah

$$\text{confusion matrix} = \begin{bmatrix} 17 & 2 \\ 2 & 31 \end{bmatrix}$$

sehingga nilai akurasinya adalah

$$\begin{aligned} \text{akurasi} &= \frac{17 + 31}{19 + 33} \\ &= \frac{48}{52} \\ &= 0,9231 \\ &= 92,31\% \end{aligned}$$

Dengan menggunakan cara yang sama, hasil nilai akurasi dari masing-masing proporsi data dapat dilihat pada Tabel 6 berikut

Tabel 6. Hasil Nilai Akurasi

No.	Proporsi Data		Nilai Akurasi
	Data Training	Data Testing	
1.	60%	40%	92,31%
2.	70%	30%	89,74%
3.	80%	20%	92,31%
4.	90%	10%	84,62%

### PENUTUP

Berdasarkan hasil analisis diperoleh hasil klasifikasi penyakit diabetes melitus pada pasien RS Dirgahayu Samarinda bulan September Tahun 2018 s/d 2021 dengan

empat proporsi data. Pada proporsi data 60:40 memiliki nilai akurasi sebesar 92,31%. Pada proporsi data 70:30 memiliki nilai akurasi sebesar 89,74%. Pada proporsi data 80:20 memiliki nilai akurasi sebesar 92,31%. Pada proporsi data 90:10 memiliki nilai akurasi sebesar 84,62%.

#### **DAFTAR PUSTAKA**

- [1] Kementerian Kesehatan RI. (2019). *Buku Pedoman Manajemen Penyakit Tidak Menular*. Jakarta: Direktorat Jenderal Pencegahan dan Pengendalian Penyakit.
- [2] Kementerian Kesehatan RI. (2020). *Tetap Produktif, Cegah, dan Atasi Diabetes Melitus*. Jakarta: Pusat Data dan Informasi.
- [3] Suyanto. (2017). *Data Mining untuk Klasifikasi dan Klasterisasi Data*. Bandung: Informatika.
- [4] Han, J, Kamber, M, Pei, J. (2012). *Data Mining: Concepts and Techniques. Third Edition*. USA: Elsevier.
- [5] Sabransyah, M., Nasution, Y. N, Amijaya, F. D. T. (2017). Aplikasi Metode Naïve Bayes dalam Memprediksi Risiko Penyakit Jantung. *Jurnal Eksponensial*, 111-117.
- [6] Lutfi, M., dan Rizal, S. (2018). Penerapan Algoritma Naïve Bayes untuk Prediksi Penerimaan Siswa Baru di SMK Al-Amien Wonorejo. *Jurnal Explore It*, 14-17.
- [7] Nangi, J., Ransi, N., Apriliana. (2017). Implementasi *Text Mining* Klasifikasi Skripsi Menggunakan Metode *Naïve Bayes Classifier*. *Jurnal Semantik*, 187-194.

## Analisis Model Matematika *Predator-Prey* Perikanan Pada Ekosistem Perairan Tercemar

Stefanny Pratiwi<sup>1\*</sup>, Yuki Novia Nasution<sup>1</sup>, Moh Nurul Huda<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Laboratorium Matematika Komputasi Program Studi Matematika Jurusan matematika FMIPA Unniversitas Mulawarman*

Dikirim: Juni 2022; Diterima: Juli 2022; Dipublikasi: September 2022

Alamat Email Korespondensi: [stefannypratiwi3@gmail.com](mailto:stefannypratiwi3@gmail.com)

### Abstrak

Pada penelitian ini dibahas analisis dinamik model *predator-prey* perikanan pada lingkungan perairan tercemar. Analisis dinamik yang dilakukan meliputi yaitu penentuan titik kesetimbangan, syarat eksistensi titik kesetimbangan, dan analisis kestabilan pada titik kesetimbangan. Hasil analisis menunjukkan bahwa model *predator-prey* memiliki empat titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan  $P_1$  atau trivial, titik kesetimbangan  $P_2$  ketika populasi *predator* punah, titik kesetimbangan  $P_3$  ketika populasi *prey* punah, dan titik kesetimbangan interior atau  $P_4$ . Titik kesetimbangan  $P_1$  selalu eksis, sedangkan titik kesetimbangan  $P_2$ ,  $P_3$ , dan  $P_4$  eksis dengan beberapa syarat eksistensi, yaitu  $P_2$  eksis dengan syarat  $\sigma > \epsilon$ ,  $P_3$  eksis dengan syarat  $1/4\delta + 1 > \beta$ , dan  $P_4$  eksis dengan syarat  $b^2 > 4ac$ . Pada titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ , dan  $P_4$  bersifat stabil asimtotik lokal dengan beberapa syarat kestabilan. Hasil simulasi numerik yang dilakukan mendukung hasil analisis dinamik yang diperoleh.

### Kata Kunci:

*analisis kestabilan, model predator-prey perikanan, perairan tercemar, titik kesetimbangan.*

## PENDAHULUAN

Ekosistem merupakan sistem ekologi yang terbentuk berdasarkan pada hubungan timbal balik antara makhluk hidup dan lingkungannya [1]. Salah satu jenis ekosistem dalam kehidupan di dunia yaitu ekosistem perairan. Contoh permasalahan pada ekosistem perairan adalah ekosistem perairan tercemar. Masalah global yang sering terjadi seperti penangkapan ikan secara ilegal dan pengolahan sistem perikanan yang kurang baik menjadikan permasalahan pada ekosistem perairan tercemar menjadi lebih buruk. Selain itu, racun antropogenik seperti limbah hasil dari kegiatan perindustrian dan pertambangan juga merupakan faktor lain yang menyebabkan terjadinya pencemaran pada ekosistem perairan. Kondisi ekosistem perairan yang kurang baik mengakibatkan keberlangsungan makhluk hidup seperti ikan-ikan yang tinggal pada perairan tercemar menjadi terganggu. Ekosistem perairan yang tercemar memberikan dampak kerusakan pada rantai makanan yang diakibatkan oleh kondisi lingkungan yang sudah tidak mendukung.

Salah satu pendekatan yang dapat digunakan untuk menggambarkan sistem perikanan pada perairan yang tercemar adalah model matematika. Model matematika yang digunakan yaitu model *Predator-Prey*. Model *predator-prey* menjelaskan interaksi



antara dua populasi yaitu *predator* (pemangsa) dan *prey* (mangsa). Model *predator-prey* ini juga dikenal dengan model Lotka-Volterra karena model ini pertama kali dikenalkan oleh Lotka pada tahun 1925 dan Volterra pada tahun 1926 [2].

Terdapat beberapa jurnal penelitian mengenai perikanan yang mengkaji tentang efek pencemaran lingkungan pada ekosistem perairan. Penelitian [3] mengkaji tentang sebuah model dampak kontaminasi pada dinamika populasi ikan. Penelitian [4] mengkaji tentang dampak racun lingkungan pada dinamika *predator-prey*. Penelitian [5] mengkaji dampak pemanenan pada bioekonomi *predator-prey* sebagai subjek perikanan pada racun lingkungan dimana populasi *prey* secara langsung terinfeksi oleh racun lingkungan dan secara tidak langsung menyebabkan *predator* ikut terinfeksi racun melalui proses pemberian pakan.

Pada skripsi ini dibahas analisis dinamik model *predator-prey* perikanan pada lingkungan perairan tercemar. Model matematika yang terbentuk dari dua spesies yaitu pemangsa dan mangsa perairan yang tercemar akibat racun hasil kegiatan pertambangan dan perindustrian. Model matematika yang digunakan pada skripsi ini merupakan kajian ulang model [5]. Dari model [5] dilakukan analisis dinamik yaitu dengan menentukan titik kesetimbangan dan analisis kestabilannya.

## LANDASAN TEORI

### 1. Sistem dinamik

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang digunakan untuk mengetahui kondisi di masa yang akan datang berdasarkan dengan sistem atau kondisi yang telah ditentukan atau diberikan pada masa lalu atau masa sekarang [6].

### 2. Sistem Otonomus

Sistem persamaan diferensial dengan bentuk

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x, y), \\ \dot{y} &= f_2(x, y),\end{aligned}\tag{1}$$

Dimana fungsi  $f_1$  dan  $f_2$  merupakan fungsi bernilai real yang tidak bergantung secara eksplisit [6].

#### Definisi 1. Titik Kesetimbangan Sistem Otonomus

Diberikan suatu sistem otonomus (1). Titik  $(x_0, y_0)$  adalah titik kritis (atau titik kesetimbangan) dari sistem (1) jika  $f_1(x_0, y_0) = 0$  dan  $f_2(x_0, y_0) = 0$ . Karena turunan konstanta 0, maka jika titik  $(x_0, y_0)$  adalah titik kritis dari sistem (1) fungsi pasangan konstanta nya adalah

$$x(t) = x_0, y(t) = y_0,\tag{2}$$

merupakan solusi dari sistem (1) untuk semua  $t$  [7].

#### Definisi 2. Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem Otonomus

Titik kesetimbangan  $(x_0, y_0)$  (atau solusi konstanta dari sistem (2)) pada sistem otonomus (1) dikatakan:

- a. stabil, jika  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  sedemikian sehingga untuk setiap solusi  $(x(t), y(t))$  pada saat  $t = 0$  dari sistem otonomus (1) yang memenuhi

$$[x(0) - x_0]^2 + [y(0) - y_0]^2 < \delta,$$

maka berlaku

$$[x(t) - x_0]^2 + [y(t) - y_0]^2 < \varepsilon, \forall t \geq 0,$$

- b. stabil asimtotik, jika  $(x_0, y_0)$  stabil dan  $\exists \eta > 0$  sedemikian sehingga setiap solusi  $(x(t), y(t))$  pada saat  $t = 0$  dari sistem otonomus (1) yang memenuhi

$$[x(0) - x_0]^2 + [y(0) - y_0]^2 < \eta$$

ada untuk semua  $t \geq 0$  dan memenuhi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*,$$

c. tidak stabil, apabila titik kritis tersebut tidak memenuhi (a).

### 3. Model Predator Prey Dua Spesies

Salah satu model matematika yang cukup terkenal adalah model *predator-prey*. Model *predator-prey* dinamai berdasarkan dua ilmuwan yang termasuk dalam ilmuwan pertama yang mempelajari dan menerapkan model *predator-prey*. Dua ilmuwan tersebut yaitu Alfred Lotka (1880-1949) dan Vito Volterra (1860-1940). Terdapat dua persamaan diferensial dalam model Lotka-Volterra, yaitu dimana populasi *prey* dan populasi *predator* dinyatakan dengan  $x(t)$  dan  $y(t)$  pada waktu  $t$ . Dua persamaan diferensial tersebut adalah

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= gx - hf(x,y)y, \\ \frac{dy}{dt} &= -ry + sf(x,y)y,\end{aligned}\tag{3}$$

dengan

$f(x,y)$  = fungsi respon,

$g$  = laju pertumbuhan *prey*,

$h$  = penurunan per kapita *prey* per *predator*,

$r$  = laju kematian *predator*,

$s$  = peningkatan per kapita *predator* per mangsa,

dimana  $g, h, r, s > 0$ . Pada saat *prey* tidak ada, populasi *predator* dengan laju yang dinyatakan dengan  $-rY$  akan mengalami kematian secara alami [8].

### 4. Kriteria Routh-Hurwitz

Kriteria Routh-Hurwitz digunakan pada sistem persamaan diferensial untuk menentukan stabil asimtotik lokal dari suatu kesetimbangan. Misal diberikan  $n$  memiliki persamaan karakteristik sebagai berikut

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,\tag{4}$$

dimana koefisien  $a_i$  adalah konstanta real,  $i = 1, \dots, n$ .

#### Teorema 2.3

Didefinisikan  $n$  matriks Hurwitz sebagai berikut

$$H_1 = [a_1], H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix},$$

dan

$$H_n = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix},$$

dimana  $a_j = 0$  jika  $j > n$ . Semua akar persamaan karakteristik  $P(\lambda)$  adalah negative jika determinan dari semua matriks Hurwitz positif :

$$\det H_j > 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

ketika  $n = 2$ , maka kriteria Routh-Hurwitz dapat disederhanakan sebagai berikut:

$$\det H_2 = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = a_1 a_2 > 0,$$

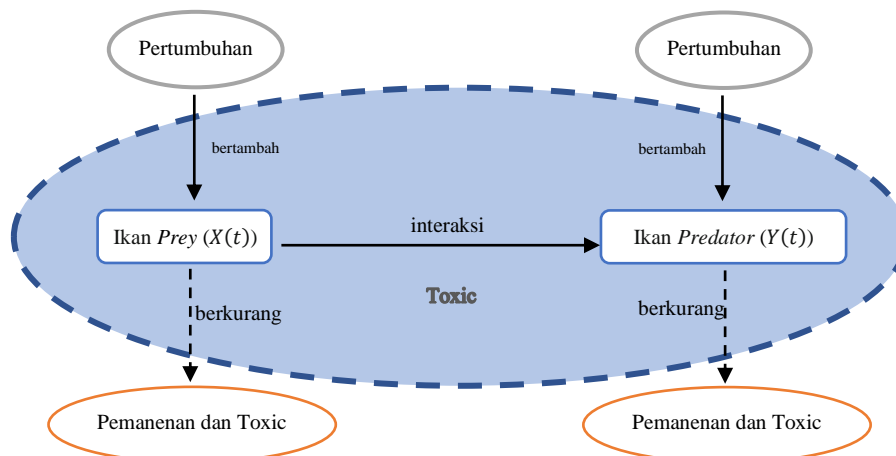
atau  $a_1 > 0$  dan  $a_2 > 0$  [8].

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### 1. Kontruksi Model *Predator-Prey* Perikanan Pada Lingkungan Perairan Tercemar

Pada model *predator-prey* perikanan pada lingkungan perairan tercemar terdapat dua populasi pada model yaitu populasi *prey* dan populasi *predator*. Dalam model ini, populasi ikan *prey* secara langsung terinfeksi oleh racun antropogenik seperti limbah hasil dari kegiatan perindustrian dan pertambangan. Namun berbeda dengan populasi ikan *prey*, populasi ikan *predator* secara tidak langsung terinfeksi oleh racun melalui proses pemberian makan pada ikan *prey* yang terinfeksi racun.

Berikut diberikan diagram model *predator-prey* perikanan pada lingkungan perairan tercemar yaitu sebagai berikut:



Gambar 1. Diagram Kompartemen Model *Predator-Prey* Perikanan

Misalkan populasi ikan *prey* pada saat  $t$  dinyatakan dengan  $Q(t)$  dan populasi ikan *predator* pada saat  $t$  dinyatakan dengan  $W(t)$ . Tumbuh secara logistik dengan laju  $r_1$  dan  $r_2$ , dan didukung oleh daya dukung lingkungan masing-masing  $K_1$  dan  $K_2$ . Populasi ikan *prey* berkurang dengan upaya pemanenan masing-masing  $E_1$  dan  $E_2$ , di mana parameter  $b$  menunjukkan koefisien daya tangkap ikan *prey* dan parameter  $e$  menunjukkan koefisien daya tangkap ikan *predator*. Koefisien toksisitas atau racun pada populasi ikan *prey* dilambangkan dengan  $c$ , sedangkan koefisien toksisitas pada populasi *predator* dilambangkan  $f$ . sehingga laju pertumbuhan populasi *prey* dan populasi *predator* adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= r_1 Q \left(1 - \frac{Q}{K_1}\right) - aQW - bE_1Q - cQ^3, \\ \frac{dW}{dt} &= r_2 W \left(1 - \frac{W}{K_2}\right) + dQW - eE_2W - fW^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Sistem persamaan (5) akan disederhanakan menggunakan varabel-variabel dan parameter yaitu  $q = \frac{Q}{K_1}$ ,  $w = \frac{W}{K_2}$ , dan  $\tau = r_1 t$  yang menghasilkan model *predator-prey* sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dq}{d\tau} &= q(1 - q) - \alpha qw - \beta q - \delta q^3, \\ \frac{dw}{d\tau} &= \sigma w(1 - w) + \rho qw - \epsilon w - \mu w^2, \end{aligned} \quad (6)$$

dimana  $\alpha = \frac{aK_2}{r_1}$ ,  $\beta = \frac{bE_1}{r_1}$ ,  $\delta = \frac{cK_1^2}{r_1}$ ,  $\sigma = \frac{r_2}{r_1}$ ,  $\rho = \frac{dK_1}{r_1}$ ,  $\epsilon = \frac{eE_2}{r_1}$ , dan  $\mu = \frac{fK_2}{r_1}$ .

## 2. Titik Keseimbangan Model

Titik keseimbangan persamaan (6) diperoleh ketika  $\frac{dq}{dt} = \frac{dw}{dt} = 0$  sehingga persamaan (6) menjadi

$$q[(1 - q) - \alpha w - \beta - \delta q^2] = 0 \quad (7a)$$

$$w[\sigma(1 - w) + \rho q - \epsilon - \mu w] = 0. \quad (7b)$$

Dari persamaan (7a) diperoleh

$$q = 0, \quad (8a)$$

atau

$$(1 - q) - \alpha w - \beta - \delta q^2 = 0, \quad (8b)$$

Dari persamaan (7b) diperoleh

$$w = 0, \quad (9a)$$

atau

$$\sigma(1 - w) + \rho q - \epsilon - \mu w = 0, \quad (9b)$$

atau

$$w = \frac{\rho q - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}. \quad (9c)$$

Pada persamaan (6) diperoleh empat titik keseimbangan, yaitu titik keseimbangan  $P_1 = (0,0)$  dimana diperoleh dengan mengkombinasikan persamaan (8a) dan (9a). Titik keseimbangan  $P_2 = \left(0, \frac{\sigma - \epsilon}{\mu + \sigma}\right)$  diperoleh dengan cara mensubstitusikan persamaan (8a) ke persamaan (9b) dimana nilai  $y$  akan bernilai positif jika  $\sigma > \epsilon$ . Titik keseimbangan  $P_3 = (\check{q}, 0)$  diperoleh dengan cara mensubstitusikan persamaan (9a) ke persamaan (8b), dimana  $\check{q}$  adalah akar dari persamaan  $\delta q^2 + q + \beta - 1 = 0$  menghasilkan  $q = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\delta\beta + 4\delta}}{2\delta}$ , nilai  $q$  merupakan populasi *prey* dimana nilai atau jumlah dari populasi *prey* tidak mungkin bernilai negatif sehingga  $q$  haruslah positif. Nilai  $q$  akan bernilai positif jika  $1/4\delta + 1 > \beta$ . Titik keseimbangan  $P_4 = \left(\hat{q}, \frac{\rho\hat{q} - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}\right)$ , diperoleh dengan cara mensubstitusikan persamaan (9c) ke persamaan (8b) diperoleh  $(\mu + \sigma)\delta q^2 + (\alpha\rho + \mu + \sigma)q + (\beta - 1)(\mu + \sigma) + \alpha(\sigma + \epsilon) = 0$  menghasilkan  $q = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  dengan  $a = (\mu + \sigma)$ ,  $b = (\alpha\rho + \mu + \sigma)$ , dan  $c = (\beta - 1)(\mu + \sigma) + \alpha(\sigma + \epsilon)$ . Nilai  $q$  merupakan populasi *prey* dimana nilai atau jumlah dari populasi *prey* tidak mungkin bernilai negatif sehingga  $q > 0$  dan  $q$  akan bernilai positif jika  $b^2 > 4ac$ .

## 3. Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan

Matriks Jacobi dari sistem (6) adalah sebagai berikut

$$J(q, w) = \begin{bmatrix} 1 - 2q - \alpha w - \beta - 3\delta q^2 & -\alpha q \\ \rho w & \sigma - 2\sigma w + \rho q - \epsilon - 2\mu w \end{bmatrix}. \quad (10)$$

### a. Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan $P_1$

Matriks Jacobi persamaan  $P_1$  didapat dengan mensubstitusikan  $P_1 = (0,0)$  ke matriks (10) maka diperoleh

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 1 - \beta & 0 \\ 0 & \sigma - \epsilon \end{bmatrix},$$

menghasilkan nilai eigen  $\lambda_1 = 1 - \beta$  atau  $\lambda_2 = \sigma - \epsilon$ , sehingga titik keseimbangan  $P_1$  bersifat stabil jika kedua nya  $\beta > 1$  dan  $\epsilon > \sigma$  dan bersifat tidak stabil jika kedua nya  $\beta < 1$  dan  $\epsilon < \sigma$ .

b. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan  $P_2$ 

Matrik Jacobi persamaan  $P_2$  didapat dengan mensubstitusikan  $P_2 = \left(0, \frac{\sigma - \epsilon}{\mu + \sigma}\right)$  ke matriks (10) maka diperoleh

$$J\left(0, \frac{\sigma - \epsilon}{\mu + \sigma}\right) = \begin{bmatrix} 1 - \alpha\left(\frac{\sigma - \epsilon}{\mu + \sigma}\right) - \beta & 0 \\ \rho\left(\frac{\sigma - \epsilon}{\mu + \sigma}\right) & \epsilon - \sigma \end{bmatrix},$$

menghasilkan nilai eigen  $\lambda_1 = 1 - \alpha\left(\frac{\sigma - \epsilon}{\mu + \sigma}\right) - \beta$  atau  $\lambda_2 = \epsilon - \sigma$ , sehingga titik kesetimbangan  $P_2$  bersifat stabil jika  $\beta > 1 - \alpha\left(\frac{\sigma - \epsilon}{\mu + \sigma}\right)$  dan  $\sigma > \epsilon$ .

c. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan  $P_3$ 

Matrik Jacobi persamaan  $P_3$  didapat dengan mensubstitusikan  $P_3 = (\check{q}, 0)$  ke matriks (10) maka diperoleh

$$J(\check{q}, 0) = \begin{bmatrix} -\check{q}(3\delta\check{q} + 2) - \beta + 1 & -\alpha\check{q} \\ 0 & \rho\check{q} + \sigma - \epsilon \end{bmatrix},$$

menghasilkan nilai eigen  $\lambda_1 = -\check{q}(3\delta\check{q} + 2) - \beta + 1$  atau  $\lambda_2 = \rho\check{q} + \sigma - \epsilon$ , sehingga titik kesetimbangan  $P_3$  bersifat stabil jika  $\beta - 1 > -\check{q}(3\delta\check{q} + 2)$  dan  $\epsilon > \rho\check{q} + \sigma$ .

d. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan  $P_4$ 

Matrik Jacobi persamaan (6) didapat dengan mensubstitusikan  $P_4 = \left(\hat{q}, \frac{\rho\hat{q} - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}\right)$  ke sistem (10) maka diperoleh

$$J\left(\hat{q}, \frac{\rho\hat{q} - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}\right) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix},$$

dengan  $b_{11} = 1 - 2\hat{q} - \alpha\left(\frac{\rho\hat{q} - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}\right) - \beta - 3\delta\hat{q}^2$ ,  $b_{12} = -\alpha\hat{q}$ ,  $b_{21} = \rho\left(\frac{\rho\hat{q} - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}\right)$ ,  $b_{22} = \sigma - 2\sigma\left(\frac{\rho\hat{q} - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}\right) + \rho\hat{q} - \epsilon - 2\mu\left(\frac{\rho\hat{q} - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}\right)$ .

Persamaan karakteristiknya adalah sebagai berikut

$$\lambda^2 + Q_1\lambda + Q_2 = 0, \quad (11)$$

dengan

$$Q_1 = -b_{11} - b_{22},$$

$$= -\left(1 - 2\hat{q} - \alpha\left(\frac{\rho\hat{q} - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}\right) - \beta - 3\delta\hat{q}^2\right) - \left(\sigma - 2\sigma\left(\frac{\rho\hat{q} - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}\right) + \rho\hat{q} - \epsilon - \right.$$

$$\left. 2\mu\left(\frac{\rho\hat{q} - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}\right)\right),$$

$$Q_2 = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21},$$

$$= \left(1 - 2\hat{q} - \alpha\left(\frac{\rho\hat{q} - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}\right) - \beta - 3\delta\hat{q}^2\right) \left(\sigma - 2\sigma\left(\frac{\rho\hat{q} - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}\right) + \rho\hat{q} - \epsilon - 2\mu\left(\frac{\rho\hat{q} - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}\right)\right) -$$

$$\left(-\alpha\hat{q}\right) \left(\rho\left(\frac{\rho\hat{q} - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}\right)\right).$$

Nilai eigen pada persamaan (11) menggunakan Kriteria Routh-Hurwitz. Matriks Routh-Hurwitz persamaan (11) adalah

$$H_2 = \begin{bmatrix} Q_1 & 1 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix},$$

Sehingga diperoleh determinan dari persamaan Routh-Hurwitz yaitu

$$\det H_2 = \det \begin{pmatrix} Q_1 & 1 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = Q_1Q_2,$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, nilai eigen pada persamaan (11) bernilai negatif jika hanya jika  $Q_1 > 0$  dan  $Q_2 > 0$ , sehingga titik kesetimbangan  $P_4$  bersifat stabil asimtotik.

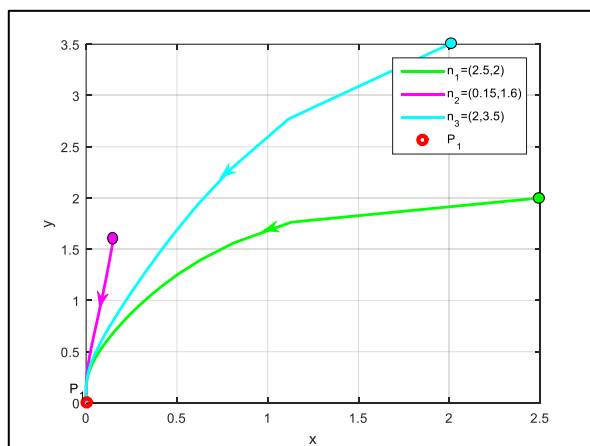
### Simulasi Numerik

Simulasi numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat yang mengacu pada hasil analisis kestabilan titik kesetimbangan. Selain itu, simulasi dilakukan dengan menggunakan aplikasi Matlab R2015a. Simulasi numerik dilakukan dengan menggubakan beberapa nilai awal. Beberapa nilai parameter yang digunakan pada simulasi numerik yaitu  $\alpha = 0.15$ ,  $\delta = 1.2$ ,  $\epsilon = 0.7$ ,  $\sigma = 0.65$ ,  $\rho = 0.25$ ,  $\mu = 0.2$ , dan  $\beta = 2$ .

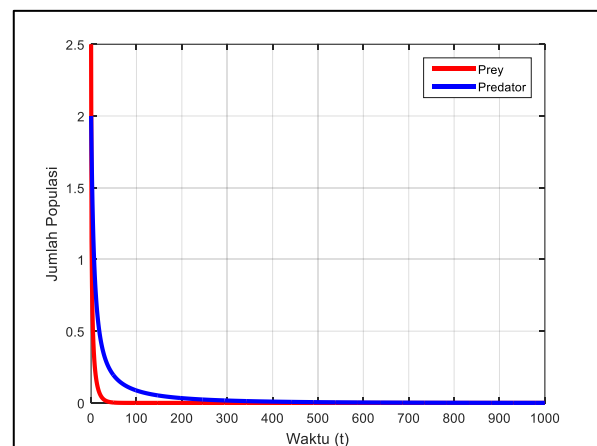
Tabel 1. Nilai parameter untuk simulasi numerik

Parameter	$\alpha$	$\delta$	$\epsilon$	$\sigma$	$\rho$	$\mu$	$\beta$
Nilai	0.15	1.2	0.7	0.65	0.25	0.2	2

Simulasi numerik untuk memperlihatkan kestabilan titik kesetimbangan  $P_1 = (0,0)$ , dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 1 dan nilai awal yaitu  $n_1 = (2.5,2)$ ,  $n_2 = (0.15,1.6)$ , dan  $n_3 = (2,3.5)$ . Nilai parameter tersebut memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan  $P_1$ , yaitu bersifat stabil jika  $\beta = 2 > 1$ , dan  $\epsilon = 0.7 > 0.65 = \sigma$ .



Gambar 2. Potret fase ketika populasi predator-prey

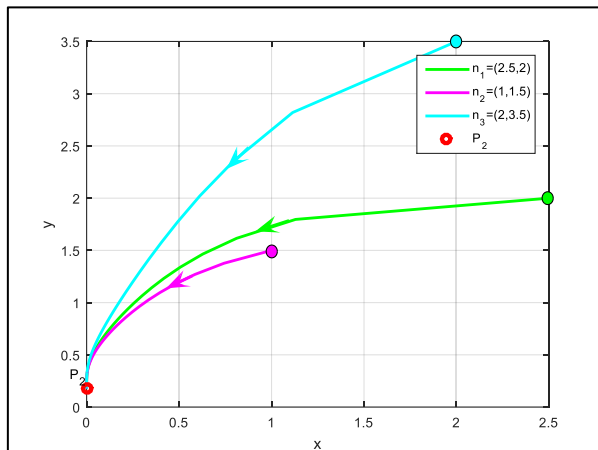


Gambar 3. Grafik predator-prey ketika punah populasi predator dan prey punah

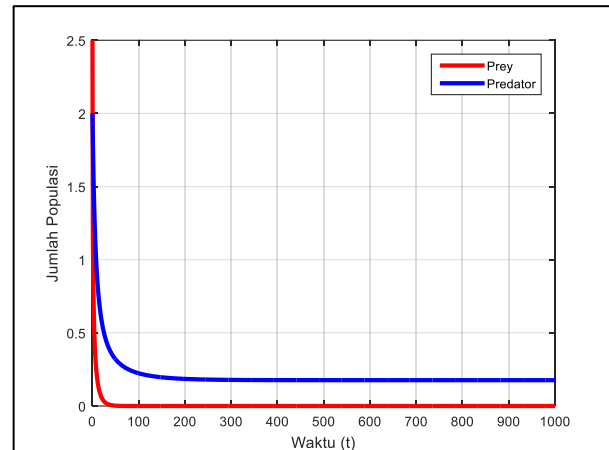
Pada Gambar 2 dan Gambar 3 untuk titik kesetimbangan  $P_1 = (0,0)$ , menunjukkan bahwa orbit solusi dengan beberapa nilai awal yang berbeda menuju ke kesetimbangan ketika punah populasi predator dan prey punah dan memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan  $P_1$  yaitu bersifat stabil asimtotik.

Simulasi numerik untuk memperlihatkan kestabilan titik kesetimbangan  $P_2 = (0, \frac{\sigma - \epsilon}{\mu + \sigma})$ , dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 1 dan nilai awal yaitu  $n_1 = (2.5,2)$ ,  $n_2 = (1,1.5)$ , dan  $n_3 = (2,3.5)$ , namun agar syarat eksistensi titik kesetimbangan  $P_2$  terpenuhi maka nilai  $\epsilon$  diubah yaitu  $\epsilon = 0.5$ . Nilai parameter tersebut memenuhi syarat eksistensi titik kesetimbangan  $P_2$ , yaitu  $\sigma = 0.65 > 0.5 = \epsilon$ . Nilai parameter tersebut memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan  $P_2$ , yaitu bersifat stabil jika

$$\beta = 2 > 0.9735 = 1 - \alpha \left( \frac{\sigma - \epsilon}{\mu + \sigma} \right), \text{ dan } \sigma = 0.65 > 0.5 = \epsilon.$$



Gambar 4. Potret fase ketika populasi prey punah

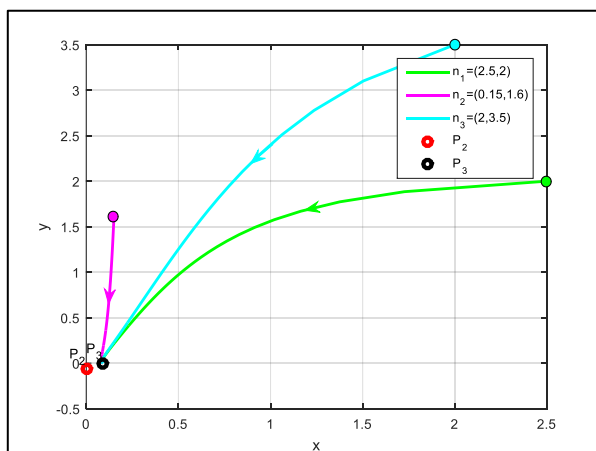


Gambar 5. Grafik predator-prey ketika populasi prey populasi prey punah

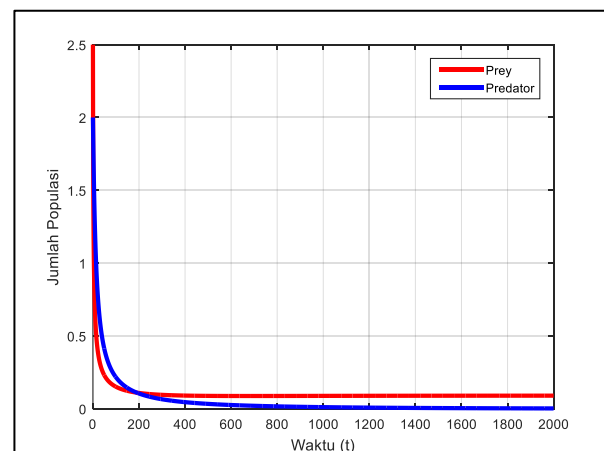
Potret fase pada Gambar 4 untuk titik kesetimbangan  $P_2 = \left(0, \frac{\sigma - \epsilon}{\mu + \sigma}\right)$ , menunjukkan bahwa orbit solusi dengan beberapa nilai awal yaitu  $n_1 = (2.5, 2)$ ,  $n_2 = (1, 1.5)$ , dan  $n_3 = (2, 3.5)$  ke kesetimbangan  $P_2 = (0, 0.1765)$  dan memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan  $P_2$  yaitu bersifat stabil asimtotik. Pada Gambar 5 menunjukkan jumlah populasi predator terlihat mengalami penurunan. Hal ini karena tidak ada nya populasi prey atau ketika populasi prey punah dan juga dikarenakan adanya pemanenan yang berlebihan pada populasi predator serta adanya racun pada lingkungan perairan.

Simulasi numerik untuk memperlihatkan kestabilan titik kesetimbangan  $P_3 = (\check{q}, 0)$  dengan menggunakan nilai parameter yang sama pada Tabel 1 dan nilai awal yaitu  $n_1 = (2.5, 2)$ ,  $n_2 = (0.15, 1.6)$ , dan  $n_3 = (2, 3.5)$ , namun agar syarat eksistensi titik kesetimbangan  $P_3$  terpenuhi maka nilai  $\beta$  diubah yaitu  $\beta = 0.9$ . Nilai parameter tersebut memenuhi syarat eksistensi titik kesetimbangan  $P_3$ , yaitu  $1/4\delta + 1 = 1.2083 > \beta = 0.9$ . Nilai parameter yang diberikan juga memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan  $P_3$ , yaitu

$$\beta - 1 = -0.1 > -\check{q}(3\delta\check{q} + 2) = -0.298, \text{ dan } \epsilon = 0.7 > \rho\check{q} + \sigma = 0.6726.$$



Gambar 6. Potret fase ketika populasi predator punah



Gambar 7. Grafik predator-prey ketika populasi predator punah

Potret fase pada Gambar 6 untuk titik kesetimbangan  $P_3 = (\check{q}, 0)$ , menunjukkan bahwa orbit solusi dengan beberapa nilai awal yang berbeda menuju ke kesetimbangan

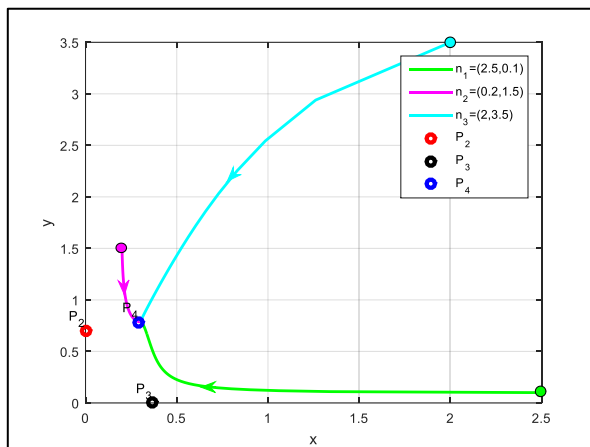


$P_3 = (0.0902, 0)$  dan memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan  $P_3$  yaitu bersifat stabil asimtotik. Pada Gambar 7 menunjukkan jumlah populasi *prey* terlihat mengalami penurunan. Hal ini terjadi ketika tidak ada nya populasi *predator* atau ketika populasi *predator* punah. Jumlah populasi *prey* terlihat mengalami penurunan dikarenakan adanya pemanenan yang berlebihan pada populasi *prey* dan juga ada nya racun pada lingkungan perairan.

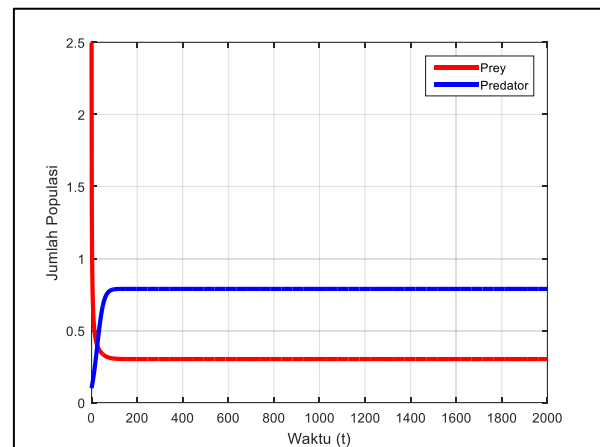
Simulasi numerik untuk memperlihatkan kestabilan titik kesetimbangan  $P_4 = \left(\hat{q}, \frac{\rho\hat{q}-\epsilon+\sigma}{\mu+\sigma}\right)$  dengan menggunakan nilai parameter yang sama pada Tabel 1 dan nilai awal yaitu  $n_1 = (2.5, 0.1)$ ,  $n_2 = (0.2, 1.5)$ , dan  $n_3 = (2, 3.5)$ , namun agar syarat eksistensi titik kesetimbangan  $P_4$  terpenuhi maka nilai  $\beta$  dan  $\epsilon$  diubah yaitu  $\beta = 0.41$  dan  $\epsilon = 0.05$ . Nilai parameter tersebut memenuhi syarat eksistensi titik kesetimbangan  $P_4$ , yaitu

$$b^2 = 0.7877 > 4ac = -1.4066.$$

Nilai parameter yang diberikan juga memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan  $P_4$ , yaitu  $Q_1 = 1.1428 > 0$  dan  $Q_2 = 0.3258 > 0$ .



Gambar 8. Potret fase ketika populasi *predator* punah



Gambar 9. Grafik populasi *predator-prey*

Potret fase pada Gambar 8 untuk titik kesetimbangan  $P_4 = \left(\hat{q}, \frac{\rho\hat{q}-\epsilon+\sigma}{\mu+\sigma}\right)$ , menunjukkan bahwa orbit solusi dengan beberapa nilai awal yang berbeda menuju ke kesetimbangan  $P_4 = (0.2911, 0.7856)$  dan memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan  $P_4$  yaitu bersifat stabil asimtotik. Pada Gambar 9 menunjukkan jumlah populasi *prey* terlihat mengalami penurunan dan jumlah populasi *predator* mengalami peningkatan. Jumlah populasi *prey* terlihat mengalami penurunan, hal ini dikarenakan adanya *predator* yang memangsa *prey*, serta pemanenan yang berlebihan pada populasi *prey* dan juga racun pada lingkungan perairan yang mengakibatkan populasi *prey* mengalami penurunan. Sedangkan jumlah populasi *predator* mengalami peningkatan, hal ini dikarenakan adanya populasi *prey*, serta kurangnya pemanenan pada populasi *predator* dan juga racun pada lingkungan perairan yang mengakibatkan populasi *predator* mengalami peningkatan.

## PENUTUP

Pada model *predator-prey* perikanan pada lingkungan perairan tercemar diperoleh empat titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan  $P_1$  atau trivial, titik kesetimbangan  $P_2$  ketika populasi *predator* punah, titik kesetimbangan  $P_3$  ketika populasi *prey* punah, dan titik kesetimbangan interior atau  $P_4$ . Titik kesetimbangan  $P_1$  selalu eksis, namun titik kesetimbangan  $P_2$ ,  $P_3$  dan  $P_4$  memerlukan syarat eksistensi untuk eksis. Berdasarkan analisis kestabilan pada empat titik kesetimbangan, titik kesetimbangan  $P_1$



atau trivial, titik kesetimbangan  $P_2$  ketika populasi *predator* punah, titik kesetimbangan  $P_3$  ketika populasi *prey* punah, dan titik kesetimbangan interior atau  $P_4$  bersifat stabil asimtotik lokal dengan beberapa syarat kestabilan. Simulasi numerik yang dilakukan menunjukkan hasil yang sesuai dengan analisis.

#### **DAFTAR PUSTAKA**

- [1] Hartono, (2007). *Geografi 1 Jelajah Bumi dan Alam Semesta : untuk Kelas X Sekolah Menengah Atas /Madrasah Aliyah*. Jakarta : Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional.
- [2] Boyce, W. E. dan DiPrima, R. C. (2001). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems: Seventh Edition*. John Wiley and Sons, New York.
- [3] Huang Q., Parshotam L., Wang H., Bampfylde C., Lewis M. A. (2013). A model for the impact of contaminants on fish population dynamics. *Journal of Theoretical Biologi* 334:71–79
- [4] Huang Q., Wang H., dan Lewis M. A. (2015). The impact of environmental toxins on predator–prey dynamics. *Journal of Theoretical Biologi* 378:12–30
- [5] Ang, T. K., Safuan, H. M., Sidhu, H. S., Jovanoski, Z., & Towers, I. N. (2019). Impact of Harvesting on a Bioeconomic Predator–Prey Fishery Model Subject to Environmental Toxicant . *Bulletin of Mathematical Biology*, 2748–2767.
- [6] Nagle, R. K., Saff, E. B., dan Snider, A. D. (2012). *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems Sixth Edition*. Inc. USA: Pearson Education.
- [7] Finizio, N. dan G. Ladas, (1982). *An Introduction to Differential Equations with Difference Equation, Fourier Series, and Partial Differential Equations*. Wadsworth Publishing Company. Belmont, California.
- [8] Allen, L. J. (2007). *An Introduction Tomathematical Biology*. Texas Tech University: Department Of Mathematics And Statistics.

## Penentuan Lokasi Strategis untuk Membangun Rumah Sakit di Wilayah Kabupaten Berau Menggunakan Pusat dan Pusat Berat

Sitti Hafsa<sup>1\*</sup>, Hasmawati<sup>1</sup>, Nur Erawaty<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Program Studi Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin

Dikirim: Juli 2022; Diterima: September 2022; Dipublikasi: September 2022

\*Alamat Email Korespondensi: [sitihafsa202@gmail.com](mailto:sitihafsa202@gmail.com)

### Abstrak

Diberikan sebuah graf terhubung  $G$  dengan himpunan titik  $V(G)$  dan himpunan sisi  $E(G)$ . Suatu daerah/wilayah dapat dimodelkan menjadi suatu graf, area tertentu menjadi titik graf dan hubungan dua area menjadi sisi graf. Pusat suatu graf adalah titik yang paling representatif ditinjau dari segi jarak yakni jarak antara dua area, sedangkan pusat berat adalah titik paling representatif ditinjau dari segi ukuran percabangan suatu titik yang dalam kenyataannya menyatakan banyaknya jalan menuju suatu area (titik pusat). Oleh karena itu, pusat dan pusat berat adalah titik yang dapat dinyatakan sebagai area strategis suatu wilayah. Penentuan lokasi strategis sebagai tempat untuk kepentingan umum pada suatu wilayah dilakukan dengan mengubah lebih dahulu suatu peta menjadi bentuk graf, kemudian menentukan pusat dan pusat berat graf tersebut. Dalam penelitian ini, dilakukan penentuan lokasi strategis untuk tempat membangun sarana kepentingan umum seperti rumah sakit atau sekolah dan lain-lain di wilayah Kabupaten Berau, Kalimantan Timur. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa Kecamatan Tabalar adalah daerah paling strategis dibanding tempat lain di Kabupaten Berau untuk ditempati membangun sarana kepentingan umum seperti rumah sakit, perguruan tinggi, atau sarana lainnya.

### Kata Kunci:

*Graf, pusat, pusat berat, terhubung, pohon perentang minimum.*

### PENDAHULUAN

Graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736, yang dapat dituliskan sebagai pasangan himpunan yang anggotanya disebut titik dan himpunan yang anggotanya disebut sisi (garis), [2]. Pengertian graf, notasi dan beberapa istilah yang digunakan dalam makalah ini merujuk ke referensi [2], [3], [4] dan [5]. Beberapa persoalan dalam masyarakat khususnya yang berobjek diskrit dapat direpresentasikan kedalam bentuk graf, yaitu: optimalisasi penjadwalan, penentuan basis suatu daerah, penentuan letak objek yang paling strategis, analisis jaringan, teori informasi, dan penentuan lokasi strategis, [1], [3], [8] dan [11]. Dari beberapa persoalan tersebut penentuan lokasi strategis sangat penting dilakukan guna mendapatkan tempat yang terbaik untuk pembangunan gedung suatu fasilitas umum, seperti rumah sakit.

Dalam tulisan berjudul “Analisis Potensi Peruntukan Lahan Rumah Sakit Dinilai dari Aspek Fisik dan Kebutuhan Penduduk dengan Sistem Informasi Geografis di Kota Semarang” tahun 2017 oleh Stella Purnomo dan kawan-kawan [5], menyebutkan bahwa salah satu faktor penentu dalam menentukan suatu lokasi rumah sakit adalah aksesibilitas yaitu jalan ke lokasi rumah sakit tersebut. Sedangkan kriteria jalan terbaik salah satunya adalah yang terpendek, dalam teori graf dikenal dengan istilah lintasan. Konsep dalam graf yang mempertimbangkan jarak antara lintasan yang satu dengan lintasan yang lain pada setiap dua titik dalam graf adalah konsep tentang pusat dan pusat berat suatu graf. Pusat berat suatu graf dapat diketahui dengan terlebih dahulu menentukan pohon perentangannya. Dalam makalah [7], [9], [10], [12] dan [13], mengatakan bahwa salah satu cara untuk memperoleh pohon perentang suatu graf adalah menggunakan Algoritma Prim atau Algoritma Kruskal.

Kabupaten Berau adalah salah satu kabupaten di Provinsi Kalimantan Timur yang berdekatan dengan wilayah calon Ibu Kota Negara Republik Indonesia. Mengantisipasi perkembangan di Kalimantan Timur dengan adanya Ibu Kota Negara, Kabupaten Berau perlu menentukan lokasi-lokasi strategis untuk fasilitas umum, di antaranya adalah Rumah Sakit Umum, Perguruan Tinggi, Kantor, dan lain-lain. Seperti yang telah disebutkan bahwa salah satu aspek penting dalam penentuan lokasi strategis adalah aksesibilitas berupa jalan menuju lokasi strategis. Pertimbangan yang digunakan untuk menentukan lokasi strategis pembangunan fasilitas umum di Kabupaten Berau dibatasi pada jarak antara dua titik dan akses jalan menuju ke kantor-kantor kecamatan (atau jarak antara kantor kecamatan yang berbeda).

## LANDASAN TEORI

Graf  $G$  adalah pasangan  $(V(G), E(G))$ , dimana  $V(G)$  adalah himpunan tak kosong dan berhingga yang elemen-elemennya disebut titik dan  $E(G)$  adalah himpunan (boleh kosong) pasangan-pasangan tak terurut dan berbeda dari elemen-elemen  $V(G)$ . Elemen-elemen dari  $E(G)$  disebut sisi dari  $G$ . Misalkan  $u, v$  titik di graf  $G$  dan  $e = uv \in E(G)$ , maka  $u$  disebut bertetangga dengan  $v$  dan demikian sebaliknya  $v$  bertetangga dengan  $u$  dan  $e$  terkait dengan  $u$  dan  $v$ . Banyaknya anggota dari  $V(G)$  disebut orde (*order*) dari  $G$  yang dinotasikan dengan  $p$  dan banyaknya anggota dari  $E(G)$  disebut ukuran (*size*) dari  $G$ , dinotasikan dengan  $q$ . Jarak antara dua titik  $u$  dan  $v$  pada graf terhubung  $G$  adalah panjang lintasan terpendek antara  $u$  dan  $v$  dan dinotasikan dengan  $d(u, v)$ .

Pusat adalah titik yang memiliki karakter sendiri dan bisa diketahui dengan menggunakan konsep jarak dalam teori graf. Dalam menentukan titik pusat pada suatu graf, terlebih dahulu dicari eksentrisitas dari titik-titiknya.

**Definisi 1.** Misalkan graf  $G$  terhubung dan  $v \in V(G)$ . Maka eksentrisitas titik  $v$  ditulis  $e(v)$  yakni  $e(v) = \max\{d(u, v) : u \in V(G)\}$  atau jarak terjauh antara titik  $v$  dengan titik lainnya.

**Definisi 2.** Diameter suatu graf atau  $\text{dim}(G)$  adalah lintasan terpanjang pada graf atau nilai maksimum dari eksentrisitas titik pada graf  $G$ , dapat ditulis  $\text{dim}(G) = \max\{e(v) : v \in V(G)\}$ .

**Definisi 3.** Titik  $v$  dikatakan titik pusat (*central vertex*) jika  $e(v) = r(G)$ . Dimana  $r(G)$  merupakan radius graf  $G$  atau eksentrisitas minimum pada graf  $G$ , dapat ditulis  $r(G) = \min\{e(v) : v \in V(G)\}$ .

Ada beberapa istilah untuk menentukan pusat berat suatu graf yang dapat dilihat pada definisi berikut,

**Definisi 4.** Misalkan  $T$  adalah graf pohon dan  $u$  adalah titik di  $T$ .

1. Cabang pohon  $T$  di titik  $u$  adalah subgraf dari  $T$  yang memiliki  $u$  sebagai titik akhir,
2. Bobot (*weight*) pohon  $T$  pada titik  $u$  ditulis  $\omega(u)$  adalah jumlah maksimum sisi di antara semua cabang  $T$  di titik  $u$ ,
3. Titik berat pohon  $T$  adalah  $v$  jika  $\omega(v) = \omega(T)$  dengan  $\omega(T) = \min\{\omega(u) \mid u \in V(T)\}$ .
4. Pusat berat dari pohon  $T$  adalah himpunan semua titik berat dari pohon  $T$ .

Setiap graf memiliki pusat dan pusat berat seperti yang ditunjukkan dalam teorema berikut,

**Teorema 1.** Setiap graf pohon mempunyai pusat yang terdiri atas satu atau dua titik yang bertetangga.

**Bukti :**

Untuk pohon  $K_1$  dan  $K_2$ , teorema benar. Misalkan  $T$  adalah graf pohon yang memiliki lebih dari dua titik. Bentuk graf pohon  $T'$  dengan menyapkan titik-titik ujung dari  $T$ . Pusat dari  $T'$  adalah pusat  $T$ . Dan eksentrisitas setiap titik  $T'$  berkurang 1. Jika proses ini diteruskan akan diperoleh subpohon  $T''$ ,  $T'''$ , dan seterusnya yang pusatnya adalah pusat graf pohon  $T$ . Graf pohon yang terakhir yang diperoleh melalui proses pelenyapan titik-titik ujung adalah pohon  $K_1$  dan  $K_2$  yang pusatnya adalah pusat graf pohon  $T$ . Jadi terbukti bahwa pusat graf pohon terdiri atas satu atau dua titik. ■

Pada penentuan pusat berat suatu graf, ditentukan lebih dulu pohon perentang minimum dari graf tersebut. Seperti yang telah disebutkan bahwa ada dua algoritma yang biasa dipakai peneliti dalam penentuan pohon perentang yakni Algoritma Prim dan Algoritma Kruskal. Dalam makalah ini digunakan Algoritma Kruskal.

## Algoritma Kruskal

### Langka-langkah

1. Isi  $T$  semua titik-titik  $G$  tanpa garis
2.  $m = 0$
3. Selama  $m < (n-1)$  lakukan :
  - a. Tentukan garis  $e \in E$  dengan bobot minimum. Jika ada beberapa  $e$  dengan sifat tersebut, pilih salah satu secara sembarang
  - b. Hapus  $e$  dari  $E$ .
  - c. Jika  $e$  di tambahkan ke  $T$  tidak menghasilkan sirkuit, maka
    - i. Tambahkan  $e$  ke  $T$
    - ii.  $m = m+1$

## **HASIL DAN PEMBAHASAN**

Kabupaten Berau merupakan salah satu kabupaten yang terletak di Provinsi Kalimantan Timur yang terdiri atas 13 kecamatan. Peta Kabupaten Berau dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Peta Kabupaten Berau  
Sumber : [geoportal.beraukab.go.id](http://geoportal.beraukab.go.id)

Peta Kabupaten Berau ini akan dibuatkan model grafnya dengan terlebih dahulu memberikan asumsi sebagai berikut :

1. Lebar jalan yang menghubungkan setiap dua kecamatan adalah sama,
2. Setiap kecamatan memiliki pemukiman dengan kepadatan penduduk yang sama.
3. Kualitas jalan dan kepadatan kendaraan di setiap jalan dianggap sama.
4. Semua warga memiliki kepentingan yang sama terhadap fasilitas umum.

### 1) Model Graf Kabupaten Berau

Model graf Kabupaten Berau dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut:

1. Kantor kecamatan dinyatakan sebagai titik, dan
2. Dua titik bertetangga apabila dua kecamatan yang bersesuaian dengan kedua titik tersebut berbatasan secara langsung dan terdapat jalan yang menghubungkannya.
3. Jarak dua titik berdasarkan konsep jarak dalam graf, (bukan menyatakan kilometer atau meter).
4. Area yang terisolir (pulau) dinyatakan sebagai titik terisolir.
5. Graf yang menjadi objek penelitian adalah graf terhubung. Dalam hal ini, jika terdapat pulau pada wilayah yang berarti titik terisolir dalam model grafnya, maka pulau tersebut diabaikan.

Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut diperoleh titik-titik pada graf sebagai berikut

:

Titik *a* = Kantor Kecamatan Kelay

Titik *b* = Kantor Kecamatan Segah

Titik *c* = Kantor Kecamatan Gunung Tabur

Titik *d* = Kantor Kecamatan Teluk Bayur

Titik *e* = Kantor Kecamatan Tanjung Redeb

Titik *f* = Kantor Kecamatan Pulau Derawan

Titik *g* = Kantor Kecamatan Sambaliung

Titik *h* = Kantor Kantor Kecamatan Tabalar

Titik *i* = Kantor Kecamatan Biatan

Titik *j* = Kantor Kecamatan Talisayan

Titik *k* = Kantor Kecamatan Batu Putih

Titik  $l$  = Kantor Kecamatan Biduk-Biduk

Titik  $m$  = Kantor Kecamatan Maratua



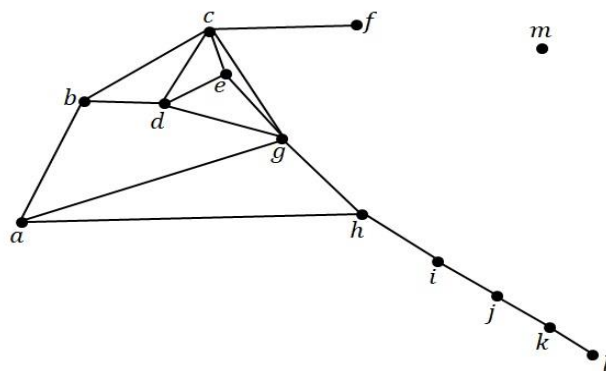
Gambar 2. Representasi Titik sebagai Daerah Kecamatan

Mengingat dua titik dihubungkan oleh sebuah sisi apabila titik-titik tersebut mempresentasikan wilayah kecamatan yang berbatasan langsung, maka *prototype* graf Kabupaten Berau adalah graf berwarna merah pada peta pada Gambar 3.



Gambar 3. *Prototype* Graf Peta Kabupaten Berau

Graf pada Peta Gambar 3 adalah sebagai berikut :



Gambar 4. Model Graf Wilayah Kabupaten Berau

## 2) Pusat dan Pusat Berat Dari Model Graf Kabupaten Berau

Model graf dari Kabupaten Berau dinotasikan sebagai  $G_B$ . Dengan demikian himpunan titik dan himpunan sisi graf  $G_B$  berturut-turut  $V(G_B) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m\}$  dan  $E(G_B) = \{(a, b), (a, g), (a, h), (b, c), (b, d), (c, d), (c, e), (c, f), (c, g), (d, e), (d, g), (e, g), (g, h), (h, i), (i, j), (j, k), (k, l)\}$ . Sisi  $(a, b) \in E(G_B)$ , selanjutnya hanya ditulis  $ab$ .

Dalam penentuan pusat graf  $G_B$ , terlebih dahulu ditentukan eksentrisitas setiap titik  $v$  pada graf  $G_B$  sebagai berikut :

$$\begin{aligned} e(a) &= \max\{d(a, b), d(a, c), d(a, d), d(a, e), d(a, f), d(a, g), d(a, h), d(a, i), \\ &\quad d(a, j), d(a, k), d(a, l)\} \\ &= \max\{1, 2, 2, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 4, 5\} \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(b) &= \max\{d(b, a), d(b, c), d(b, d), d(b, e), d(b, f), d(b, g), d(b, h), d(b, i), \\ &\quad d(b, j), d(b, k), d(b, l)\} \\ &= \max\{1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(c) &= \max\{d(c, a), d(c, b), d(c, d), d(c, e), d(c, f), d(c, g), d(c, h), d(c, i), d(c, j), \\ &\quad d(c, k), d(c, l)\} \\ &= \max\{2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(d) &= \max\{d(d, a), d(d, b), d(d, c), d(d, e), d(d, f), d(d, g), d(d, h), d(d, i), \\ &\quad d(d, j), d(d, k), d(d, l)\} \\ &= \max\{2, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(e) &= \max\{d(e, a), d(e, b), d(e, c), d(e, d), d(e, f), d(e, g), d(e, h), d(e, i), d(e, j), \\ &\quad d(e, k), d(e, l)\} \\ &= \max\{2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(f) &= \max\{d(f, a), d(f, b), d(f, c), d(f, d), d(f, e), d(f, g), d(f, h), d(f, i), \\ &\quad d(f, j), d(f, k), d(f, l)\} \\ &= \max\{3, 2, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \\ &= 7 \end{aligned}$$

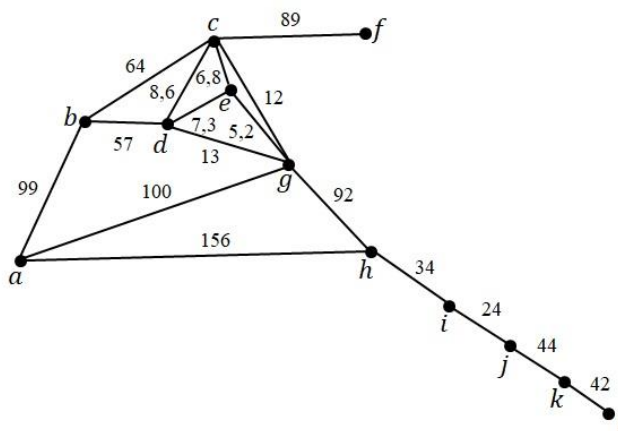
Dengan cara yang serupa diperoleh :

$$e(g) = 5, e(h) = 4, e(i) = 4, e(j) = 5, e(k) = 6, \text{ dan } e(l) = 7.$$

Berdasarkan eksentrisitas titik-titik pada graf  $G_B$  diperoleh eksentrisitas minimum  $r(G_B) = 4$ . Karena  $e(h)$  dan  $e(i)$  sama dengan 4 maka titik sentral graf  $G_B$  adalah titik  $h$  dan titik  $i$ . Sehingga pusat graf  $G_B$  adalah himpunan yang terdiri atas dua titik yaitu  $\{h, i\}$ .

Untuk melengkapi penentuan lokasi strategis, digunakan konsep pusat berat yakni melalui pohon perentang minimum dari graf  $G_B$ . Karena di dalam penentuan pohon perentang minimum dibutuhkan bobot (nilai) pada sisi Graf  $G_B$ , maka terlebih dahulu diberikan bobot setiap sisi pada graf  $G_B$  yakni jarak setiap dua kantor kecamatan. Jarak tersebut diperoleh berdasarkan pengukuran jarak dari masing-masing kantor kecamatan yang wilayahnya berbatasan langsung, dengan mengambil

data pada Google Map. Berdasarkan data tersebut diperoleh graf berbobot  $G_B$  sebagai berikut:



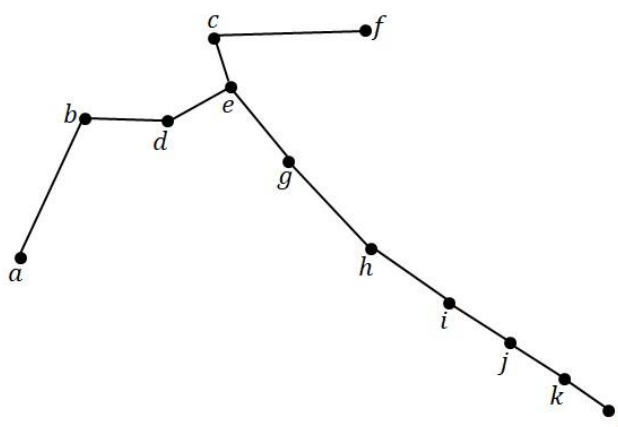
Gambar 6. Bobot pada Graf  $G_B$

Selanjutnya, dicari pohon perentang minimum Graf  $G_B$  menggunakan Algoritma Kruskal dengan langkah-langkah sebagai berikut :  
Urutkan sisi pada graf  $G_B$  dari bobot terkecil ke bobot terbesar, diperoleh

Tabel 1. Sisi dan Bobot

Sisi	$eg$	$ce$	$de$	$cd$	$cg$	$dg$	$ij$	$hi$	$kl$	$jk$	$bd$	$bc$	$cf$	$gh$	$ab$	$ag$	$ah$
Bobot	5,2	6,8	7,3	8,6	12	13	24	34	42	44	57	64	89	92	99	100	156

Dengan diketahuinya bobot setiap sisi pada model graf Kabupaten Berau dan dengan menggunakan Algoritma Kruskal diperoleh pohon perentang minimum model graf Kabupaten Berau seperti yang diberikan pada Gambar 7 berikut.



Gambar 7. Pohon Perentang Minimum  $T_B$

Pusat berat adalah himpunan dari titik berat suatu pohon perentang minimum, dimana titik berat atau  $\omega(T) = \min\{\omega(u) | u \in V(T)\}$ . Misalkan pohon perentang minimum dari Graf  $G_B$  disebut Pohon  $T_B$ . Selanjutnya akan dicari titik yang menjadi pusat berat dari pohon perentang tersebut. Caranya yaitu dengan menentukan lebih dulu bobot



pada setiap titik Pohon  $T_B$ . Dalam hal ini bobot yang digunakan berbeda dengan bobot sisi yang telah dijelaskan sebelumnya. Bobot titik adalah banyaknya sisi pada cabang terbesar titik yang dimaksud. Berdasarkan bentuk pohon perentang dari graf  $G_B$  pada Gambar 7, diperoleh bobot-bobot titiknya seperti berikut:

$$\omega(a) = \text{maks}\{11\} = 11, \omega(b) = \text{maks}\{1, 10\} = 10, \omega(c) = \text{maks}\{1, 10\} = 10$$

$$\omega(d) = \text{maks}\{2, 9\} = 9, \omega(e) = \text{maks}\{2, 3, 6\} = 6, \omega(f) = \text{maks}\{11\} = 11$$

$$\omega(g) = \text{maks}\{5, 6\} = 6, \omega(h) = \text{maks}\{4, 7\} = 7, \omega(i) = \text{maks}\{3, 8\} = 8$$

$$\omega(j) = \text{maks}\{2, 9\} = 9, \omega(k) = \text{maks}\{1, 10\} = 10, \omega(l) = \text{maks}\{11\} = 11.$$

Dari bobot-bobot setiap titik pohon  $T_B$  dipilih titik yang berbobot minimum yaitu 6. Titik-titik yang berbobot minimum adalah  $\omega(e) = 6$  dan  $\omega(g) = 6$ . Jadi titik  $e$  dan titik  $g$  yang merupakan pusat berat dari pohon  $T_B$ . Sehingga pusat berat pohon  $T_B$  adalah himpunan yang terdiri atas dua titik yaitu  $\{e, g\}$ . Dari pembahasan tentang pusat diperoleh pusat graf  $G_B$  yaitu  $\{h, i\}$ . Di sini dapat dilihat bahwa tidak ada titik yang beririsan antara Pusat graf  $G_B$  dan Pusat Berat pohon  $T_B$ , sehingga di dalam penentuan lokasi strategis dapat memilih salah satu di antara dua titik yang bertetangga yaitu titik  $g$  dan titik  $h$ . Titik  $g$  menyatakan Kantor Kecamatan Sambaliung dan titik  $h$  menyatakan Kantor Kecamatan Tabalar. Letak kecamatan Sambaliung dan Kecamatan Tabalar dapat dilihat pada Peta kabupaten Berau pada Gambar 8.



Gambar 8. Peta Lokasi Strategis di Kabupaten Berau  
Sumber : peta-kota.blogspot.com

## PENUTUP

Berdasarkan pembahasan diperoleh pusat graf  $G_B$  yaitu  $\{h, i\}$  dan diperoleh pusat berat pohon  $T_B$  yaitu  $\{e, g\}$ . Jadi titik yang paling representatif pada graf  $G_B$  adalah dua titik yang bertangga pada Pusat dan Pusat Berat graf  $G_B$  yakni titik  $g$  dan titik  $h$ . Titik  $g$  menyatakan Kecamatan Sambaliung dan titik  $h$  menyatakan Kecamatan Tabalar. Jadi apabila pemerintah Kabupaten Berau ingin membangun suatu fasilitas untuk masyarakat umum seperti rumah sakit atau yang lainnya, sebaiknya ditempatkan di Kecamatan Sambaliung dan Kecamatan Tabalar.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Eka R., Septiana dan Budi Rahadjeng. (2012). Dimensi matrik pada graf lintasan, graf komplit, graf sikel, graf bintang, dan graf bipartit komplit: *Jurnal Unesa*. 6 September 2021. <https://media.neliti.com/media/publications/248331-dimensi-metrik-pada-graf-lintasan-graf-k-04760a21.pdf>
- [2] Hasmawati. (2020). *Pengantar dan Jenis-Jenis Graf*. Makassar: UPT Unhas Press.
- [3] Ishartono, Naufal. (2018). Bahan kuliah matematika diskrit topik teori graf. academia.edu.
- [4] Munir, Rinaldi. (2005). *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung.
- [5] Munir, Rinaldi. (2012). *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika.
- [6] Purnomo, Stella., dkk. (2017). Analisis potensi peruntukan lahan rumah sakit dinilai dari aspek fisik dan kebutuhan penduduk dengan sistem informasi geografis di kota semarang. *Jurnal Geodesi Undip*. 226-235. September.
- [7] Putra, Erfandi Suryo. (2016). Pencarian lintasan terpendek pada peta digital menggunakan teori graf. <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2016-2017/Makalah2016/Makalah-Matdis-2016-073.pdf>
- [8] Romelta, Edwin. (2009). Metode pencarian lintasan terpendek dalam graf. 26 April 2021. <https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/20092010/Makalah0910/MakalahStrukdis0910-075.pdf>
- [10] Sam, Marwan dan Yuliani. (2016). Penerapan algoritma prim untuk membangun pohon merentang minimum (*minimum spanning tree*) dalam pengoptimalan jaringan transmisi nasional provinsi sulawesi selatan: *Jurnal Dinamika*. 50-61. Juli.
- [11] Siang, J. (2002). *Matematika diskrit dan aplikasinya dalam ilmu komputer*. Yogyakarta: Andi Penerbit.
- [12] Syaputra, Aidil. 2012. *Aplikasi Pohon Merentang (Spanning Tree) dalam Pengoptimalan Jaringan Listrik*. Bandung. ITB.
- [13] Umi Latifah dan Endang Sugiharti (2015), *Penerapan Algoritma Prim dan Kruskal Pada Jaringan Distribusi Air PDAM Tirta Moedal Cabang Semarang Utara*. UNNES Journal of Mathematics, Semarang UNNES.

# Penerapan Teori Permainan Berbasis Logika Fuzzy dalam Menentukan Strategi Pemasaran Optimal pada Penyedia Layanan Internet

Kamalin Mastura<sup>1,\*</sup>, Syaripuddin<sup>1</sup>, Qonita Qurrota A'yun<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Laboratorium Matematika Komputasi Program Studi Matematika FMIPA Universitas Mulawarman*

Dikirim: Juni 2022;

Diterima: Juli 2022;

Dipublikasi: September 2022

\*Alamat Email Korespondensi: [kamalinmastura107@gmail.com](mailto:kamalinmastura107@gmail.com)

## Abstrak

Teori permainan adalah pendekatan matematis untuk merumuskan situasi kompetitif dan konflik antara kepentingan yang berbeda. Teori permainan memiliki konsep dasar dalam menyelesaikan suatu kompetisi, meliputi jumlah pemain, nilai permainan, dan strategi permainan. Penelitian ini menerapkan teori permainan yang melibatkan dua pemain yaitu pemain  $P_1$  adalah Telkomsel dan pemain  $P_2$  adalah Indosat. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan strategi yang optimal dari masing-masing penyedia layanan internet agar dapat memperoleh keuntungan dan mengurangi kerugian yang disebabkan oleh penilaian konsumen melalui suatu model matematika dan penyelesaian secara numerik dari matriks permainan. Responden konsumen dalam penelitian ini adalah mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Mulawarman. Matriks permainan diperoleh dari logika fuzzy melalui proses fuzzifikasi dan defuzzifikasi. Pendekatan numerik yang dilakukan pada matriks dari logika fuzzy adalah menggunakan pemrograman linier dengan metode penyelesaian yang digunakan adalah metode simpleks dan dual simpleks untuk memperoleh solusi optimum. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa strategi pemasaran yang optimal untuk kedua penyedia layanan internet adalah atribut kecepatan internet untuk pemain  $P_2$  (Indosat) dan atribut jangkauan jaringan untuk pemain  $P_1$  (Telkomsel) dengan nilai permainan atau *saddle point* yang diperoleh adalah 9,76388. Atribut yang paling dipentingkan oleh responden konsumen adalah jangkauan jaringan dan kecepatan internet. Pada analisis kepuasan diperoleh hasil bahwa pengguna Telkomsel menunjukkan tingkat kepuasan tertinggi pada atribut jangkauan jaringan dengan nilai rata-rata 7,80342 sedangkan pengguna Indosat menunjukkan tingkat kepuasan tertinggi pada atribut kemudahan mendapatkan produk dengan nilai rata-rata 7,47863.

## Kata Kunci:

*Logika Fuzzy, Pemrograman Linier, Teori Permainan*

## PENDAHULUAN

Teori permainan memiliki konsep dasar dalam menyelesaikan suatu kompetisi, meliputi jumlah pemain, nilai permainan, dan strategi permainan. Setiap konsep permainan yang dianalisis oleh teori permainan selalu dapat dinyatakan dalam bentuk matriks permainan [1].

Matriks permainan dapat digunakan untuk menggambarkan persaingan pasar. Salah satu contoh spesifik dari persaingan pasar adalah pemasaran. Pemasaran adalah desain dan proses untuk mengomunikasikan, menyampaikan, dan mempertukarkan proposisi nilai bagi masyarakat umum (pelanggan). Pemasaran bukan hanya kegiatan untuk menjual barang dan jasa, tetapi juga untuk memenuhi keinginan dan kebutuhan konsumen dengan cara membuat konsumen senang melalui penciptaan, penyediaan dan pertukaran produk yang memiliki nilai [2].

Permasalahan persaingan pemasaran yang terjadi di masyarakat dapat diselesaikan dengan teori permainan sederhana namun pada beberapa kondisi, untuk mengatasi kasus permainan yang berdimensi lebih besar digunakan pendekatan teori permainan dengan metode model pemrograman linier. Model pemrograman linier secara umum terdiri dari dua bagian, yaitu fungsi tujuan dan fungsi kendala. Fungsi tujuan adalah persamaan fungsi linier dari variabel target, seperti pendapatan, laba, atau biaya. Fungsi tujuan dapat menggambarkan bahwa fungsi variabel harus dimaksimalkan atau diminimalkan [3].

Salah satu asumsi pemrograman linier adalah asumsi kepastian, tetapi ada juga masalah yang melibatkan ketidakpastian. Dalam situasi ini, parameter masalah teori permainan dapat diselesaikan dengan logika *fuzzy*. Berdasarkan penelitian terdahulu yang juga menggunakan metode teori permainan berbasis logika *fuzzy* telah dilakukan beberapa di antaranya membahas aplikasi logika *fuzzy* dan teori permainan pada persaingan Alfamart dan Indomaret yang menghasilkan kesimpulan bahwa atribut kenyamanan berbelanja adalah yang paling dipentingkan konsumen dalam memilih mini market sebagai tempat berbelanja dengan permainan dimenangkan oleh mini market Indomaret dengan menggunakan strategi kenyamanan berbelanja [4]. Penelitian lainnya membahas persaingan pemasaran produk susu cair dalam kemasan siap minum dan menghasilkan kesimpulan bahwa pada persaingan produk susu cair, atribut pemasaran yang diunggulkan untuk *frisian flag* yaitu kesegaran susu, atribut pemasaran yang diunggulkan untuk *indomilk* yaitu iklan, sedangkan atribut pemasaran yang diunggulkan untuk *greenfield* yaitu ketersediaan susu [5].

Penelitian ini menerapkan teori permainan berbasis logika *fuzzy* untuk mengetahui persaingan dalam menentukan strategi pemasaran optimal yang terjadi antara Telkomsel dan Indosat dan mendapatkan komponen yang diutamakan oleh mahasiswa jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Mulawarman dalam memilih dan menggunakan jasa penyedia layanan internet Telkomsel maupun Indosat. Untuk mendapatkan strategi pemasaran optimal dan komponen yang diutamakan maka ditetapkan batasan masalah yaitu, atribut responden yang dipertimbangkan dalam penelitian ini hanya dibatasi pada harga kuota internet, jangkauan jaringan, kecepatan internet, kapasitas kuota yang ditawarkan, promo/diskon, masa aktif, dan kemudahan mendapatkan produk.

## LANDASAN TEORI

### 1. Logika *Fuzzy*

Logika *fuzzy* adalah suatu proses untuk memetakan ruang *input* ke suatu ruang *output* [6]. Terdapat beberapa alasan penggunaan logika *fuzzy*, yaitu [7]:

- Konsep logika *fuzzy* mudah di mengerti
- Logika *fuzzy* sangat fleksibel
- Logika *fuzzy* memiliki toleransi terhadap data-data yang tidak tepat
- Logika *fuzzy* berdasarkan pada bahasa alami
- Logika *fuzzy* dapat mengambil keputusan secara tepat dengan melihat bobot

### 2. Fuzzifikasi dan Defuzzifikasi

Fuzzifikasi adalah langkah pertama menuju penerapan sistem inferensi *fuzzy*. Kebanyakan variabel yang ada di dunia nyata adalah variabel yang terdefinisi dengan tegas (*crisp*) atau klasik. Proses fuzzifikasi dilakukan dengan membentuk *Triangular fuzzy number* (TFN) dari nilai persepsi responden [8]. Perhitungan fuzzifikasi terhadap data persepsi responden dilakukan dengan menggunakan langkah awal yang terdiri dari mencari nilai  $a_i$ ,  $b_i$ , dan  $c_i$  untuk masing-masing kriteria dengan cara sebagai berikut [9]: Nilai batas bawah ( $a_i$ ):

$$a_i = \frac{b_{i1} \times n_1 + b_{i2} \times n_2 + b_{i3} \times n_3 + \dots + b_{i(k-1)} \times n_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k} \quad (1)$$

Nilai tengah ( $b_i$ ):

$$b_i = \frac{b_{i1} \times n_1 + b_{i2} \times n_2 + b_{i3} \times n_3 + \dots + b_{ik} \times n_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k} \quad (2)$$

Nilai batas atas ( $c_i$ ):

$$c_i = \frac{b_{i2} \times n_1 + b_{i3} \times n_2 + \dots + b_{ik} \times n_{(k-1)} + b_{ik} \times n_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k} \quad (3)$$

Keterangan:

$b_{ik}$  = bobot variabel linguistik ke- $k$  pada atribut  $i$

$n_k$  = jumlah responden yang memilih variabel linguistik ke- $k$

$k$  = variabel linguistik (1, 2, 3, ...)

Defuzzifikasi dapat didefinisikan sebagai proses memodifikasi himpunan *fuzzy*. Himpunan *fuzzy* ditampilkan sebagai *output* himpunan *fuzzy* menggunakan fungsi keanggotaan dan mengembalikan bentuk tegas (*crisp*). Prosesnya adalah nilai keluaran *fuzzy* yang diperoleh dari evaluasi aturan diambil dan dimasukkan ke dalam keluaran fungsi keanggotaan. Nilai-nilai ini dimasukkan ke dalam metode defuzzifikasi untuk mendapatkan hasil akhir, yang disebut *crisp output* [10]. Nilai defuzzifikasi dan dirumuskan sebagai [9]:

$$\text{Defuzzifikasi} = \frac{a_i + b_i + c_i}{3} \quad (4)$$

### 3. Teori Permainan

Teori permainan adalah suatu bentuk kompetisi antara dua individu/pihak atau dua kelompok/grup yang saling bertentangan dan bersaing menggunakan aturan yang diketahui saling bertentangan [11]. Terdapat beberapa langkah yang perlu diperhatikan dalam menyelesaikan teori permainan antara lain [5]:

- a) Membentuk matriks permainan. Matriks permainan berisi nilai pembayaran (*pay off*).
- b) Menentukan pemain baris dan pemain kolom.
- c) Menemukan nilai terkecil pada setiap baris dengan nilai terkecil di antara *pay off* yang ada.
- d) Menemukan nilai terbesar pada setiap kolom dengan nilai terbesar di antara *pay off* yang ada.
- e) Menentukan nilai maksimin, yaitu nilai maksimum dari nilai minimum pada minimum baris.
- f) Menentukan nilai minimaks, yaitu nilai minimum dari nilai maksimum pada maksimum kolom.
- g) Menghitung *saddle point* untuk menentukan apakah strategi yang digunakan adalah strategi murni, atau strategi campuran. Jika nilai maksimin dan minimaks sama, maka strategi sudah optimal dan pemain hanya perlu menggunakan satu strategi saja. Namun, jika maksimin dan minimaks tidak sama, strateginya tidak optimal dan perlu menggunakan strategi campuran.

### 4. Pemrograman Linier

Pemrograman linier adalah metode aplikasi matematika yang dikembangkan pada tahun 1947 oleh George B. Dantzig. Pemrograman linier menggunakan model matematika



- $N$  = jumlah subyek  
 $X$  = skor suatu *item*  
 $Y$  = skor total  
 $\sum XY$  = jumlah perkalian antara variabel  $X$  dan  $Y$   
 $\sum X^2$  = jumlah dari kuadrat nilai  $X$   
 $\sum Y^2$  = jumlah dari kuadrat nilai  $Y$

## 6. Uji Reliabilitas

Uji reliabilitas penelitian adalah pengujian yang dilakukan untuk mengetahui tingkat kepercayaan (keandalan) suatu pertanyaan dalam mengukur variabel yang diteliti. Suatu instrumen penelitian dapat memiliki tingkat reliabilitas yang tinggi apabila hasil pengujian instrumen tersebut menunjukkan hasil yang relatif sama/tetap (konsisten). Pengujian reliabilitas dilakukan dengan menggunakan pendekatan reliabilitas konsistensi internal (*internal consistency reliability*) yang menggunakan *alpha cronbach* untuk mengetahui seberapa baik hubungan antar *item-item* instrumen penelitian [14].

$$r_i = \frac{K}{(K-1)} \left\{ 1 - \frac{\sum s_i^2}{s_t^2} \right\} \quad (8)$$

Rumus untuk varians total dan varians *item*

$$s_t^2 = \frac{\sum X_t^2}{n} - \frac{(\sum X_t)^2}{n^2} \quad (9)$$

$$s_i^2 = \frac{JK_i}{n} - \frac{JK_s}{n^2} \quad (10)$$

Keterangan:

- $r_i$  = koefisien reliabilitas  
 $K$  = jumlah *item* dalam instrumen  
 $\sum s_i^2$  = jumlah varians skor tiap-tiap *item*  
 $s_t^2$  = varians total  
 $JK_i$  = jumlah kuadrat seluruh *item*  
 $JK_s$  = jumlah kuadrat subyek

[16]

## METODOLOGI PENELITIAN

Pada penelitian ini, metode yang digunakan untuk memperoleh informasi dari responden berupa kuesioner. Jenis kuesioner yang digunakan penulis adalah kuesioner tertutup, yaitu kuesioner yang menawarkan pilihan jawaban. Skala *likert* digunakan dalam mengukur tanggapan terhadap kuesioner yang disajikan kepada responden.

Populasi dalam penelitian ini adalah mahasiswa jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Mulawarman angkatan 2018, 2019, 2020, dan 2021 menggunakan layanan internet Telkomsel dan Indosat dengan teknik penarikan sampel terlapis proporsional (*Stratified Random Sampling*).

## Teknik Analisis Data

Teknik analisis data yang digunakan dalam penelitian ini adalah pengujian instrumen penelitian, mengolah data dengan *fuzzy*, dan mengolah data dengan teori permainan. Berikut tahapan-tahapan analisis yang dilakukan dalam penelitian ini:

- 1) Melakukan uji kecukupan data menggunakan rumus Slovin

- 2) Melakukan uji validitas data menggunakan rumus korelasi *product and moment* dan uji reliabilitas pada pre-kuesioner menggunakan rumus *alpha cronbach*
- 3) Melakukan uji validitas menggunakan rumus korelasi *product and moment* dan uji reliabilitas pada kuesioner formal menggunakan rumus *alpha cronbach*
- 4) Melakukan proses fuzzifikasi menggunakan *triangular fuzzy number*
- 5) Menemukan nilai tegas tunggal melalui proses defuzzifikasi menggunakan Persamaan (4)
- 6) Membentuk matriks permainan dari hasil defuzzifikasi
- 7) Menentukan pemain P<sub>1</sub> dan pemain P<sub>2</sub>
- 8) Menentukan nilai minimaks dan maksimin
- 9) Membentuk matriks pembayaran menjadi model pemrograman linier sesuai persamaan (5) dan (6)
- 10) Mencari strategi optimal menggunakan metode pemrograman linier. Selain pengerjaan secara manual, hasilnya juga diverifikasi dengan menggunakan *software Matlab*.
- 11) Melakukan analisis terhadap strategi yang paling optimal untuk setiap pemain setelah didapat nilai permainannya

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### 1. Uji Validitas Data

Karakteristik untuk memperoleh koefisien validitas atribut yang terdiri dari banyaknya responden, jumlah skor dalam distribusi X dan Y, dan jumlah kuadrat dalam skor distribusi X dan Y dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Karakteristik untuk Memperoleh Koefisien Validitas

No.	Atribut	N	$\Sigma X$	$\Sigma Y$	$\Sigma XY$	$\Sigma X^2$	$\Sigma Y^2$
1	Harga kuota internet	30	128	902	3.942	576	27.698
2	Jangkauan jaringan	30	139	902	4.236	659	27.698
3	Kecepatan internet	30	140	902	4.256	670	27.698
4	Kapasitas Kuota yang ditawarkan	30	131	902	4.001	591	27.698
5	Promo/diskon	30	128	902	3.946	576	27.698
6	Masa aktif	30	115	902	3.599	487	27.698
7	Kemudahan mendapatkan produk	30	121	902	3.718	513	27.698

Uji validitas data dilakukan pada hasil *pre-kuesioner* dengan nilai  $N = 30$  dan  $\alpha = 0,05$  maka  $r_{tabel} = 0,361$ . Rekapitulasi hasil uji validitas data *pre-kuesioner* untuk atribut jangkauan jaringan, kecepatan internet, kapasitas kuota, promo, masa aktif, dan kemudahan mendapatkan produk dapat dilihat pada Tabel 2

Tabel 2. Hasil Uji Validitas Data Pre-Kuesioner

No.	Atribut	Nilai $r_{hitung}$	Nilai $r_{tabel}$	Keterangan
1	Harga kuota internet	0,711	0,361	Valid
2	Jangkauan jaringan	0,610	0,361	Valid
3	Kecepatan internet	0,476	0,361	Valid
4	Kapasitas kuota yang ditawarkan	0,595	0,361	Valid
5	Promo/diskon	0,742	0,361	Valid
6	Masa aktif	0,865	0,361	Valid
7	Kemudahan mendapatkan produk	0,665	0,361	Valid



Pada Tabel 2 terlihat bahwa secara keseluruhan hasil uji menunjukkan  $r_{hitung} > r_{tabel}$ , sehingga dapat disimpulkan bahwa seluruh atribut pada data *pre-kuesioner* bersifat valid.

## 2. Uji Reliabilitas Data

Karakteristik untuk memperoleh reliabilitas kuesioner yang terdiri dari banyak responden, jumlah skor dalam distribusi X, jumlah kuadrat dalam skor distribusi X, dan kuadrat dari jumlah skor dalam distribusi X ditunjukkan pada Tabel 3.

Tabel 3. Karakteristik untuk Memperoleh Koefisien Reliabilitas

No.	Atribut	N	$\Sigma X$	$(\Sigma X)^2$	$\Sigma X^2$
1	Harga kuota internet	30	128	16.384	576
2	Jangkauan jaringan	30	139	19.321	659
3	Kecepatan internet	30	140	19.600	670
4	Kapasitas kuota yang ditawarkan	30	131	17.161	591
5	Promo/diskon	30	128	16.384	576
6	Masa aktif	30	115	13.225	487
7	Kemudahan mendapatkan produk	30	121	14.641	513
Jumlah			902	116.716	4.074

Sebelum melakukan perhitungan koefisien reliabilitas ( $r_i$ ), terlebih dahulu dilakukan perhitungan jumlah varians skor tiap-tiap *item* pertanyaan ( $s_i^2$ ) dan varians total ( $s_t^2$ ) menggunakan rumus pada Persamaan (9) dan (10):

$$s_t^2 = \frac{27.698}{30} - \frac{(902)^2}{30^2} = 19,262$$

$$s_i^2 = \frac{4.072}{30} - \frac{116.716}{30^2} = 6,049$$

Jika dimasukkan dalam rumus *alpha cronbach* pada Persamaan (8) diperoleh:

$$\begin{aligned} r_i &= \frac{7}{(7-1)} \left\{ 1 - \frac{6,049}{19,262} \right\} \\ &= 1,16667 \times 0,68596 \\ &= 0,8003 \end{aligned}$$

Dari hasil uji reliabilitas pada *pre-kuesioner* dengan menggunakan rumus *alpha cronbach* diperoleh koefisien reliabilitas  $r_i = 0,8003$ , karena  $r_i = 0,8003 > 0,599$  maka hal ini menunjukkan jawaban responden terhadap pertanyaan adalah konsisten artinya kuesioner reliabel.

Selanjutnya adalah uji validitas dan uji reliabilitas pada kuesioner formal. Berdasarkan uji validitas dan uji reliabilitas menggunakan SPSS 25 diperoleh:

Tabel 4. Hasil Uji Validitas Data Kuesioner Formal

Tingkat Kepentingan				
No.	Atribut	Nilai $r_{hitung}$	Nilai $r_{tabel}$	Keterangan
1	Harga kuota internet	0,690	0,223	Valid
2	Jangkauan jaringan	0,492	0,223	Valid
3	Kecepatan internet	0,531	0,223	Valid
4	Kapasitas kuota yang ditawarkan	0,754	0,223	Valid
5	Promo/diskon	0,664	0,223	Valid
6	Masa aktif	0,752	0,223	Valid
7	Kemudahan mendapatkan produk	0,758	0,223	Valid
Tingkat Kepuasan				
No.	Atribut	Nilai $r_{hitung}$	Nilai $r_{tabel}$	Keterangan
1	Harga kuota internet	0,713	0,223	Valid
2	Jangkauan jaringan	0,554	0,223	Valid
3	Kecepatan internet	0,699	0,223	Valid
4	Kapasitas kuota yang ditawarkan	0,808	0,223	Valid
5	Promo/diskon	0,717	0,223	Valid
6	Masa aktif	0,655	0,223	Valid
7	Kemudahan mendapatkan produk	0,657	0,223	Valid

Pada Tabel 4 diketahui bahwa seluruh atribut baik pada tingkat kepentingan maupun pada tingkat kepuasan dinyatakan valid. Hal ini membuktikan bahwa atribut-atribut pertanyaan pada kuesioner formal layak digunakan sebagai alat ukur untuk mengukur data penelitian dan dapat dianalisis lebih lanjut.

Pada uji reliabilitas diperoleh nilai reliabilitas tingkat kepentingan yaitu  $r_i = 0,792$  dan pada tingkat kepuasan  $r_i = 0,814$ . Karena seluruh nilai reliabilitas  $r_i > 0,599$  hal ini menunjukkan bahwa seluruh atribut pertanyaan dinyatakan reliabel karena jawaban responden terhadap pertanyaan adalah konsisten dengan kriteria reliabilitas tinggi.

### 3. Perhitungan Fuzzifikasi dan Defuzzifikasi Persepsi Responden

Setelah dilakukan pengumpulan data dengan penyebaran kuesioner, selanjutnya dilakukan proses fuzzifikasi melalui pembentukan *triangular fuzzy number* nilai tingkat kepentingan responden lalu kemudian defuzzifikasikan. Hasil perhitungan rekapitulasi nilai fuzzifikasi dan defuzzifikasi setiap atribut dapat dilihat pada Tabel 5. Contoh perhitungan untuk atribut harga kuota internet, sebagai berikut:

Nilai batas bawah ( $a_1$ )

$$a_1 = \frac{(1 \times 0) + (1 \times 0) + (2 \times 0) + (2 \times 0) + (3 \times 0) + (4 \times 1) + (4 \times 0) + (5 \times 2) + (6 \times 6) + (6 \times 7) + (7 \times 11) + (8 \times 16) + (8 \times 3) + (9 \times 32)}{0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 2 + 6 + 7 + 11 + 16 + 3 + 32}$$

$$a_1 = 7,80769$$

Nilai tengah ( $b_1$ )

$$b_1 = \frac{(1 \times 0) + (2 \times 0) + (2 \times 0) + (3 \times 0) + (4 \times 0) + (4 \times 1) + (5 \times 0) + (6 \times 2) + (6 \times 6) + (7 \times 7) + (8 \times 11) + (8 \times 16) + (9 \times 3) + (10 \times 32)}{0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 2 + 6 + 7 + 11 + 16 + 3 + 32}$$

$$b_1 = 8,51282$$

Nilai batas atas ( $c_1$ )

$$c_1 = \frac{(2 \times 0) + (2 \times 0) + (3 \times 0) + (4 \times 0) + (4 \times 0) + (5 \times 1) + (6 \times 0) + (6 \times 2) + (7 \times 6) + (8 \times 7) + (8 \times 11) + (9 \times 16) + (10 \times 3) + (10 \times 32)}{0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 2 + 6 + 7 + 11 + 16 + 3 + 32}$$

$$c_1 = 8,93590$$

Tahap selanjutnya adalah melakukan defuzzifikasi menggunakan rumus Persamaan (4) untuk untuk mendapatkan nilai tunggal yang representatif.

$$\text{Defuzzifikasi} = \frac{7,80769 + 8,51282 + 8,93590}{3} = 8,41880$$

Berdasarkan hasil perhitungan fuzzifikasi dan defuzzifikasi untuk seluruh atribut secara keseluruhan terdapat pada tabel berikut.

Tabel 5. Nilai TFN Persepsi Kepentingan Responden

No	Atribut	TFN			Defuzzifikasi	Peringkat
		$a_i$	$b_i$	$c_i$		
1	Harga Kuota Internet	7,80769	8,51282	8,93590	8,41880	3
2	Jangkauan Jaringan	8,28205	9,10256	9,46154	8,94872	2
3	Kecepatan Internet	8,41026	9,20513	9,58974	9,06838	1
4	Kapasitas Kuota yang Ditawarkan	7,48718	8,19231	8,66667	8,11538	4
5	Promo/diskon	7,38462	8,11538	8,57692	8,02564	5
6	Masa Aktif	7,05128	7,83333	8,29487	7,72650	7
7	Kemudahan Mendapatkan Produk	7,34615	8,07692	8,55128	7,99145	6

Hasil pengolahan data perhitungan fuzzifikasi dan defuzzifikasi persepsi kepentingan responden terhadap setiap atribut dapat diketahui bahwa nilai persepsi kepentingan tertinggi dari atribut penyedia layanan internet adalah kecepatan internet dengan nilai 9,06838. Dapat disimpulkan bahwa hal yang paling dipentingkan oleh mahasiswa jurusan Matematika dalam menggunakan jasa penyedia layanan internet adalah kecepatan internet.

#### 4. Persepsi Responden Terhadap Telkomsel

Hasil perhitungan kepuasan mahasiswa jurusan Matematika pengguna Telkomsel pada atribut seluruh atribut diperoleh dengan menggunakan Persamaan (1), (2), dan (3) dapat dilihat pada Tabel 6.

Tabel 6. Nilai TFN Persepsi Kepuasan Responden Telkomsel

No	Atribut	TFN			Defuzzifikasi	Peringkat
		$a_i$	$b_i$	$c_i$		
1	Harga Kuota Internet	5,87179	6,61538	7,15385	6,54701	5
2	Jangkauan Jaringan	7,20513	7,84615	8,35897	7,80342	1
3	Kecepatan Internet	6,71795	7,51282	7,97436	7,40171	3
4	Kapasitas Kuota yang Ditawarkan	5,74359	6,35897	6,89744	6,33333	6
5	Promo/diskon	5,53846	6,30769	6,76923	6,20513	7
6	Masa Aktif	6,17949	6,87179	7,38462	6,81197	4
7	Kemudahan Mendapatkan Produk	6,71795	7,56410	8,00000	7,42735	2

Hasil pengolahan data persepsi kepuasan mahasiswa jurusan Matematika menunjukkan bahwa nilai persepsi kepuasan tertinggi dari atribut penyedia layanan internet Telkomsel adalah jangkauan jaringan dengan nilai 7,80342. Dapat disimpulkan

bahwa jangkauan jaringan dari Telkomsel adalah atribut yang dinilai paling memuaskan di antara atribut lainnya.

## 5. Persepsi Responden Terhadap Indosat

Hasil perhitungan kepuasan mahasiswa jurusan Matematika pengguna Indosat pada seluruh atribut diperoleh dengan menggunakan Persamaan (1), (2), dan (3) dapat dilihat pada Tabel 7.

Tabel 7. Nilai TFN Persepsi Kepuasan Responden Indosat

No	Atribut	TFN			Defuzzifikasi	Peringkat
		$a_i$	$b_i$	$c_i$		
1	Harga Kuota	6,05128	6,79487	7,30769	6,71795	4
2	Jangkauan Jaringan	5,76923	6,46154	7,02564	6,41880	7
3	Kecepatan Internet	6,00000	6,61538	7,25641	6,62393	6
4	Kapasitas Kuota yang Ditawarkan	6,33333	6,92308	7,53846	6,93162	2
5	Promo/diskon	6,07692	6,69231	7,30769	6,69231	5
6	Masa Aktif	6,23077	6,82051	7,48718	6,84615	3
7	Kemudahan Mendapatkan Produk	6,79487	7,56410	8,07692	7,47863	1

Hasil pengolahan data persepsi kepuasan mahasiswa jurusan Matematika menunjukkan bahwa nilai persepsi kepuasan tertinggi dari atribut penyedia layanan internet Indosat adalah kemudahan mendapatkan produk dengan nilai 7,47863. Dapat disimpulkan bahwa kemudahan mendapatkan produk dari Indosat adalah atribut yang dinilai paling memuaskan di antara atribut lainnya.

## 6. Pengolahan Data Menggunakan Teori Permainan

Untuk menentukan strategi pemasaran yang optimal masing-masing jasa penyedia layanan internet maka digunakan teori permainan. Atribut-atribut yang digunakan oleh setiap pemain adalah sama yaitu: (1) harga kuota internet, (2) jangkauan jaringan, (3) kecepatan internet, (4) kapasitas kuota, (5) promo/diskon, (6) masa aktif, dan (7) kemudahan mendapatkan produk. Atribut tersebut akan digunakan sebagai strategi. Variabel  $X_i$  adalah strategi ke- $i$  untuk Telkomsel dan variabel  $Y_j$  adalah strategi ke- $j$  untuk Indosat, untuk  $i, j = 1, 2, 3, \dots, 7$ .

Langkah awal dalam pengolahan data teori permainan adalah membentuk matriks permainan. Adapun rumus yang digunakan untuk menghitung nilai *payoff* adalah dengan menggunakan nilai hasil dari perhitungan defuzzifikasi sebagai berikut [5]:

$$X_i; Y_j = (d \times dP_1) - (d \times dP_2) \quad (11)$$

Keterangan:

$X_i$  : strategi ke- $i$  pemain  $P_1$

$Y_j$  : strategi ke- $j$  pemain  $P_2$

$d$  : defuzzifikasi tingkat kepentingan

$dP_1$  : defuzzifikasi pemain  $P_1$

$dP_2$  : defuzzifikasi pemain  $P_2$

Berikut contoh perhitungan mencari nilai *payoff*:

- 1) Nilai *payoff* atribut harga kuota internet Telkomsel ( $P_1$ ) terhadap atribut harga kuota internet Indosat ( $P_2$ ) adalah sebagai berikut:

$$X_1; Y_1 = (8,41880 \times 6,54701) - (8,41880 \times 6,71795) = -1,43911$$

- 2) Nilai *payoff* atribut harga kuota internet Telkomsel ( $P_1$ ) terhadap atribut jangkauan jaringan Indosat ( $P_2$ ) adalah sebagai berikut:

$$X_1; Y_2 = (8,41880 \times 6,54701) - (8,94872 \times 6,41880) = -2,32208$$

Hasil perhitungan nilai *payoff* secara keseluruhan dapat dilihat pada Tabel 8.

Tabel 8. Matriks Nilai Perolehan *payoff* Seluruh Atribut

$P_1 \backslash P_2$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$
$X_1$	-1,43911	-2,32208	-4,95033	-1,13482	1,40792	2,22120	-4,64716
$X_2$	13,27350	12,39053	9,76229	13,57780	16,12053	16,93382	10,06545
$X_3$	10,56439	9,68142	7,05318	10,86869	13,41143	14,22471	7,35634
$X_4$	-5,15965	-6,04263	-8,67087	-4,85536	-2,31262	-1,49934	-8,36770
$X_5$	-6,75696	-7,63993	-10,26817	-6,45266	-3,90993	-3,09665	-9,96501
$X_6$	-3,92446	-4,80744	-7,43568	-3,62017	-1,07743	-0,26415	-7,13252
$X_7$	2,79823	1,91526	-0,71298	3,10253	5,64526	6,45854	-0,40982

Pemain  $P_1$  menerapkan aturan maksimin dan pemain  $P_2$  menerapkan aturan minimaks.

Tabel 9. Matriks Permainan Telkomsel vs Indosat

$P_1 \backslash P_2$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$	Min
$X_1$	-1,43911	-2,32208	-4,95033	-1,13482	1,40792	2,22120	-4,64716	-4,95033
$X_2$	13,27350	12,39053	9,76229	13,57780	16,12053	16,93382	10,06545	<b>9,76229</b>
$X_3$	10,56439	9,68142	7,05318	10,86869	13,41143	14,22471	7,35634	7,05318
$X_4$	-5,15965	-6,04263	-8,67087	-4,85536	-2,31262	-1,49934	-8,36770	-8,67087
$X_5$	-6,75696	-7,63993	-10,26817	-6,45266	-3,90993	-3,09665	-9,96501	-10,26817
$X_6$	-3,92446	-4,80744	-7,43568	-3,62017	-1,07743	-0,26415	-7,13252	-7,43568
$X_7$	2,79823	1,91526	-0,71298	3,10253	5,64526	6,45854	-0,40982	-0,71298
Maks	13,27350	12,39053	<b>9,76229</b>	13,57780	16,12053	16,93382	10,06545	

## 7. Penyelesaian Teori Permainan Menggunakan Pemrograman Linier

Dalam metode pemrograman linier, apabila pada matriks nilai perolehan terdapat elemen yang bernilai negatif maka seluruh elemen matriks dijumlahkan dengan nilai mutlak dari elemen terkecil, dalam kasus ini adalah -10,26817. Jumlahkan seluruh elemen dengan nilai  $k = |-10,26817| = 10,26817$  agar nilai permainan ( $V$ ) yang diperoleh bernilai positif.

Tabel 10. Matriks Nilai Perolehan *payoff* Modifikasi

$P_1 \backslash P_2$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$
$X_1$	8,82906	7,94609	5,31784	9,13335	11,67609	12,48937	5,62101
$X_2$	23,54167	22,65870	20,03046	23,84597	26,38870	27,20199	20,33362
$X_3$	20,83256	19,94959	17,32135	21,13686	23,67960	24,49288	17,62451
$X_4$	5,10852	4,22554	1,59730	5,41281	7,95555	8,76883	1,90047
$X_5$	3,51121	2,62824	0	3,81551	6,35824	7,17152	0,30316
$X_6$	6,34371	5,46073	2,83249	6,64800	9,19074	10,00402	3,13565
$X_7$	13,06640	12,18343	9,55519	13,37070	15,91343	16,72671	9,85835

Hasil modifikasi pada Tabel 10 kemudian diubah ke dalam bentuk pemrograman linier.

## 8. Penyelesaian Bentuk Pemrograman Linier Indosat

Bentuk pemrograman linier untuk Indosat, yaitu:

$$\text{Maksimumkan } W = \frac{1}{V} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6 + Y_7 \quad (12)$$

dengan kendala:

$$8,82906Y_1 + 7,94609Y_2 + 5,31784Y_3 + 9,13335Y_4 + 11,67609Y_5 + 12,48937Y_6 + 5,62101Y_7 \leq 1$$

$$23,54162Y_1 + 22,65870Y_2 + 20,03046Y_3 + 23,84597Y_4 + 26,38870Y_5 + 27,20199Y_6 + 20,33362Y_7 \leq 1$$

$$20,83256Y_1 + 19,94959Y_2 + 17,32135Y_3 + 21,13686Y_4 + 23,67960Y_5 + 24,49288Y_6 + 17,62451Y_7 \leq 1$$

$$5,10852Y_1 + 4,22554Y_2 + 1,59730Y_3 + 5,41281Y_4 + 7,95555Y_5 + 8,76883Y_6 + 1,90047Y_7 \leq 1$$

$$3,51121Y_1 + 2,62824Y_2 + 0 + 3,81551Y_4 + 6,35824Y_5 + 7,17152Y_6 + 0,30316Y_7 \leq 1$$

$$6,34371Y_1 + 5,46071Y_2 + 2,83249Y_3 + 6,64800Y_4 + 9,19074Y_5 + 10,00402Y_6 + 3,13565Y_7 \leq 1$$

$$13,06640Y_1 + 12,18343Y_2 + 9,55519Y_3 + 13,37070Y_4 + 15,91343Y_5 + 16,72671Y_6 + 9,85835Y_7 \leq 1$$

Penyelesaian bentuk Persamaan (12) dengan menggunakan program *Matlab* diperoleh solusi optimal berikut:

Tabel 11. Solusi Optimal Untuk Indosat

Variabel Basis	W	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>	Y <sub>3</sub>	Y <sub>4</sub>	Y <sub>5</sub>	Y <sub>6</sub>	Y <sub>7</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>4</sub>	S <sub>5</sub>	S <sub>6</sub>	S <sub>7</sub>	NK
W	1	0,17529	0,13121	0	0,19049	0,31743	0,35803	0,01514	0	0,04992	0	0	0	0	0	0,04992
S <sub>1</sub>	0	2,57903	1,93048	0	2,80254	4,67021	5,26757	0,22268	1	-0,26549	0	0	0	0	0	0,73451
Y <sub>3</sub>	0	1,17529	1,13121	1	1,19049	1,31743	1,35803	1,01514	0	0,04992	0	0	0	0	0	0,04992
S <sub>3</sub>	0	0,47489	0,35547	0	0,51605	0,85995	0,96995	0,04100	0	-0,86475	1	0	0	0	0	0,13525
S <sub>4</sub>	0	3,23122	2,41866	0	3,51125	5,85121	6,59964	0,27899	0	-0,07974	0	1	0	0	0	0,92026
S <sub>5</sub>	0	3,51121	2,62824	0	3,81551	6,35824	7,17153	0,30316	0	0,00000	0	0	1	0	0	1,00000
S <sub>6</sub>	0	3,01470	2,25658	0	3,27596	5,45913	6,15740	0,26029	0	-0,14141	0	0	0	1	0	0,85859
S <sub>7</sub>	0	1,83625	1,37448	0	1,99539	3,32515	3,75047	0,15854	0	-0,47703	0	0	0	0	1	0,52297

Diperoleh strategi pemasaran optimal untuk Indosat, yaitu:

$$W = 0,04992$$

$$Y_3 = 0,04992$$

$$Y_1 = Y_2 = Y_4 = Y_5 = Y_6 = Y_7 = 0$$

Karena  $W = \frac{1}{V}$  dan karena  $Y_j = \frac{y_j}{V}$  maka  $y_j = Y_j \cdot V$

$$V = \frac{1}{W} = \frac{1}{0,04992} = 20,03205$$

$$y_3 = 0,04992 \cdot 20,03205 = 0,99999 = 100\%$$

$$y_1 = y_2 = y_4 = y_5 = y_6 = y_7 = 0 \cdot 20,03205 = 0$$

Pada matriks perolehan awal sebelumnya seluruh elemen telah ditambah dengan  $k = 10,26817$  maka  $V = 20,03205 - 10,26817 = 9,76388$ .

Dengan demikian, strategi pemasaran optimal untuk Indosat adalah strategi kecepatan internet dengan peluang 100% artinya Indosat harus mengutamakan kecepatan internet agar maksimum kerugian yang diperoleh oleh perusahaan adalah 9,76388 singkatnya adalah Indosat dapat meminimumkan kerugiannya dengan meningkatkan kualitas kecepatan internet.

## 9. Penyelesaian Bentuk Pemrograman Linier Telkomsel

Bentuk pemrograman linier untuk Telkomsel adalah sebagai berikut:

$$\text{Minimumkan } Z = \frac{1}{V} = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 \quad (13)$$

dengan kendala:

$$8,82889X_1 + 23,54150X_2 + 20,83239X_3 + 5,10835X_4 + 3,51104X_5 + 6,34354X_6 + 13,06623X_7 \geq 1$$

$$7,94592X_1 + 22,65853X_2 + 19,94942X_3 + 4,22537X_4 + 2,62807X_5 + 5,46056X_6 + 12,18326X_7 \geq 1$$

$$5,31767X_1 + 20,03029X_2 + 17,32118X_3 + 1,59713X_4 + 0 + 2,83232X_6 + 9,55502X_7 \geq 1$$

$$9,13318X_1 + 23,84580X_2 + 21,13669X_3 + 5,41264X_4 + 3,81534X_5 + 6,64783X_6 + 13,37053X_7 \geq 1$$

$$11,67592X_1 + 26,38853X_2 + 23,67943X_3 + 7,95538X_4 + 6,35807X_5 + 9,19057X_6 + 15,91326X_7 \geq 1$$

$$12,48920X_1 + 27,20182X_2 + 24,49271X_3 + 8,76866X_4 + 7,17135X_5 + 10,00385X_6 + 16,72654X_7 \geq 1$$

$$5,62084X_1 + 20,33345X_2 + 17,62434X_3 + 1,90030X_4 + 0,30299X_5 + 3,13548X_6 + 9,85818X_7 \geq 1$$

Penyelesaian bentuk Persamaan (13) dengan menggunakan program *Matlab* diperoleh solusi optimal berikut:

Tabel 12. Solusi Optimal Untuk Telkomsel

Variabel Basis	Z	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	X <sub>7</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>4</sub>	S <sub>5</sub>	S <sub>6</sub>	S <sub>7</sub>	NK
Z	1	-0,73451	0	-0,13525	-0,92026	-1	-0,85859	-0,52297	0	0	-0,04992	0	0	0	0	0,04992
X <sub>2</sub>	0	0,26549	1	0,86475	0,07974	0	0,14141	0,47703	0	0	-0,04992	0	0	0	0	0,04992
S <sub>2</sub>	0	-1,93047	0	-0,35547	-2,41866	-2,62824	-2,25658	-1,37448	0	1	-1,13121	0	0	0	0	0,13121
S <sub>1</sub>	0	-2,57903	0	-0,47489	-3,23122	-3,51121	-3,01470	-1,83625	1	0	-1,17529	0	0	0	0	0,17529
S <sub>4</sub>	0	-2,80254	0	-0,51605	-3,51125	-3,81551	-3,27596	-1,99539	0	0	-1,19049	1	0	0	0	0,19049
S <sub>5</sub>	0	-4,67021	0	-0,85995	-5,85122	-6,35825	-5,45913	-3,32515	0	0	-1,31743	0	1	0	0	0,31743
S <sub>6</sub>	0	-5,26757	0	-0,96995	-6,59964	-7,17153	-6,15741	-3,75047	0	0	-1,35803	0	0	1	0	0,35803
S <sub>7</sub>	0	-0,22267	0	-0,04100	-0,27898	-0,30316	-0,26029	-0,15854	0	0	-1,01513	0	0	0	1	0,01513

Dari Tabel 4.21 di atas diperoleh strategi pemasaran optimal untuk Telkomsel, yaitu:

$$Z = 0,04992$$

$$X_2 = 0,04992$$

$$X_1 = X_3 = X_4 = X_5 = X_6 = X_7 = 0$$

Karena  $Z = \frac{1}{V}$  dan karena  $X_i = \frac{x_i}{V}$  maka  $x_i = X_i \cdot V$

$$V = \frac{1}{Z} = \frac{1}{0,04992} = 20,03205$$

$$x_2 = 0,04992 \cdot 20,03205 = 0,99999 = 100\%$$

$$x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 0 \cdot 20,03205 = 0$$

Pada matriks perolehan awal sebelumnya seluruh elemen telah ditambah dengan  $k = 10,26817$  maka  $V = 20,03205 - 10,26817 = 9,76388$ . Dengan demikian, strategi pemasaran optimal untuk Telkomsel adalah strategi jangkauan jaringan dengan peluang 100% artinya Telkomsel harus mengutamakan jangkauan jaringan agar minimum keuntungan yang diperoleh oleh perusahaan adalah 9,76388 singkatnya adalah Telkomsel dapat memaksimalkan keuntungannya dengan meningkatkan kualitas jangkauan jaringan.

Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan, diperoleh nilai permainan  $V_{Telkomsel} = V_{Indosat} = 9,76388$  yang merupakan nilai keseimbangan. Maksud nilai



keseimbangan ini adalah tingkat penilaian responden terhadap layanan yang ditawarkan oleh kedua pemain. Artinya dengan menggunakan strategi murni maupun strategi campuran metode pemrograman linier antara Telkomsel dan Indosat masing-masing memperoleh strategi optimal untuk meningkatkan keuntungan dan mengurangi resiko kerugian yang disebabkan oleh penilaian konsumen.

## PENUTUP

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa strategi pemasaran yang optimal untuk kedua penyedia layanan internet dengan menggunakan logika *fuzzy* sebagai bantuan teori permainan adalah atribut kecepatan internet untuk pemain P<sub>2</sub> (Indosat) dan atribut jangkauan jaringan untuk pemain P<sub>1</sub> (Telkomsel) dengan nilai permainan atau *saddle point* yang diperoleh adalah 9,76388. Atribut yang paling dipentingkan oleh mahasiswa Jurusan Matematika fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Mulawarman adalah jangkauan jaringan dan kecepatan internet. Pada analisis kepuasan diperoleh hasil bahwa pengguna Telkomsel menunjukkan tingkat kepuasan tertinggi pada atribut jangkauan jaringan dengan nilai rata-rata 7,80342 sedangkan pengguna Indosat menunjukkan tingkat kepuasan tertinggi pada atribut kemudahan mendapatkan produk dengan nilai rata-rata 7,47863.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Wijayati, D. (2019). Teori Permainan Menggunakan Algoritma Kunang-Kunang. *Naratif: Jurnal Ilmiah Nasional Riset Aplikasi Dan Teknik Informatika*, 01(02), 7–12.
- [2] Ritonga, H. M., Fikri, M. El, Siregar, N., Agustin, R. R., & Hidayat, R. (2018). *Manajemen Pemasaran: Konsep dan Strategi*.
- [3] Susdarwono, E. T. (2020). Pemrograman Linier Permasalahan Ekonomi Pertahanan: Metode Grafik Dan Metode Simpleks. *Teorema: Teori Dan Riset Matematika*, 5(1), 89–104. <https://doi.org/10.25157/teorema.v5i1.3246>
- [4] Anggraini, D., Mujib, & Putra, N. W. (2017). Aplikasi Logika Fuzzy dalam Teori Permainan untuk Menentukan Strategi Pemasaran (Studi Kasus: Persaingan Alfamart dan Indomaret). *Seminar Nasional Matematika Dan Pendidikan Matematika 2017*, 6, 81–87.
- [5] Wahyuti, I., & Ngatilah, Y. (2020). Analisis Persaingan Pemasaran Produk Susu Cair Dalam Kemasan Siap Minum Menggunakan Metode Logika Fuzzy dan Teori Permainan. *Juminten*, 1(3), 116–128. <https://doi.org/10.33005/juminten.v1i3.124>
- [6] Sujarwata. (2018). *Sistem Fuzzy dan Aplikasinya (Edisi 1)*. Deepublish.
- [7] Kusumadewi, S., & Purnomo, H. (2010). *Aplikasi Logika Fuzzy untuk Pendukung Keputusan (Edisi 2)*. Graha Ilmu.
- [8] Djalal, A. (2013). Analisis Kepuasan Nasabah dengan Pendekatan Fuzzy Service Quality dalam Upaya Peningkatan Kualitas Layanan Perbankan (Studi Kasus di Bank Mandiri Cabang Sudirman Yogyakarta). *Teknoin*, 19(1), 1–15. <https://doi.org/10.20885/teknoin.vol19.iss1.art1>
- [9] Ummi, N., & Katili, P. B. (2018). Aplikasi Fuzzy-Servqual dan Importance Performance Analysis untuk Meningkatkan Kualitas Pelayanan Perpustakaan (Studi Kasus: Perpustakaan FT. Untirta). *Jurnal Teknik Industri Fakultas Teknik*, 3, 146–157.
- [10] Haerani, E. (2013). Analisa Kendali Logika Fuzzy Dengan Metode Defuzzifikasi COA (Center of Area), Bisektor, MOM (Mean of Maximum), LOM (Largest of Maximum), DAN SOM (Smallest of Maximum). *Jurnal Sains Dan Teknologi Industri*, 10(2), 245–253.



- [11] Kartono. (1994). Teori Permainan. Andi Offset.
- [12] Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2001). Introduction to Operations Research (K. Kane (ed.); Edisi 7). McGraw-Hill.
- [13] Siagian, P. (1987). Penelitian Operasional, Teori dan Praktek. Universitas Indonesia (UI-Press).
- [14] Kurniawan, A. W., & Puspitaningtyas, Z. (2012). Metode Penelitian Kuantitatif. Pandiva Buku.
- [15] Setiawan, S. (2020). Merancang Kuesioner Untuk Penelitian (Edisi 1). PPNI Qatar.
- [16] Sugiyono. (2007). Statistik Untuk Penelitian (E. Mulyatiningsih (ed.)). Alfabeta Bandung.

## Aplikasi *Game Theory* pada Analisis Strategi Pemasaran Jasa Transportasi *Online* di FMIPA Universitas Mulawarman

Dewi Satriani<sup>1</sup>, Wasono<sup>1\*</sup>, Darnah A. Nohe<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Laboratorium Matematika Komputasi Program Studi Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Mulawarman*

<sup>2</sup> *Laboratorium Statistika Terapan Program Studi Statistika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Mulawarman*

Dikirim: Agustus 2022; Diterima: Agustus 2022; Dipublikasi: September 2022

Alamat Email Korespondensi: [wason.khayla32@gmail.com](mailto:wason.khayla32@gmail.com)

### Abstrak

Di Indonesia saat ini sedang berkembang pesat beberapa transportasi *online*, diantaranya adalah Gojek dan Grab. Kedua perusahaan transportasi *online* tersebut saling bersaing untuk mendapatkan konsumen dengan melakukan strategi tertentu yang diterapkan oleh perusahaan. Banyak strategi pemasaran yang dilakukan untuk memperoleh keuntungan yang banyak maupun memperkecil kerugian yang besar, salah satunya adalah menerapkan model matematika yaitu *game theory*. *Game theory* merupakan suatu model matematika yang biasa digunakan dalam situasi konflik atau persaingan antara berbagai kepentingan yang bersaing sebagai pesaing. Keuntungan bagi yang satu adalah kerugian bagi yang lain. Tujuan yang akan dicapai dalam *game theory* pada penelitian ini adalah memperoleh strategi optimal pada masing-masing pemain Gojek maupun Grab. Pada permainan berjumlah nol-dua pemain, terdapat dua penyelesaian yaitu strategi murni dan strategi campuran. Pada penelitian ini hasil analisis tidak dapat diselesaikan dengan strategi murni sehingga digunakan strategi campuran. Hasil penelitian diperoleh nilai permainan optimal pada Gojek dan Grab yaitu 6,68. Gojek memperoleh strategi optimal yaitu hemat biaya dan aman dengan nilai peluang masing-masing adalah 0,778 dan 0,222. Grab juga menggunakan strategi hemat biaya dan aman tetapi nilai peluang masing-masing 0,667 dan 0,333.

### Kata Kunci:

*Game Theory, Nilai Permainan Optimal, Peluang, Strategi Campuran, Strategi Murni*

### PENDAHULUAN

Strategi pemasaran adalah keputusan yang akan diambil mengenai biaya pemasaran, bauran pemasaran, alokasi pemasaran yang berkaitan dengan kondisi lingkungan yang diharapkan dan kondisi persaingan. Strategi pemasaran sangat penting bagi setiap perusahaan karena merupakan salah satu cara untuk mencapai tujuan suatu perusahaan [1]. Kegiatan tersebut perlu dikombinasikan dan dikoordinasikan agar perusahaan dapat menjalankan tugas pemasarannya seefektif mungkin. Jadi, perusahaan tidak hanya memilih kombinasi terbaik, tetapi juga harus mengkoordinasikan berbagai elemen bauran pemasaran tersebut [2]. Teori permainan (*game theory*) merupakan salah satu cara yang dapat digunakan untuk menganalisis strategi pemasaran. Untuk memperkirakan strategi pemasaran terbaik yang harus dilakukan, perusahaan harus mempelajari atau setidaknya memperkirakan langkah-langkah para pihak pesaingnya [3].

*Game theory* adalah bidang ilmu yang dapat mendukung penentuan strategi pemasaran, yang diterapkan secara luas pada kondisi pemasaran yang kompetitif.

Teknik ini merupakan bentuk persaingan antara dua pihak atau dua kelompok yang berkompetisi dan menggunakan aturan yang diketahui oleh kedua pihak yang berkompetisi. Keputusan harus diambil untuk mendapatkan hasil yang optimal. Keputusan diambil untuk memaksimalkan kemenangan atau keuntungan maksimum atau meminimalkan kerugian atau kerugian minimum [4].

Indonesia telah mengalami transformasi dalam beberapa tahun terakhir, khususnya di sektor transportasi karena perkembangan teknologi yang semakin modern. Hal ini terlihat dari munculnya model transportasi berbasis *online* di kota-kota besar di Indonesia seperti Gojek, Grab, Nujek, Uber, Blue-jak dan maxim. Jasa transportasi *online* yang saat ini sangat dikenal dan sering dilihat oleh masyarakat adalah Gojek dan Grab. Gojek merupakan perusahaan berjiwa sosial yang memimpin revolusi dalam industri transportasi ojek, didirikan oleh anak bangsa yang bernama Nadiem Makarim pada tahun 2010. Sedangkan Grab, Anthony Tan sebagai CEO sekaligus Founder Grab, yang berdiri pada tahun 2012 dan tersebar 6 kawasan Asia tenggara termasuk Indonesia [5].

Pada penelitian ini, akan dilakukan analisis strategi pemasaran yang digunakan oleh jasa transportasi *online* yaitu Gojek dan Grab. Penelitian dan pengumpulan data kuesioner dilakukan di Kota Samarinda. Model matematika yang digunakan adalah *game theory*. Tujuan yang akan dicapai dalam *game theory* adalah menentukan strategi pemasaran yang optimal serta menganalisis nilai permainan pada kedua jasa transportasi *online* Gojek dan Grab.

## METODE PENELITIAN

Penelitian ini termasuk kedalam penelitian kuantitatif dengan populasi yang digunakan adalah mahasiswa aktif FMIPA Universitas Mulawarman angkatan 2018 dan 2019 sebanyak 490 mahasiswa. Adapun sampel yang digunakan adalah mahasiswa yang mengetahui dan pernah menggunakan jasa transportasi *online* Gojek dan Grab di Kota Samarinda.

Jumlah sampel dihitung menggunakan rumus Slovin. Hasil perhitungan sebagai berikut:

$$n_s = \frac{N}{1 + Ne^2}$$

$$n_s = \frac{490}{1 + (490 \times 0,1^2)}$$

$$= 83,051 \approx 84 \text{ mahasiswa}$$

dengan:

$N$  = jumlah populasi

$n_s$  = jumlah sampel

$e$  = tingkat kesalahan

Jumlah responden 84 mahasiswa terdiri dari 42 mahasiswa pengguna Gojek dan 42 mahasiswa pengguna Grab.

Adapun langkah-langkah analisis data pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Melakukan uji validitas data kuesioner
2. Melakukan uji reliabilitas data kuesioner
3. Menganalisis Data menggunakan *Game theory* dengan metode strategi murni
4. Menganalisis Data menggunakan *Game theory* dengan metode strategi Campuran dengan tahapan sebagai berikut :
  - a. Penerapkan aturan dominasi berguna untuk matriks *pay off* yang ukuran besar untuk mengurangi ukuran matriks sebelum analisis akhir untuk menentukan solusi optimal.
  - b. Menghitung probabilitas dan interpretasi nilai permainan

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### 1. Uji Validitas

Dilakukan uji hipotesis pada setiap item pertanyaan strategi transportasi *online* untuk mengetahui apakah semua item strategi dalam kuesioner penelitian dinyatakan valid. Pada penelitian ini, contoh pengujian hipotesis pada item pertanyaan strategi praktis seperti berikut:

- Hipotesis
  - $H_0$  : Item pertanyaan strategi praktis dalam kuesioner adalah valid
  - $H_1$  : Item pertanyaan strategi praktis dalam kuesioner adalah tidak valid
- Taraf Signifikansi
  - Taraf signifikansi yang dipergunakan adalah  $\alpha = 0.05$
  - Sehingga,
- Statistik Uji

$$\begin{aligned}
 r_{hitung} &= \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{(n\sum x^2 - (\sum x)^2)(n\sum y^2 - (\sum y)^2)}} \\
 &= \frac{20(2201) - (87)(498)}{\sqrt{(20(391) - (87)^2)(20(12680) - (498)^2)}} \\
 &= \frac{44020 - 43326}{\sqrt{(251)(5596)}} \\
 &= \frac{694}{\sqrt{1404596}} \\
 &= 0,5856
 \end{aligned}$$

- Daerah Kritis
  - Tolak  $H_0$  jika  $r_{hitung} < r_{tabel}$
- Keputusan
  - Dengan  $n = 20$  diperoleh nilai  $r_{tabel}$  yaitu  $r_{(0.05,20-2)} = r_{(0.05,18)}$  pada Lampiran 2 tabel *product moment* = 0,4438
  - $r_{hitung} > r_{tabel} = 0,5856 > 0,4438$
  - Gagal tolak  $H_0$  karena nilai  $r_{hitung}$  lebih besar dari pada nilai  $r_{tabel}$
- Kesimpulan
  - Item pertanyaan strategi praktis dalam kuesioner adalah valid
  - Adapun hasil keseluruhan uji validitas data kuesioner ditunjukkan pada Tabel 1 sebagai berikut:

Tabel 1 Hasil Uji Validitas Data Kuesioner Pendahuluan

No	Atribut	$r_{hitung}$	$r_{tabel}$	Keterangan
1	Praktis	0,5856	0,4438	Valid
2	Hemat biaya	0,6768	0,4438	Valid
3	Aman	0,7127	0,4438	Valid
4	Promosi	0,7038	0,4438	Valid
5	Armada yang banyak	0,7719	0,4438	Valid
6	Pembayaran non-tunai	0,6066	0,4438	Valid

Jika diketahui  $n = 20$ , derajat kebebasan ( $dk$ ) =  $n - 2 = 18$  dan tingkat signifikan 5% diperoleh  $r_{tabel} = 0,4438$ , Maka berdasarkan Tabel 1 hal ini berarti strategi-strategi yaitu praktis, hemat biaya, aman, promosi, armada yang banyak, dan pembayaran non-tunai adalah valid.

## 2. Uji Reliabilitas

Uji reliabilitas dilakukan untuk mengetahui tingkat kepercayaan hasil suatu pengukuran. Nilai suatu kuesioner dikatakan reliabel jika memberikan  $\alpha > 0,60$ . Hasil perhitungan seperti berikut:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \left[ \frac{k}{k-1} \right] \left[ 1 - \frac{\sum \sigma_n^2}{\sigma_n^2} \right] \\
 &= \left[ \frac{6}{6-1} \right] \left[ 1 - \frac{5,5263}{14,7263} \right] \\
 &= \left[ \frac{6}{5} \right] [1 - 0,3753] \\
 &= [1,2][0,6247] \\
 &= 0,7497
 \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil perhitungan diperoleh nilai  $\alpha = 0,7497$ . Hal ini berarti bahwa setiap item strategi transportasi online dalam kuisisioner adalah reliable.

## 3. Pengolahan Data *Game Theory* dengan Strategi Murni

Langkah awal dalam pengolahan data *game theory* dengan strategi murni yaitu melakukan rekapitulasi hasil kuesioner yang telah disebarkan kepada 84 responden. Rekapitulasi kuesioner dan bentuk nilai persaingan antar transportasi *online* dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2 Rekapitulasi Nilai Persaingan Transportasi *Online* antara Gojek dan Grab

Grab \ Gojek	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$
$X_1$	36 / 48	50 / 34	47 / 37	34 / 50	36 / 48	28 / 56
$X_2$	24 / 60	38 / 46	40 / 44	25 / 59	25 / 59	21 / 63
$X_3$	32 / 52	41 / 43	34 / 50	30 / 54	29 / 55	23 / 61
$X_4$	33 / 51	47 / 37	42 / 42	34 / 50	28 / 56	22 / 62
$X_5$	41 / 43	52 / 32	53 / 31	38 / 46	36 / 48	27 / 57
$X_6$	50 / 34	55 / 29	50 / 34	49 / 35	45 / 39	40 / 44

Pada Tabel 2, dapat dilihat bahwa pada kolom pertama Gojek ( $X_1$ ) diperoleh skor 48, hal ini berarti dari total 84 responden terdapat sebanyak 48 responden yang memilih strategi praktis pada Gojek ( $X_1$ ). Pada baris pertama Grab ( $Y_1$ ) diperoleh skor 36, artinya dari total 84 responden hanya 36 responden yang memilih strategi praktis pada Grab ( $Y_1$ ). Begitupula penjelasan pada kolom strategi Gojek dan baris strategi Grab lainnya.

Langkah berikutnya akan dibentuk matriks nilai perolehan, dimana nilai perolehan permainan Gojek dan Grab yaitu jumlah nilai perolehan Gojek dikurangi dengan jumlah nilai perolehan Grab. Rumus dan perhitungan nilai perolehan adalah sebagai berikut:

*Nilai perolehan permainan = Nilai perolehan Gojek – Nilai perolehan Grab*

- 1) Nilai perolehan variabel  $X_1$  (praktis) pada Gojek terhadap variabel  $Y_1$  (praktis) pada Grab adalah sebagai berikut:

$$X_1 - Y_1 = 48 - 36 = 12$$

- 2) Nilai perolehan variabel  $X_1$  (praktis) pada Gojek terhadap variabel  $Y_2$  (hemat biaya) pada Grab adalah sebagai berikut:

$$X_1 - Y_2 = 34 - 50 = -16$$

- 3) Nilai perolehan variabel  $X_1$  (praktis) pada Gojek terhadap variabel  $Y_3$  (aman) pada Grab adalah sebagai berikut:

$$X_1 - Y_3 = 37 - 47 = -10$$

- 4) Nilai perolehan variabel  $X_1$  (praktis) pada Gojek terhadap variabel  $Y_4$  (promosi) pada Grab adalah sebagai berikut:

$$X_1 - Y_4 = 50 - 34 = 16$$

- 5) Nilai perolehan variabel  $X_1$  (praktis) pada Gojek terhadap variabel  $Y_5$  (armada yang banyak) pada Grab adalah sebagai berikut:

$$X_1 - Y_5 = 48 - 36 = 12$$

Hasil perhitungan keseluruhan nilai perolehan dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3 Matriks Nilai Perolehan Gojek dan Grab

Gojek \ Grab	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$
$X_1$	12	-16	-10	16	12	28
$X_2$	36	8	4	34	34	42
$X_3$	20	2	16	24	26	38
$X_4$	18	-10	0	16	28	40
$X_5$	2	-20	-22	8	12	30
$X_6$	-16	-26	-16	-14	-6	4

Berdasarkan Tabel 3, pada matriks nilai perolehan Gojek dan Grab akan dilakukan langkah pertama yaitu menerapkan strategi murni. Dalam hal ini, pemain baris menggunakan aturan maksimin yaitu nilai maksimum diantara nilai-nilai minimum pada baris. Sedangkan pemain kolom menggunakan aturan minimaks yaitu nilai minimum diantara nilai-nilai maksimum pada kolom. Jika nilai maksimin dan minimaks diperoleh hasil yang sama maka titik pelana atau *saddle point* telah tercapai, sehingga permainan dapat diselesaikan dengan strategi murni. Hasil analisis dapat dilihat pada Tabel 4.

Tabel 4 Hasil Nilai Teori Permainan Strategi Murni

Gojek \ Grab	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$	Minimum	Maksimin
$X_1$	12	-16	-10	16	12	28	-16	4
$X_2$	36	8	4	34	34	42	4	
$X_3$	20	2	16	24	26	38	2	
$X_4$	18	-10	0	16	28	40	-10	
$X_5$	2	-20	-22	8	12	30	-22	
$X_6$	-16	-26	-16	-14	-6	4	-26	
<b>Maksimum</b>	36	8	16	34	34	42		
<b>Minimaks</b>	<b>8</b>							

Hasil analisis pada Tabel 4, hal ini menunjukkan bahwa nilai maksimin dan minimaks tidak sama yaitu 4 dan 8. Hal ini berarti titik pelana atau *saddle point* belum tercapai, sehingga bukan merupakan strategi optimum. Oleh karena itu permainan tidak dapat diselesaikan dengan menggunakan strategi murni.

#### 4. Penyelesaian *Game Theory* Menggunakan Strategi Campuran

Pada penelitian ini dilanjutkan dengan penyelesaian *game theory* menggunakan strategi campuran. Langkah berikutnya adalah menerapkan aturan dominasi. Aturan dominasi dapat diterapkan untuk mengurangi ukuran matriks sebelum analisis terakhir untuk menentukan solusi yang optimal.

##### a. Penerapan Aturan Dominasi

Suatu strategi pada matriks *pay off* dikatakan dominan terhadap strategi lainnya jika memiliki nilai yang lebih baik dari strategi lainnya. Pemain Gojek menerapkan kriteria maksimin yaitu memaksimalkan keuntungan yang minimum, sehingga baris yang didominasi baris lain jika nilai *pay off* lebih kecil dari baris yang lainnya. Pemain Grab menerapkan kriteria minimaks yaitu meminimumkan kerugian yang maksimum, sehingga baris yang mendominasi baris lain jika nilai *pay off* lebih besar dari baris yang lainnya. Baris matriks *pay off* pada gojek yang dikeluarkan adalah baris yang didominasi sebaliknya kolom matriks *pay off* pada Grab yang dikeluarkan adalah kolom yang mendominasi.

Berdasarkan matriks permainan transportasi *online* Gojek dan Grab pada Tabel 4, baris strategi armada yang banyak ( $X_5$ ) dan pembayaran non-tunai ( $X_6$ ) didominasi oleh baris strategi praktis ( $X_1$ ), hemat biaya ( $X_2$ ), aman ( $X_3$ ) dan promosi ( $X_4$ ). Strategi-strategi yang didominasi tersebut dikeluarkan dari matriks permainan, sehingga matriks *Pay Off* dapat disederhanakan. Hasil matriks *Pay Off* yang telah disederhanakan dapat dilihat pada Tabel 5.

Tabel 5 Matriks *Pay Off* Tereduksi I (Dominasi I)

Gojek \ Grab	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$	Minimum	Maksimin
$X_1$	12	-16	-10	16	12	28	-16	4
$X_2$	36	8	4	34	34	42	4	
$X_3$	20	2	16	24	26	38	2	
$X_4$	18	-10	0	16	28	40	-10	
<b>Maksimum</b>	36	8	16	34	34	42		
<b>Minimaks</b>	<b>8</b>							

Berdasarkan Tabel 5 diperoleh bahwa nilai maksimin adalah 4 dan nilai minimaks adalah 8. Dengan demikian, permainan ini dikatakan belum optimal karena masih belum ditemukan nilai permainan (*saddle point*) yang sama. Selanjutnya dengan meneliti baris yang tersisa, terlihat bahwa untuk pemain kolom, strategi armada yang banyak ( $Y_5$ ) dan pembayaran non-tunai ( $Y_6$ ) mendominasi strategi praktis ( $Y_1$ ), hemat biaya ( $Y_2$ ), aman ( $Y_3$ ) dan promosi ( $Y_4$ ). Sehingga strategi  $Y_5$  dan  $Y_6$  dapat dihilangkan dan yang tersisa strategi  $Y_1, Y_2, Y_3$  dan  $Y_4$ . Hasil matriks *pay off* yang baru dapat dilihat pada Tabel 6.

Tabel 6 Matriks *Pay Off* Tereduksi II (Dominasi II)

Grab Gojek	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	Minimum	Maksimin
$X_1$	12	-16	-10	16	-16	4
$X_2$	36	8	4	34	4	
$X_3$	20	2	16	24	2	
$X_4$	18	-10	0	16	-10	
<b>Maksimum</b>	36	<b>8</b>	16	34		
<b>Minimaks</b>	<b>8</b>					

Pada Tabel 6 diperoleh bahwa nilai maksimin adalah 4 dan nilai minimaks adalah 8, permainan ini masih juga belum optimal, karena nilai permainan (*saddle point*) tidak sama, karena itu masih tetap menggunakan konsep dominasi untuk mencari nilai permainan. Dengan memperhatikan baris strategi yang tersisa, strategi praktis ( $X_1$ ) dan promosi ( $X_4$ ) didominasi oleh strategi hemat biaya ( $X_2$ ) dan aman ( $X_3$ ), sehingga  $X_1$  dan  $X_4$  dapat dihilangkan dan tersisa baris strategi  $X_2$  dan  $X_3$ . Hasil matriks *pay off* yang baru dapat dilihat pada Tabel 7.

Tabel 7 Matriks *Pay Off* Tereduksi III (Dominasi III)

Grab Gojek	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	Minimum	Maksimin
$X_2$	36	8	4	34	4	4
$X_3$	20	2	16	24	2	
<b>Maksimum</b>	36	<b>8</b>	16	34		
<b>Minimaks</b>	<b>8</b>					

Berdasarkan Tabel 7, diperoleh bahwa nilai maksimin adalah 4 dan nilai minimaks adalah 8, permainan ini juga belum optimal karena nilai permainan (*saddle point*) belum sama. Selanjutnya, masih tetap menggunakan konsep dominasi untuk mencari nilai permainan. Dengan memperhatikan kolom strategi yang tersisa, strategi praktis ( $Y_1$ ) dan promosi ( $Y_4$ ) mendominasi strategi hemat biaya ( $Y_2$ ) dan aman ( $Y_3$ ) sehingga  $Y_1$  dan  $Y_4$  dapat dihilangkan dan kolom strategi yang tersisa  $Y_2$  dan  $Y_3$ . Hasil matriks *pay off* yang baru dapat dilihat pada Tabel 8.

Tabel 8 Matriks *Pay Off* Tereduksi IV (Dominasi IV)

Grab Gojek	$Y_2$	$Y_3$	Minimum	Maksimin
$X_2$	8	4	4	4
$X_3$	2	16	2	
<b>Maksimum</b>	<b>8</b>	16		
<b>Minimaks</b>	<b>8</b>			



Setelah dilakukan aturan dominasi pada Tabel 8, diperoleh bahwa nilai maksimin dan nilai minimaks belum juga sama yaitu 4 dan 8. Sebagai alternatif, untuk memperoleh solusi optimal nilai *saddle point* dapat dicapai dengan metode analitis.

b. Penerapan metode analitis

Pada penelitian ini, metode analitis diterapkan untuk memperoleh nilai *saddle point* dari dua pemain. Berdasarkan Tabel 8, hasil analitis dapat dilihat sebagai berikut:

- Pemain Gojek

Langkah awal metode analitis pada pemain Gojek yaitu dapat di asumsikan sebagai berikut:

1. Strategi  $X_2$  memiliki peluang sebesar  $p$
2. Strategi  $X_3$  memiliki peluang sebesar  $(1 - p)$

Jika strategi Gojek direspon Grab dengan  $Y_2$ , maka diperoleh persamaan (1) seperti berikut:

$$\begin{aligned} 8p + 2(1 - p) &= 8p + 2 - 2p \\ &= 2 + 6p \end{aligned} \quad (1)$$

Jika strategi Gojek direspon Grab dengan  $Y_3$ , maka diperoleh persamaan (2) seperti berikut:

$$\begin{aligned} 4p + 16(1 - p) &= 4p + 16 - 16p \\ &= 16 - 12p \end{aligned} \quad (2)$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} 2 + 6p &= 16 - 12p \\ 2 - 16 &= -12p - 6p \\ -14 &= -18p \\ p &= \frac{-14}{-18} \\ p &= 0,778 \end{aligned} \quad (3)$$

Berdasarkan hasil perhitungan pada persamaan (3), dapat diperoleh nilai  $p = 0,778$  maka nilai  $(1 - p) = 0,222$ . Hal ini berarti ketika Gojek melakukan strategi hemat biaya, maka Gojek berpeluang sebesar 0,778 untuk memperoleh keuntungan yang banyak. Sedangkan ketika Gojek melakukan strategi aman, maka Gojek berpeluang sebesar 0,222 untuk memperoleh keuntungan yang banyak.

Langkah selanjutnya untuk memperoleh nilai *saddle point*, nilai peluang dari masing-masing strategi di substitusikan kedalam persamaan (1) dan persamaan (2). Hasil perhitungan sebagai berikut:

<p>- Persamaan (1)</p> $= 8p + 2(1 - p)$ $= 8(0,778) + 2(0,222)$ $= 6,68$	<p>- Persamaan (2)</p> $= 4p + 16(1 - p)$ $= 4(0,778) + 16(0,222)$ $= 6,68$
---	---

Hasil perhitungan pada persamaan (1) dan persamaan (2) menghasilkan keuntungan maksimum yang diharapkan adalah sama, yakni sebesar 6,68. Sebelum menggunakan strategi campuran, keuntungan Gojek hanya sebesar 4. Hal ini berarti dengan menggunakan strategi campuran, keuntungan maksimum Gojek bisa meningkat 2,68 menjadi 6,68.

- Pemain Grab

Langkah awal metode analitis pada pemain Grab yaitu dapat di asumsikan sebagai berikut:

1. Strategi  $Y_2$  memiliki peluang sebesar  $q$
2. Strategi  $Y_3$  memiliki peluang sebesar  $(1 - q)$

Jika strategi Grab direspon Gojek dengan  $X_2$ , maka diperoleh persamaan (4) seperti berikut:

$$\begin{aligned} 8q + 4(1 - q) &= 8q + 4 - 4q \\ &= 4 + 4q \end{aligned} \quad (4)$$

Jika strategi Grab direspon Gojek dengan  $X_3$ , maka diperoleh persamaan (5) seperti berikut:

$$\begin{aligned} 2q + 16(1 - q) &= 2q + 16 - 16q \\ &= 16 - 14q \end{aligned} \quad (5)$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} 4 + 4q &= 16 - 14q \\ 4 - 16 &= -14q - 4q \\ -12 &= -18q \\ q &= \frac{-12}{-18} \\ q &= 0,667 \end{aligned} \quad (6)$$

Berdasarkan hasil perhitungan pada persamaan (6), dapat diperoleh nilai  $q = 0,667$  maka nilai  $(1 - q) = 0,333$ . Hal ini berarti, ketika Grab melakukan strategi hemat biaya, maka Grab berpeluang sebesar 0,667 untuk memperkecil kerugiannya. Sedangkan ketika Grab melakukan strategi aman, maka Gojek berpeluang sebesar 0,333 untuk memperkecil kerugiannya.

Langkah selanjutnya untuk memperoleh nilai *saddle point*, nilai peluang dari masing-masing strategi di substitusikan kedalam persamaan (4) dan persamaan (5). Hasil dapat dilihat sebagai berikut:

<p>- Persamaan (4)</p> $\begin{aligned} &= 8q + 4(1 - q) \\ &= 8(0,667) + 4(0,333) \\ &= 6,68 \end{aligned}$	<p>- Persamaan (5)</p> $\begin{aligned} &= 2q + 16(1 - q) \\ &= 2(0,667) + 16(0,333) \\ &= 6,68 \end{aligned}$
--	--

Hasil perhitungan pada persamaan (4) dan persamaan (5) menghasilkan kerugian minimal yang diharapkan adalah sama, yakni sebesar 6,68. Sebelum menggunakan strategi campuran, kerugian minimal Grab sebesar 8. Hal ini berarti dengan menggunakan strategi campuran mampu menurunkan kerugian sebesar 1,32 menjadi 6,68.

## PENUTUP

Strategi pemasaran yang optimal menggunakan *game theory* dapat ditentukan dengan strategi campuran menerapkan metode analitis. Hasil penelitian diperoleh nilai permainan optimal pada Gojek dan Grab yaitu 6,68. Gojek memperoleh strategi optimal yaitu hemat biaya dan aman dengan nilai peluang masing-masing adalah 0,778 dan 0,222. Hal ini berarti ketika Gojek melakukan strategi hemat biaya, maka Gojek berpeluang sebesar 0,778 untuk memperoleh keuntungan yang banyak.

Sedangkan ketika Gojek melakukan strategi aman, maka Gojek berpeluang sebesar 0,222 untuk memperoleh keuntungan yang banyak. Grab juga menggunakan strategi hemat biaya dan aman tetapi nilai peluang masing-masing 0,667 dan 0,333. Hal ini berarti, ketika Grab melakukan strategi hemat biaya, maka Grab berpeluang sebesar 0,667 untuk memperkecil kerugiannya. Sedangkan ketika Grab melakukan strategi aman, maka Gojek berpeluang sebesar 0,333 untuk memperkecil kerugiannya.

#### **DAFTAR PUSTAKA**

- [1] Pontas M. Pardede. 2005. *Manajemen Operasi dan Produksi*. Yogyakarta: Andi.
- [2] Putri, B.R.T. (2017). *Manajemen Pemasaran*. Bali: Universitas Udayana.
- [3] Anggraini, D., & Putra, N. W. (2017). Aplikasi Logika Fuzzy Dalam Teori Permainan Untuk Menentukan Strategi Pemasaran (Studi Kasus: Persaingan Alfamart Dan Indomaret). *In Prosiding Seminar Nasional Matematika Dan Pendidikan Matematika* (Vol. 1, No. 1, Pp. 81-87).
- [4] Donoriyanto, D. S. (2010). Penentuan Strategi Pemasaran Produk Minuman Energi Dengan Teori Permainan (Game Theory) Untuk Meningkatkan Minat Konsumen di Wilayah Surabaya Timur. *Jurnal Penelitian Ilmu Teknik*, 10(1), 11-18.
- [5] Tobing, T. P. L. (2018). *Strategi Kompetisi Antar Gojek dan Grab dengan menggunakan Game Theory*. Universitas Sumatra Utara.

## Pemetaan Bijektif yang Mengawetkan Solvabilitas di Aljabar Lie

Qonita Qurrota A'yun<sup>1\*</sup>, Hardina Sandariria<sup>1</sup>, Sri Wigantono<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Mulawarman

Dikirim: September 2022; Diterima: September 2022; Dipublikasikan: September 2022

Alamat Email Korespondensi: qonitaqurrota@fmipa.unmul.ac.id

### Abstrak.

Misalkan  $L$  aljabar Lie general linier  $gl(n, \mathbb{C})$  atau aljabar Lie spesial linier  $sl(n, \mathbb{C})$ . Pemetaan bijektif  $f$  pada  $L$  dikatakan mengawetkan solvabilitas di dua arah jika  $f$  dan  $f^{-1}$  memetakan setiap subaljabar Lie solvabel di  $L$  ke suatu subaljabar Lie solvabel di  $L$ . Tujuan penelitian ini adalah untuk menunjukkan contoh pemetaan linier bijektif dan karakterisasi pemetaan bijektif tanpa syarat linier yang mengawetkan solvabilitas. Terlebih dahulu dibuktikan bahwa pemetaan transposisi dan pemetaan similaritas merupakan contoh pemetaan linier bijektif yang mengawetkan solvabilitas. Selanjutnya menggunakan Teorema Lie ditunjukkan bahwa karakterisasi pemetaan bijektif tanpa syarat linier yang mengawetkan solvabilitas dapat disederhanakan menjadi karakterisasi pemetaan bijektif pada  $M_n(\mathbb{C})$  yang mengawetkan triangularisabilitas matriks atau pasangan matriks dua arah, dengan  $M_n(\mathbb{C})$  dipandang sebagai aljabar matriks kompleks ukuran  $n \times n$ .

### Kata Kunci:

*Aljabar Lie general linier, aljabar Lie spesial linier, pemetaan bijektif, pengawetan, subaljabar Lie solvabel*

## PENDAHULUAN

Suatu pemetaan bijektif  $f$  di suatu aljabar lie  $L$  dikatakan mengawetkan solvabilitas dua arah jika untuk setiap subaljabar Lie solvabel  $M \subset L$  terdapat subaljabar Lie solvabel  $L_1, L_2 \subset L$  sedemikian sehingga  $f(M) \subset L_1$  dan  $f^{-1}(M) \subset L_2$ . Subaljabar Lie solvabel adalah subaljabar yang dapat diasosiasikan dengan suatu deret turunan yang stasioner.

Penelitian mengenai turunan aljabar Lie solvabel (sekaligus nilpoten) dapat ditemukan di [1]. Oleh [2], diperoleh derajat nilpotensi dari suatu nilradikal aljabar Lie solvabel untuk dua pembangun dengan kondisi tertentu. Penyelidikan mengenai karakterisasi pemetaan bijektif tanpa syarat linier yang mengawetkan solvabilitas dapat dilakukan dengan mencermati masalah karakterisasi pemetaan bijektif pada aljabar matriks kompleks yang mengawetkan triangularisabilitas matriks atau pasangan matriks dua arah. Penelitian representasi matriks segitiga atas untuk aljabar Lie solvabel dilakukan oleh [3]. Adapun proses mengaplikasikan teori matriks untuk mengklasifikasikan aljabar Lie solvabel untuk bilangan ril dikerjakan oleh [4].

Penelitian ini bertujuan untuk menyelidiki pemetaan-pemetaan bijektif yang mengawetkan solvabilitas dua arah di aljabar matriks  $M_n(\mathbb{C})$ . Sebagai batasan, pemetaan pada kasus ini dibatasi hanya pemetaan pada aljabar Lie general linier  $gl(n, \mathbb{C})$  atau aljabar Lie spesial linier  $sl(n, \mathbb{C})$ . Terlebih dahulu ditunjukkan contoh pemetaan linier bijektif yang mengawetkan solvabilitas di  $gl(n, \mathbb{C})$  beserta pembuktian Matematis, kemudian dengan studi literatur ditunjukkan bahwa Teorema Lie dapat digunakan untuk menyederhanakan karakterisasi pemetaan bijektif tanpa syarat linier yang mengawetkan solvabilitas [5].

## LANDASAN TEORI

**Definisi 1.** Aljabar Lie atas suatu lapangan  $F$  adalah ruang vektor  $L$  atas  $F$  bersama pergandaan non-asosiatif

$$[-, -] : L \times L \longrightarrow L$$

yang disebut Bracket Lie dan memenuhi aksioma:

(i) Bilinearitas

$[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z]$  dan  $[X, \alpha Y + \beta Z] = \alpha[X, Y] + \beta[X, Z]$  untuk setiap  $\alpha, \beta \in F$  dan  $X, Y \in L$ .

(ii) Alternativitas

$[X, X] = 0$  untuk setiap  $X \in L$ .

(iii) Identitas Jacobi

$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$  untuk setiap  $X, Y, Z \in L$

(iv) Anti Komutativitas  $[X, Y] = -[Y, X]$  untuk setiap  $X, Y \in L$

Bracket Lie  $[X, Y]$  disebut juga sebagai komutator dari  $X$  dan  $Y$ . Suatu aljabar Lie  $L$  dikatakan abelian jika untuk setiap  $X, Y \in L$  berlaku  $[X, Y] = [Y, X]$ . Misal diberikan himpunan semua matriks persegi ukuran  $n \times n$  atas lapangan bilangan kompleks  $\mathbb{C}$ , dinotasikan dengan  $M_n(\mathbb{C})$ . Himpunan  $M_n(\mathbb{C})$  merupakan ruang vektor atas lapangan  $\mathbb{C}$ . Matriks-matriks yang termuat di dalam  $M_n(\mathbb{C})$  diidentifikasi dengan operator linier yang beraksi pada  $\mathbb{C}^n$ . Misalkan  $M_n(\mathbb{C})$  dilengkapi oleh Bracket Lie  $[-, -]$  yang didefinisikan sebagai  $[A, B] = AB - BA$  untuk setiap  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ , maka  $M_n(\mathbb{C})$  dapat dipandang sebagai aljabar Lie general linier, dan dinotasikan dengan  $gl(n, \mathbb{C})$ . Misalkan  $sl(n, \mathbb{C})$  menotasikan himpunan semua matriks dengan trace bernilai nol, maka  $sl(n, \mathbb{C})$  membentuk subhimpunan di dalam  $gl(n, \mathbb{C})$  dan dipandang sebagai aljabar Lie spesial linier [6].

Misalkan  $L$  suatu aljabar Lie. Subruang  $S$  dari  $L$  disebut subaljabar dari  $L$  jika untuk setiap  $X, Y \in S$  memenuhi  $[X, Y] \in S$ . Lebih lanjut, jika berlaku  $[Z, X] \in S$  untuk setiap  $Z \in L$  maka  $S$  disebut sebagai ideal dari  $L$ .

Aljabar Lie turunan  $L^{(1)}$  dari  $L$  adalah ideal  $[L, L]$  yang dibangun oleh semua  $[X, Y]$ , dengan  $X, Y \in L$ . Untuk setiap aljabar Lie  $L$ , didefinisikan deret turunan  $L \supset L^{(1)} \supset$

$L^{(2)} = (L^{(1)})^{(1)} \supset \dots$ . Aljabar Lie dikatakan solvabel jika terdapat bilangan bulat positif  $r$  sedemikian sehingga  $L^{(r)} = \{0\}$ . Dengan kata lain, deret turunan tersebut bersifat stasioner [5].

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### 1. Pemetaan Linier Bijektif yang Mengawetkan Solvabilitas

Pada bagian ini ditunjukkan pembuktian bahwa pemetaan transposisi dan pemetaan similaritas merupakan contoh pemetaan linier bijektif pada aljabar Lie  $gl(n, \mathbb{C})$  yang mengawetkan solvabilitas dua arah.

#### Transposisi

Misalkan  $\psi$  suatu pengaitan di  $gl(n, \mathbb{C})$  dengan definisi

$$\begin{aligned}\psi : gl(n, \mathbb{C}) &\longrightarrow gl(n, \mathbb{C}) \\ A &\longmapsto A^t, \quad \forall A \in gl(n, \mathbb{C})\end{aligned}$$

Ditunjukkan bahwa  $\psi$  pemetaan linier bijektif.

- Diambil sebarang  $A, B \in gl(n, \mathbb{C})$  sedemikian sehingga  $A = B$ . Ditunjukkan bahwa  $\psi(A) = \psi(B)$ . Misalkan  $A = [a_{ij}]$  dan  $B = [b_{ij}]$ . Karena  $A = B$ , diperoleh  $[a_{ij}] = [b_{ij}]$  untuk setiap  $i, j = 1, 2, \dots, n$  sehingga berlaku pula  $[a_{ji}] = [b_{ji}]$ . Dengan kata lain,  $A^t = B^t$  atau  $\psi(A) = \psi(B)$ . Jadi,  $\psi$  merupakan pemetaan tertutup yang *well-defined*.
- Diambil sebarang  $A, B \in gl(n, \mathbb{C})$  dan sebarang  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Diperhatikan bahwa  $A, B$  masing-masing merupakan matriks persegi ukuran  $n \times n$  atas bilangan kompleks. Misalkan  $A = [a_{ij}]$  dan  $B = [b_{ij}]$ , diperoleh

$$\begin{aligned}\psi(A + B) &= \psi([a_{ij}] + [b_{ij}]) = \psi([a_{ij} + b_{ij}]) \\ &= \psi([(a + b)_{ij}]) = (([a + b]_{ij}))^t \\ &= (([a + b]_{ji})) = [a_{ji} + b_{ji}] \\ &= [a_{ji}] + [b_{ji}] = A^t + B^t \\ &= \psi(A) + \psi(B)\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\psi(\alpha A) &= \psi(\alpha[a_{ij}]) = \psi([\alpha a_{ij}]) = ([\alpha a_{ij}])^t \\ &= [\alpha a_{ji}] = \alpha[a_{ji}] = \alpha A^t \\ &= \alpha\psi(A)\end{aligned}$$

sehingga terbukti bahwa  $\psi$  merupakan pemetaan linier.

- Diambil sebarang  $A, B \in gl(n, \mathbb{C})$  sedemikian sehingga  $\psi(A) = \psi(B)$ , yang berarti  $A^t = B^t$ . Diperoleh  $[a_{ji}] = [b_{ji}]$  untuk setiap  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , yang berarti  $[a_{ij}] = [b_{ij}]$  atau  $A = B$ . Dengan kata lain,  $\psi$  pemetaan injektif. Selanjutnya diambil sebarang  $B \in gl(n, \mathbb{C})$ , dapat dipilih  $A = B^t \in gl(n, \mathbb{C})$  sedemikian sehingga  $\psi(A) = A^t = (B^t)^t = B$ . Dengan kata lain,  $\psi$  surjektif. Jadi, terbukti  $\psi$  pemetaan bijektif.

Dari pembuktian di atas, dapat disimpulkan bahwa transposisi  $\psi$  merupakan pemetaan linier yang bijektif. Selanjutnya ditunjukkan bahwa  $\psi$  mengawetkan solvabilitas dua arah.

Misalkan  $M$  sebarang subaljabar Lie solvabel di  $gl(n, \mathbb{C})$ . Berarti terdapat bilangan bulat positif  $r$  sedemikian sehingga  $M^{(r)} = \{0\}$ . Diambil sebarang  $A \in \psi(M)$ . Berarti terdapat suatu matriks persegi  $B \in M$  sedemikian sehingga  $A = \psi(B) = B^t$ . Karena  $B \in M$  dan  $M$  subaljabar Lie solvabel, berarti  $[B, C]^r = 0$  untuk  $C \in M$ . Diperhatikan bahwa  $([B, C])^t = (BC - CB)^t = C^t B^t - B^t C^t = [C^t, B^t]$  dan

$$\begin{aligned} ([B, C]^2)^t &= ((BC - CB)(BC - CB))^t \\ &= (BC(BC - CB) - CB(BC - CB))^t \\ &= (BCBC - BCCB - CBBC + CBCB)^t \\ &= (BCBC)^t - (BCCB)^t - (CBBC)^t + (CBCB)^t \\ &= C^t B^t C^t B^t - B^t C^t C^t B^t - C^t B^t B^t C^t + B^t C^t B^t C^t \\ &= C^t B^t C^t B^t - C^t B^t B^t C^t - B^t C^t C^t B^t + B^t C^t B^t C^t \\ &= C^t B^t (C^t B^t - B^t C^t) - B^t C^t (C^t B^t - B^t C^t) \\ &= (C^t B^t - B^t C^t)(C^t B^t - B^t C^t) \\ &= [C^t, B^t]^2. \end{aligned}$$

Dengan induksi Matematika, dapat ditunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan asli  $n$ , berlaku

$$\begin{aligned} ([B, C]^n)^t &= ([B, C] [B, C] \cdots [B, C])^t \\ &= ([B, C])^t ([B, C])^t \cdots ([B, C])^t \\ &= [C^t, B^t] [C^t, B^t] \cdots [C^t, B^t] \\ &= [C^t, B^t]^n. \end{aligned}$$

Berarti untuk bilangan bulat positif  $r$  diperoleh

$$[C^t, A]^r = [C^t, B^t]^r = ([B, C]^r)^t = 0^t = 0.$$

Dengan demikian,  $A$  juga termuat di dalam suatu subaljabar Lie solvabel. Berarti  $\psi$  mengawetkan solvabilitas. Secara analog, ditunjukkan pula bahwa invers pemetaan  $\psi$  juga mengawetkan solvabilitas. Diambil sebarang  $A \in \psi^{-1}(M)$ . Hal ini artinya, terdapat  $B \in \psi(M)$  sedemikian sehingga  $B = \psi(A)$ , dengan  $A \in M$ . Karena  $M$  solvabel dan  $\psi$  mengawetkan solvabilitas, berarti hasil peta  $\psi(A) = B$  juga termuat di dalam suatu subaljabar Lie solvabel di  $gl(n, \mathbb{C})$ .

Oleh karena itu, terbukti bahwa transposisi  $\psi$  merupakan pemetaan linier bijektif yang mengawetkan solvabilitas dua arah di aljabar Lie  $gl(n, \mathbb{C})$ .

### Similaritas

Misalkan  $\varphi$  pengaitan pada  $gl(n, \mathbb{C})$  dengan definisi

$$\begin{aligned} \varphi : gl(n, \mathbb{C}) &\longrightarrow gl(n, \mathbb{C}) \\ A &\longmapsto TAT^{-1} \end{aligned}$$

untuk setiap matriks  $A \in gl(n, \mathbb{C})$  dan suatu matriks  $T$  invertibel ukuran  $n \times n$ . Mula-mula ditunjukkan bahwa  $\varphi$  pemetaan linier bijektif.

- a. Diambil sebarang  $A, B \in gl(n, \mathbb{C})$  sedemikian sehingga  $A = B$ . Ditunjukkan bahwa  $\varphi(A) = \varphi(B)$ . Karena  $A = B$ , jelas bahwa untuk suatu matriks invertibel  $T$  ukuran  $n \times n$  berlaku

$$TAT^{-1} = TBT^{-1}.$$

Jadi,  $\psi$  merupakan pemetaan tertutup yang *well-defined*.

- b. Diambil sebarang  $A, B \in gl(n, \mathbb{C})$  dan sebarang  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Diperhatikan bahwa  $A, B$  masing-masing merupakan matriks persegi ukuran  $n \times n$  atas bilangan kompleks. Untuk suatu matriks invertibel  $T$ , diperoleh

$$\begin{aligned}\varphi(A + B) &= T(A + B)T^{-1} \\ &= (TA + TB)T^{-1} \\ &= TAT^{-1} + TBT^{-1} \\ &= \varphi(A) + \varphi(B)\end{aligned}$$

dan

$$\varphi(\alpha A) = T(\alpha A)T^{-1} = \alpha(TAT^{-1}) = \alpha\varphi(A)$$

sehingga terbukti bahwa  $\psi$  merupakan pemetaan linier.

- c. Diambil sebarang  $A, B \in gl(n, \mathbb{C})$  sedemikian sehingga  $\varphi(A) = \varphi(B)$ . Untuk suatu matriks invertibel  $T$  ukuran  $n \times n$  diperoleh

$$\begin{aligned}\varphi(A) &= \varphi(B) \\ TAT^{-1} &= TBT^{-1} \\ (TAT^{-1})T &= (TBT^{-1})T \\ TA(T^{-1}T) &= TB(T^{-1}T) \\ TA &= TB \\ T^{-1}(TA) &= T^{-1}(TB) \\ (T^{-1}T)A &= (T^{-1}T)B \\ A &= B.\end{aligned}$$

Dengan kata lain,  $\varphi$  pemetaan injektif. Selanjutnya diambil sebarang  $B \in gl(n, \mathbb{C})$ . Misalkan  $T$  suatu matriks invertibel ukuran  $n \times n$ , didefinisikan  $A = T^{-1}BT$ . Jelas bahwa  $A \in gl(n, \mathbb{C})$ , diperoleh

$$\begin{aligned}\varphi(A) &= TAT^{-1} \\ &= T(T^{-1}BT)T^{-1} \\ &= (TT^{-1})B(TT^{-1}) \\ &= B\end{aligned}$$

Dengan kata lain,  $\varphi$  surjektif. Jadi, terbukti  $\varphi$  pemetaan bijektif.



Dari pembuktian di atas, dapat disimpulkan bahwa similaritas  $\psi$  merupakan pemetaan linier yang bijektif. Selanjutnya ditunjukkan pula bahwa  $\psi$  mengawetkan solvabilitas dua arah.

Misalkan  $M$  sebarang subaljabar Lie solvabel di  $gl(n, \mathbb{C})$ . Karena  $M$  solvabel, terdapat bilangan bulat positif  $r$  sedemikian sehingga  $M^{(r)} = \{0\}$ . Diambil sebarang  $A \in \varphi(M)$ . Berarti terdapat suatu matriks persegi  $B \in M$  sedemikian sehingga  $A = \varphi(B) = TBT^{-1}$ , dengan  $T$  matriks invertibel ukuran  $n \times n$ . Karena  $B \in M$  dan  $M$  subaljabar Lie solvabel, berarti  $[B, C]^r = 0$  untuk  $C \in M$ . Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} [TBT^{-1}, TCT^{-1}] &= (TBT^{-1})(TCT^{-1}) - (TCT^{-1})(TBT^{-1}) \\ &= TB(T^{-1}T)CT^{-1} - TC(T^{-1}T)BT^{-1} \\ &= TBCT^{-1} - TCBT^{-1} \\ &= T(BCT^{-1} - CBT^{-1}) \\ &= T(BC - CB)T^{-1} \\ &= T[B, C]T^{-1}. \end{aligned}$$

Untuk bilangan bulat positif  $r$ , didapat

$$\begin{aligned} [A, TCT^{-1}]^r &= [TBT^{-1}, TCT^{-1}]^r \\ &= [TBT^{-1}, TCT^{-1}] [TBT^{-1}, TCT^{-1}] \dots [TBT^{-1}, TCT^{-1}] \\ &= (T[B, C]T^{-1}) (T[B, C]T^{-1}) \dots (T[B, C]T^{-1}) \\ &= (T[B, C]T^{-1})^r \\ &= T^r [B, C]^r (T^{-1})^r \\ &= T^r 0 (T^{-1})^r \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dengan demikian,  $A$  juga termuat di dalam suatu subaljabar Lie solvabel. Diperoleh  $\varphi$  mengawetkan solvabilitas. Secara analog, ditunjukkan pula bahwa invers pemetaan  $\varphi$  juga mengawetkan solvabilitas. Diambil sebarang  $A \in \varphi^{-1}(M)$ . Dari sini berarti terdapat  $B \in \varphi(M)$  sedemikian sehingga  $B = \varphi(A)$ , dengan  $A \in M$ . Karena  $M$  solvabel dan  $\varphi$  mengawetkan solvabilitas, berarti hasil peta  $\varphi(A) = B$  juga termuat di dalam suatu subaljabar Lie solvabel di  $gl(n, \mathbb{C})$ .

Oleh karena itu, terbukti bahwa pemetaan similaritas  $\varphi$  merupakan pemetaan linier bijektif yang mengawetkan solvabilitas dua arah di aljabar Lie  $gl(n, \mathbb{C})$ .

## 2. Pemetaan Bijektif Tanpa Syarat Linier yang Mengawetkan Solvabilitas

Pada bagian ini, diberikan paparan mengenai pemetaan bijektif tanpa syarat linier yang mengawetkan solvabilitas. Misalkan  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sebarang automorfisma di lapangan bilangan kompleks. Diperhatikan kembali bahwa elemen identitas perkalian dan konjugat kompleks merupakan satu-satunya automorfisma kontinu di  $\mathbb{C}$ . Pemetaan  $A = [a_{ij}] \mapsto [f(a_{ij})]$  merupakan automorfisma ring di  $M_n(\mathbb{C})$ . Lebih lanjut, pemetaan tersebut bijektif di  $gl(n, \mathbb{C})$  dan mengawetkan solvabilitas dua arah.

Berdasarkan Teorema Lie [7], setiap subaljabar Lie solvabel di  $gl(n, \mathbb{C})$  ekuivalen dengan suatu subaljabar matriks segitiga. Dengan kata lain, subaljabar Lie  $L \subset gl(n, \mathbb{C})$  solvabel jika dan hanya jika terdapat suatu rantai segitiga dari subruang-subruang untuk  $L$ . Subruang invarian di  $L$  adalah subruang yang invarian terhadap setiap elemen di  $L$ . Diperhatikan bahwa dua buah matriks  $A$  dan  $B$  dikatakan latis-equal, dinotasikan dengan  $A \sim B$ , jika kedua matriks tersebut memiliki latis subruang invarian yang tepat sama.

Teorema Lie menyatakan bahwa suatu pemetaan bijektif  $\tau : gl(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  yang memenuhi relasi  $\tau(A) \sim A$ , dengan  $A \in gl(n, \mathbb{C})$ , mengawetkan solvabilitas dua arah. Pemetaan tersebut merupakan sebarang permutasi pada setiap kelas-kelas ekuivalensi yang terbentuk oleh relasi  $\sim$ . Pada penulisan ini, pemetaan-pemetaan bijektif yang memenuhi kondisi tersebut disebut pengawetan latis. Oleh [5], ditunjukkan bahwa setiap pemetaan bijektif pada  $gl(n, \mathbb{C})$  yang mengawetkan solvabilitas dua arah merupakan komposisi dari pengawetan-pengawetan latis, untuk  $n \geq 3$ .

Suatu pemetaan bijektif  $f : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  dikatakan mengawetkan triangularisabilitas pasangan matriks di dua arah jika untuk setiap  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$  himpunan  $\{A, B\}$  bersifat triangularisabel secara bersamaan (atau similar dengan matriks segitiga) jika dan hanya jika himpunan  $\{f(A), f(B)\}$  juga triangularisabel. Konsep triangularisabilitas dapat pula dipandang sebagai pendekatan komutativitas [8]. Diberikan teorema dan akibat berikut [5].

**Teorema 2.** Misalkan  $f : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  pemetaan bijektif. Pernyataan-pernyataan berikut saling ekuivalen:

- (i) Pemetaan  $f$  mengawetkan solvabilitas dua arah.
- (ii) Pemetaan  $f$  mengawetkan triangularisabilitas dua arah.

Bukti. (i)  $\Rightarrow$  (ii). Mula-mula diasumsikan  $f$  mengawetkan solvabilitas dua arah. Misalkan  $S \subset M_n(\mathbb{C})$  suatu subset yang memuat matriks-matriks triangularisabel. Berarti terdapat suatu matriks invertibel  $T$  sedemikian sehingga  $S \subset TT_nT^{-1}$ , dengan  $T_n$  menotasikan aljabar segitiga atas penuh. Karena  $TT_nT^{-1}$  subaljabar Lie solvabel di  $gl(n, \mathbb{C})$ , berarti image dari pemetaan  $f$  haruslah termuat pula di suatu subaljabar Lie solvabel. Berdasarkan Teorema Lie, subaljabar Lie solvabel tersebut haruslah triangularisabel. Oleh karena itu,  $f(S)$  mengawetkan triangularisabilitas. Secara sama, diperoleh  $f^{-1}(S)$  mengawetkan triangularisabilitas.

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Untuk arah sebaliknya, misal diasumsikan bahwa  $f$  mengawetkan triangularisabilitas di dua arah. Misalkan  $M$  subaljabar Lie solvabel di  $gl(n, \mathbb{C})$ . Menurut Teorema Lie,  $M$  triangularisabel. Berdasarkan hipotesis bahwa  $f$  mengawetkan triangularisabilitas di dua arah, berarti  $f(M)$  dan  $f^{-1}(M)$  triangularisabel. Dengan demikian, terdapat suatu matriks invertibel  $T, S \in M_n(\mathbb{C})$  sedemikian sehingga  $f(M) \subset TT_nT^{-1}$  dan  $f^{-1}(M) \subset ST_nS^{-1}$ . Oleh karena itu,  $f$  mengawetkan solvabilitas di dua arah. ■

**Teorema 3.** Untuk suatu matriks  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , pernyataan-pernyataan berikut saling ekuivalen:

- (i)  $A = \lambda I + N$ , untuk suatu skalar  $\lambda \in \mathbb{C}$  dan matriks nilpoten  $N$  dengan  $N^{n+1} \neq 0$ .
- (ii) Jika untuk sebarang  $B, C \in M_n(\mathbb{C})$ , pasangan matriks  $\{A, B\}$  dan  $\{A, C\}$  keduanya triangularisabel, maka  $\{B, C\}$  juga triangularisabel.

Bukti. (i)  $\Rightarrow$  (ii). Diperhatikan bahwa rantai triangularisabilitas matriks  $A$  tunggal, sehingga berlaku pula pada setiap pasangan matriks  $\{A, B\}$  yang triangularisabel. Oleh karena itu, pernyataan pertama mengakibatkan pernyataan kedua.

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Andaikan matriks  $A$  tidak memenuhi bentuk berupa  $\lambda I + N$ , berarti  $A$  memiliki setidaknya dua nilai eigen, atau satu nilai eigen dengan multiplisitas geometri minimal dua. Untuk kedua kasus tersebut, setelah dikenakan similaritas, maka diasumsikan

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & * \end{bmatrix}$$

Diambil sebarang matriks  $B$  dan  $C$  dengan

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya diperoleh bahwa pasangan  $\{A, B\}$  dan  $\{A, C\}$  triangularisabel, yaitu dengan menyelidiki sudut kiri atas ukuran  $2 \times 2$  dari  $A$  dan  $C$  membentuk pasangan triangularisabel. Akan tetapi karena rantai triangularisabilitas dari  $B$  adalah tunggal, berarti pasangan matriks  $\{B, C\}$  tidak triangularisabel. Hal ini kontradiksi dengan kondisi yang diketahui yaitu bahwa jika  $\{A, B\}$  dan  $\{B, C\}$  triangularisabel, maka pasangan  $\{B, C\}$  seharusnya triangularisabel. Oleh karena itu, pengandaian salah dan harus diingkar. Berarti  $A$  memiliki bentuk  $\lambda I + N$ . ■

**Akibat 4.** Misalkan  $f : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  suatu pemetaan bijektif. Pernyataan-pernyataan berikut saling ekuivalen:

- (i) Pemetaan  $f$  mengawetkan triangularisabilitas di dua arah.
- (ii) Pemetaan  $f$  mengawetkan triangularisabilitas pasangan matriks di dua arah.

Bukti. (i)  $\Rightarrow$  (ii). Diasumsikan pemetaan  $f : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  adalah pemetaan bijektif yang mengawetkan triangularisabilitas di dua arah, berarti berlaku pula untuk triangularisabilitas pasangan matriks di dua arah sehingga pernyataan pertama mengakibatkan pernyataan kedua.

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Untuk arah sebaliknya, diasumsikan  $f : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  mengawetkan triangularisabilitas pasangan matriks di dua arah. Misalkan  $S \subset M_n(\mathbb{C})$  adalah suatu subaljabar. Karena  $f$  maupun  $f^{-1}$  memiliki sifat yang sama, berarti cukup ditunjukkan bahwa triangularisabilitas di  $S$  menghasilkan triangularisabilitas  $f(S)$ . Misalkan  $S$  triangularisabel dan adjoin untuk  $S$  adalah suatu nilpoten  $N$  dari nilindeks maksimal, yang jika diperlukan, memenuhi syarat sedemikian sehingga himpunan yang diperbesar ini juga masih triangularisabel. Diperhatikan bahwa image  $f$  dari himpunan yang diperbesar tersebut memiliki sifat bahwa setiap pasangan di dalamnya triangularisabel dan memuat  $f(N)$ . Berdasarkan asumsi keawetan dan Lemma 3, setiap pasangan matriks di himpunan tersebut memiliki rantai triangularisabilitas tunggal. Dengan demikian,  $f(S)$  triangularisabel. ■

Diperoleh syarat perlu dan cukup suatu pemetaan bijektif di  $M_n(\mathbb{C})$  mengawetkan solvabilitas, yaitu apabila pemetaan tersebut mengawetkan triangularisabilitas atau mengawetkan triangularisabilitas pasangan matriks di dua arah. Selanjutnya diberikan proposisi yang menunjukkan hubungan antara pengawetan triangularisabilitas dengan diagonalisasi.

**Proposisi 5.** Misalkan  $f : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  pemetaan bijektif yang mengawetkan triangularisabilitas pasangan matriks di dua arah. Misalkan  $D$  menotasikan himpunan bagian dari  $M_n(\mathbb{C})$  yang memuat semua matriks yang dapat didiagonalkan (terdiagonal), maka berlaku:

(i)  $f(D) = D$ , dan

(ii) Jika  $A$  dan  $B$  matriks yang dapat didiagonalkan (terdiagonal), maka  $A$  dan  $B$  komut jika dan hanya jika  $f(A)$  dan  $f(B)$  komut.

Bukti. Telah dibuktikan bahwa  $f$  mengawetkan koleksi himpunan-himpunan triangularisabel di dua arah. Secara khusus, pemetaan  $f$  menginduksi suatu korespondensi bijektif pada koleksi semua himpunan triangularisabel maksimal, yaitu himpunan matriks yang similar dengan  $T_n$ . Untuk sebarang himpunan triangularisabel  $\varepsilon$ , didefinisikan  $C_\varepsilon$  sebagai himpunan semua rantai triangularisabilitas untuk  $\varepsilon$ .

Mula-mula diselidiki bahwa untuk setiap  $\varepsilon$ ,  $C_\varepsilon$ , dan  $C_{f(\varepsilon)}$  yang triangularisabel, memiliki kardinalitas yang sama. Hal ini didapat dari fakta bahwa kardinalitas  $C_\varepsilon$  serupa dengan kardinalitas koleksi himpunan triangularisabel maksimal yang memuat  $\varepsilon$ .

Selanjutnya diselidiki bahwa matriks  $A$  memiliki sebanyak  $n$  nilai eigen yang berbeda jika dan hanya jika  $C_{\{A\}}$  memiliki tepat  $n!$  anggota. Karena setiap subruang invarian dari matriks terdiagonal  $A$  dengan nilai eigen berbeda merupakan hasil tambah langsung dari suatu ruang eigen, berarti berlaku sedemikian sehingga suatu operator memiliki tepat  $n!$  rantai triangularisabilitas. Untuk menunjukkan arah sebaliknya, diselidiki bahwa

sebarang matriks  $A$  yang mempunyai ruang eigen berdimensi minimal 2, maka  $C_{\{A\}}$  mempunyai kardinalitas tak terhingga. Oleh karena itu, diasumsikan bahwa bentuk kanonik Jordan dari  $A$  memiliki tepat satu sel yang berkorespondensi dengan setiap nilai eigen. Misalkan  $A$  mempunyai bentuk Jordan berupa  $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k$ , dengan setiap  $A_j$  merupakan suatu sel Jordan  $\lambda_j I + N_j$  yang beraksi pada suatu subruang  $V_j$ . Diingat bahwa setiap subruang invarian dari  $A$  dapat dinyatakan sebagai  $W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$  dengan  $W_j \subset V_j$  untuk setiap  $j = 1, 2, \dots, k$  merupakan kernel dari suatu nilpoten berpangkat  $(A_j - \lambda_j I)$ . Dari sini, maka kardinalitas  $C_{\{A\}}$  kurang dari  $n!$  jika sel Jordan dari  $A$  tidak berukuran  $1 \times 1$ .

Diperhatikan bahwa dua matriks terdiagonal komut jika dan hanya jika matriks-matriks tersebut terdiagonal secara bersamaan. Karena sebarang komposisi dari  $f$  dengan suatu transformasi similaritas memenuhi asumsi, cukup ditunjukkan bahwa himpunan  $\Delta_n$  dari semua matriks diagonal dipetakan pada  $S\Delta_n S^{-1}$  untuk suatu matriks invertibel  $S$ . Misalkan  $D_0$  suatu anggota *fixed* dari  $\Delta_n$  dengan  $n$  nilai eigen berbeda. Diperhatikan bahwa  $C_{\Delta_n} = C_{\{D_0\}}$ . Berdasarkan yang sudah dibuktikan sebelumnya, diperoleh bahwa  $f(D_0)$  memiliki  $n$  nilai eigen berbeda. Tanpa mengurangi perumuman, diasumsikan bahwa  $f(D_0)$  diagonal. Untuk setiap rantai triangularisabilitas  $D_0$ , terdapat suatu korespondensi dengan aljabar segitiga penuh dengan rantai subruang invarian, dan irisannya adalah  $\Delta_n$ . Image pemetaan  $f$  dari aljabar segitiga tersebut adalah  $n!$  aljabar segitiga penuh yang memuat  $f(D_0)$ . Karena  $f(D_0)$  memiliki nilai eigen berbeda, irisan tersebut haruslah merupakan  $\Delta_n$ . ■

## PENUTUP

Pemetaan transposisi dan similaritas merupakan contoh pemetaan linier bijektif yang mengawetkan solvabilitas di aljabar Lie  $L$  dengan  $L$  merupakan aljabar Lie general linier atau aljabar Lie spesial linier. Kriteria pemetaan bijektif tanpa syarat linier pada aljabar matriks kompleks persegi yang mengawetkan solvabilitas dapat ditinjau dari sifat pengawetan triangularisabilitas matriks dan pasangan matriks di dua arah.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Mackedonskyi, O., dan Petravchuk, A.P. (2014). On nilpotent and solvable Lie algebras of derivations. *Journal of Algebra*, **401**, 245-257.
- [2] Cagliero, L., Levstein, F., dan Szechtman, F. (2021). Nilpotency degree of the nil-radical of a solvable Lie algebra on two generators and uniserial modules associated to free nilpotent Lie algebras. *Journal of Algebra*, **585**, 447-483.
- [3] Ceballos, M., Nunez, J., dan Tenorio, A.F. (2017). Minimal faithful upper-triangular matrix representations for solvable Lie algebras, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **318**, 279-292.

- [4] Le, V.A., Nguyen, T.A., Nguyen, T.T.C., Nguyen, T.T.M., dan Vo, T.N.. (2020). Applying matrix theory to classify real solvable Lie algebras having 2-dimensional derived ideals. *Linear Algebra and its Applications*, **588**, 282-303.
- [5] Radjavi, H., dan Semrl, P. (2004). Non-linear maps preserving solvability, *Journal of Algebra* **280**, 624-634.
- [6] Milne J.S. (2011). *Algebraic Groups, Lie Groups and their Arithmetic Subgroups*, 239-272
- [7] Samelson, H. (1969). Notes on Lie Algebras, *Van Nostrand Reinhold Math. Stud.*
- [8] Radjavi, H., dan Rosenthal, P. (2000). *Simultaneous Triangularization*, New York: Springer.

## **Analisis Model Penelusuran Banjir Gelombang Difusi dengan Metode Duffort-Frankel di Wilayah Sungai Karang Mumus**

Indriasri Raming<sup>1,\*</sup>, Alif Jabar<sup>1</sup>, Rosi<sup>1</sup>, Riska Nur Sofiatunisa<sup>1</sup>, Rico Dwi Cahyono<sup>1</sup>, Raka Putra Pridiptama<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Program Studi Matematika, FMIPA Universitas Mulawaman

Dikirim: September 2022; Diterima: September 2022; Dipublikasi: September 2022

Alamat Email Korespondensi: [indriasrirming@fmipa.unmul.ac.id](mailto:indriasrirming@fmipa.unmul.ac.id)

### **Abstrak**

Banjir adalah salah satu bencana yang sangat merugikan karena debit air yang masuk ke saluran melebihi batas kapasitas oleh karena itu perlu dilakukan penelusuran banjir. Penelusuran banjir merupakan metode yang tepat dan mudah untuk melakukan prakiraan banjir. Kelebihan dari metode Duffort-Frankel untuk penyelesaian model ini adalah belum ada yang menggunakan sebelumnya untuk model ini. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menganalisis model penelusuran banjir gelombang difusi dengan menggunakan metode beda hingga Duffort-Frankel, mengetahui pengaruh kecepatan aliran rata-rata yang berbeda terhadap ketinggian air pada aliran sungai. Metode ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh kecepatan aliran rata-rata terhadap ketinggian sungai. Hasil simulasi dengan menggunakan metode Duffort-Frankel menunjukkan bahwa semakin menjauhi hulu sungai maka semakin rendah tinggi aliran sungai tersebut. Selanjutnya dengan menginputkan kecepatan aliran rata-rata ( $v$ ) yang berbeda maka didapatkan semakin besar kecepatan aliran rata-rata ( $v$ ) maka semakin rendah ketinggian aliran sungai. Dari hukum fisika tersebut berarti bahwa ketinggian aliran berbanding terbalik dengan kecepatan aliran. Sehingga dengan mengetahui perubahan kecepatan aliran pada daerah hulu maka dapat diprediksi seberapa besar perubahan ketinggian air yang akan terjadi pada setiap titik-titik pengamatan pada bagian hilir ruas saluran atau sungai tersebut.

### **Kata Kunci:**

*Banjir, gelombang difusi, Metode Duffort-Frankel*

## **PENDAHULUAN**

Banjir adalah keadaan dimana debit air yang masuk ke saluran melebihi batas kapasitas sehingga akan menimbulkan luapan air yang melebihi batas normal. Luapan air yang melebihi batas normal dapat menimbulkan kerusakan/ kerugian seperti kehilangan harta benda dan jiwa seseorang. Oleh karena itu, perlu adanya peringatan dini untuk meminimalisir kerugian.

Penelusuran banjir merupakan metode yang paling tepat dan mudah untuk memberikan peringatan dini dalam prakiraan terjadinya banjir. Peringatan dini dalam pengendalian bencana banjir merupakan sistem yang memberikan peringatan waktu kejadian aliran debit air yang melebihi batas normal untuk penyelamatan harta benda dan jiwa seseorang. Prakiraan banjir dapat ditentukan tingkat akurasi dengan melihat curah hujan, luas daerah pengaliran sungai, serta parameter kalibrasi banjir yang pernah terjadi.

Model penelusuran banjir gelombang difusi menunjukkan bahwa kemiringan dasar saluran dan kecepatan rata-rata aliran berpengaruh terhadap perilaku aliran

gelombang banjir. Pendekatan dalam model penelusuran banjir antara lain: pendekatan model gelombang difusi, model gelombang kinematik dan model gelombang dinamik atau yang dikenal sebagai pendekatan persamaan Saint-Venant yang lengkap [1].

Salah satu cara untuk mengetahui perilaku banjir adalah dengan cara menganalisis solusi model penelusuran banjir dengan menggunakan model numerik. Banyak peneliti yang sudah mengembangkan dan menganalisis model penelusuran banjir untuk mengetahui prakiraan terjadinya banjir. Analisis bentuk konservatif persamaan massa dan momentum model penelusuran banjir [2]. Membangun model matematika penelusuran banjir gelombang difusi bentuk konservatif [3]. Model matematika penelusuran banjir gelombang difusi bentuk nonkonservatif serta menganalisisnya dengan menggunakan metode volume hingga [1]. Analisis model matematika gelombang banjir dengan menggunakan metode beda hingga, algoritma penyelesaian sistem persamaan aljabar non-linearinya dengan iterasi Newton-Raphson [4].

Metode yang digunakan dalam menyelesaikan model matematika sangat banyak salah satunya yaitu metode Dufort-Frankel. [5] menggunakan metode Dufort-Frankel dalam menentukan harga opsi pada model black-scholes. Aplikasi metode Dufort-Frankel dalam menyelesaikan persamaan adveksi difusi 2-D untuk transfer polutan [6].

Kelebihan metode Dufort-Frankel dalam menyelesaikan model penelusuran banjir gelombang difusi ini yaitu belum terdapat peneliti yang menyelesaikan model penelusuran banjir gelombang difusi dengan menggunakan metode Dufort-Frankel. Setelah model penelusuran banjir gelombang difusi ini diselesaikan dengan metode Dufort-Frankel lalu model ini disimulasikan dengan menggunakan program Matlab untuk memperoleh hasil numeriknya dengan menginputkan beberapa parameter dan beberapa kondisi yang ditetapkan.

## LANDASAN TEORI

### Penelusuran Banjir

Penelusuran banjir dapat juga diartikan sebagai penyelidikan perjalanan banjir (*flood tracing*) yang didefinisikan sebagai upaya prakiraan corak banjir pada bagian hilir berdasarkan corak banjir di daerah hulu (sumbernya). Oleh karena itu, dalam kajian hidrologi penelusuran banjir (*flood routing*) dan penyelidikan banjir (*flood tracing*) digunakan untuk peramalan banjir dan pengendalian banjir [7].

Estimasi perilaku dari suatu sistem saluran dapat ditentukan dengan menggunakan penelusuran aliran terdistribusi berdasarkan persamaan differensial lengkap aliran tidak tunak satu dimensi (Persamaan Saint-Venant). Persamaan ini menghitung secara komputasi debit aliran dan kedalaman air sebagai fungsi ruang dan waktu. Persamaan asal Saint-Venant adalah persamaan konservasi massa (1) dan persamaan konservasi momentum (2), yaitu:

$$\frac{\partial(AV)}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} - q = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \left( \frac{\partial h}{\partial x} + S_f \right) = 0 \quad (2)$$

dengan,

$t$  : waktu,

$x$  : jarak sepanjang aliran air

$A$  : luas penampang



$V$  : kecepatan

$q$  : *inflow* atau *outflow* lateral terdistribusi sepanjang  $x$

$h$  : elevasi permukaan air

$S_f$  : kemiringan gesekan yang dapat dievaluasi secara seragam.

### Gelombang Difusi (*Diffusive Wave*)

Gelombang difusi merupakan suatu proses meningkatnya kecepatan pertukaran atau pemindahan sifat dari suatu massa air ke massa air lainnya melalui moleku-molekulnya. Model ini mempertimbangkan pengaruh *backwater* tetapi tidak menunjukkan distribusi secara langsung terhadap waktu sepanjang penelusuran, keakurasiannya juga rendah untuk *hydrograph* menaik cepat, seperti kejadian kerusakan bendung, gelombang hujan badai, atau pelepasan cepat air dari bendungan dan terputus-putus, dimana propagasi melalui pengaliran berkemiringan sedang sampai datar. Jika persamaan Saint Venant berlaku maka persamaan gelombang difusi menjadi

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial vy}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = S_0 - S_f \quad (4)$$

Persamaan (3) merupakan persamaan kontinuitas gelombang difusi dan persamaan (4) merupakan persamaan momentum gelombang difusi [8].

### Model Penelusuran Banjir Gelombang Difusi

Model penelusuran banjir gelombang difusi terbagi menjadi dua bentuk yaitu

#### a. Model Bentuk Konservatif

Model penelusuran banjir gelombang difusi bentuk konservatif dilakukan untuk mendapatkan debit aliran banjir sebagai variabel terikat. Model ini terdiri atas persamaan konservasi massa (5) dan persamaan konservasi momentum (6).

$$\frac{\partial h}{\partial t} + V \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{V \partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = gS_0 - gS_f \quad (6)$$

Untuk mendapatkan persamaan konveksi-difusi dari bentuk konservatif persamaan (5) dan (6) diselesaikan secara simultan. Dengan bentuk suku pertama dan kedua pada persamaan (6) dapat diabaikan maka persamaan (6) akan menjadi

$$\frac{\partial h}{\partial x} = S_0 - S_f \quad (7)$$

dengan asumsi bahwa lebar saluran konstan dan penampang melintang sungai ada segiempat maka luas penampang saluran adalah  $A = bh$

dengan

$A$  : luas penampang saluran

$b$  : lebar saluran

$h$  : kedalaman air

Penyelesaian model penelusuran banjir bentuk nonkonservatif dilakukan untuk mendapatkan ketinggian muka air banjir sebagai variable yang terikat. Dalam paper ini, model fisis penelusuran banjir dibagi menjadi 5 volume kendali dengan jumlah node sebanyak 5 pada masing-masing volume kendalinya. Nilai pada tiap-tiap node inilah yang akan dicari sebagai variasi ketinggian air pada ruas saluran. Persamaan pembangun diselesaikan secara simultan sehingga diperoleh persamaan dalam bentuk persamaan konveksi-difusi.  $V(x, t)$  dieliminasi dengan persamaan (5) dan persamaan (7) maka akan didapatkan bentuk

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} - S \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \quad (9)$$

Persamaan (8) adalah persamaan difusi konveksi penelusuran banjir gelombang difusi. Selanjutnya untuk menentukan koefisien difusi ( $S$ ) dan kecepatan gelombang banjir ( $c$ ) digunakan persamaan Chezy, yaitu

$$S_f = \frac{Q^2}{C^2 b^2 h^3}$$

dengan  $C$  : koefisien Chezy

$$\text{Dengan } S = \frac{AV}{2bS_f} \text{ (koefisien difusi) dan } c = \frac{3}{2}V$$

Selanjutnya persamaan Chezy (9) diturunkan terhadap  $Q$  dan  $h$ . Maka akan diperoleh

### Metode Dufort-Frankel

Penyelesaian model matematika dalam metode Dufort-Frankel ini menggunakan dua indeks yaitu  $x$  yang merupakan ruang yang ditunjukkan dengan  $i$  dan  $t$  merupakan waktu yang ditunjukkan dengan  $k$ . Untuk mendapatkan turunan metode beda hingga Dufort-Frankel ini dapat digunakan beda hingga pusat seperti berikut [9].

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i^n = \frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t} + O[\Delta t^2] \quad (10)$$

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i^n = \frac{f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n}{\Delta x^2} + O[\Delta x^2] \quad (11)$$

selanjutnya  $f_i^n$  akan diubah dengan rata-rata dari keadaan sebelum dan setelahnya, rata-rata dari  $f_i^n$  tersebut adalah sebagai berikut

$$f_i^n = \frac{f_i^{n+1} + f_i^{n-1}}{2} + O[\Delta t^2] \quad (12)$$

subtitusikan persamaan (10) ke persamaan (11), dan dinyatakan menjadi persamaan diferensial  $\left. \frac{df}{dx} \right|_i^n = \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i^n$ , sehingga akan menjadi

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t} + O[\Delta t^2] = \frac{f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{\Delta x^2} + O[\Delta x^2] \quad (13)$$

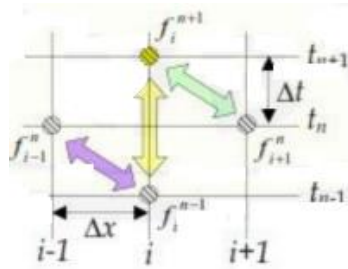
Dengan demikian kesalahan pemotongan untuk metode Dufort-Frankel adalah sebagaiberikut

$$\begin{bmatrix} \text{DufortFrankle} \\ \text{TruncationError} \end{bmatrix} = O[(\Delta t)^2] + O\left[\frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}\right] + O[(\Delta x)^2]$$

sehingga pendekatan beda hingga Dufort-Frankel untuk waktu dan ruang yaitu

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{\Delta x^2} \quad (14)$$

skema yang digunakan pada metode Dufort-Frankel dapat dilihat pada Gambar 1

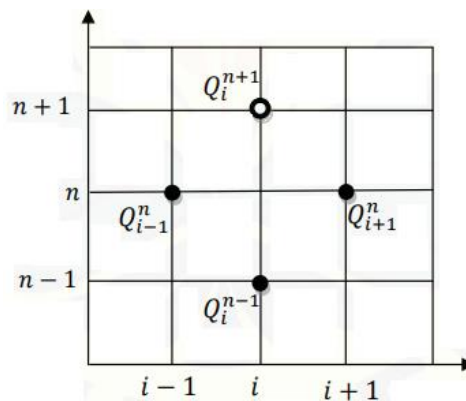


Gambar 1. Skema Dufort-Frankel

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### Diskritisasi Model Penelusuran Banjir Gelombang Difusi Dengan Metode Dufort-Frankel

Bentuk solusi numerik dari persamaan diferensial parsial adalah diskrit. Oleh karena itu, persamaan (8) selanjutnya akan didiskritisasi menggunakan beda hingga skema Dufort-Frankel. Dalam kisi skema Dufort-Frankel untuk mencari solusi  $h_i^{n+1}$  terdapat titik disekitarnya yaitu  $h_{i-1}^n$ ,  $h_{i+1}^n$  dan  $h_i^{n-1}$ . Kisi skema Dufort-Frankel dalam model penelusuran banjir gelombang difusi dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Skema Dufort-Frankel, lambang  $\bigcirc$  menunjukkan titik eksekusi dan Lambang  $\bullet$  menunjukkan titik disekitarnya

Sehingga dapat dilihat pada Gambar 4.1 bahwa untuk mencari solusi  $h_i^{n+1}$  harus mengetahui nilai dari  $h_{i-1}^n$ ,  $h_{i+1}^n$  dan  $h_i^{n-1}$ . Sesuai dengan persamaan (14), perubahan hingga skema Dufort-Frankel terhadap ruang dan waktu sebagai berikut.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{h_{i+1}^n - h_i^{n+1} - h_i^{n-1} + h_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (15)$$

$$(16)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_i^{n+1} - h_i^{n-1}}{2\Delta t}$$

Bentuk diskrit dari  $\frac{\partial h}{\partial x}$  adalah

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h_{i+1}^n - h_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

Sehingga persamaan diskritisasi dari persamaan (8) adalah

$$\begin{aligned} \frac{h_i^{n+1} - h_i^{n-1}}{2\Delta t} + c \left( \frac{h_{i+1}^n - h_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) - S \left( \frac{h_{i+1}^n - h_i^{n+1} - h_i^{n-1} + h_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right) &= 0 \\ \frac{h_i^{n+1}}{2\Delta t} - \frac{h_i^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{ch_{i+1}^n}{2\Delta x} - \frac{ch_{i-1}^n}{2\Delta x} - S \frac{h_{i+1}^n}{\Delta x^2} + S \frac{h_i^{n+1}}{\Delta x^2} + S \frac{h_i^{n-1}}{\Delta x^2} - S \frac{h_{i-1}^n}{\Delta x^2} &= 0 \\ h_i^{n+1} + h_{i+1}^n \left( \frac{\Delta t(c\Delta x - 2S)}{2\Delta x^2 + 2S\Delta t} \right) - h_i^{n-1} + h_{i-1}^n \left( -\frac{c}{2\Delta x} - \frac{S}{\Delta x^2} \right) + h_{i-1}^n \left( -\frac{c}{2\Delta x} - \frac{S}{\Delta x^2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Persamaan (18) dibagi kedua ruas dengan

$$\frac{1}{2\Delta t} + \frac{S}{\Delta x^2}$$

Maka diperoleh persamaan sebagai berikut

$$h_i^{n+1} + h_{i+1}^n \left( \frac{\Delta t(c\Delta x - 2S)}{2\Delta x^2 + 2S\Delta t} \right) - h_i^{n-1} \left( \frac{\Delta x^2 - 2S\Delta t}{\Delta x^2 + 2S\Delta t} \right) + h_{i-1}^n \left( \frac{\Delta t(-c\Delta x - 2S)}{\Delta x^2 + 2S\Delta t} \right) = 0$$

Selanjutnya dimisalkan

$$\alpha_i = \left( \frac{\Delta t(c\Delta x - 2S)}{2\Delta x^2 + 2S\Delta t} \right)$$

$$\beta_i = \left( \frac{\Delta x^2 - 2S\Delta t}{\Delta x^2 + 2S\Delta t} \right)$$

$$\gamma_i = \left( \frac{\Delta t(-c\Delta x - 2S)}{\Delta x^2 + 2S\Delta t} \right)$$

Maka persamaan menjadi berikut  $h_i^{n+1} + h_{i+1}^n \alpha_i - h_i^{n-1} \beta_i + h_{i-1}^n \gamma_i = 0$

Persamaan 20 untuk  $1 < i < I-1$  maka diperoleh sistem persamaan sebagai berikut:

Untuk  $i = 1$  maka  $h_1^{n+1} + h_2^n \alpha_1 - h_1^{n-1} \beta_1 + h_0^n \gamma_1 = 0$

Untuk  $i = 2$  maka  $h_2^{n+1} + h_3^n \alpha_2 - h_2^{n-1} \beta_2 + h_1^n \gamma_2 = 0$

Untuk  $i = 3$  maka  $h_3^{n+1} + h_4^n \alpha_3 - h_3^{n-1} \beta_3 + h_2^n \gamma_3 = 0$

....

Untuk  $i = I-1$  maka  $h_{I-1}^{n+1} + h_I^n \alpha_{I-1} - h_{I-1}^{n-1} \beta_{I-1} + h_{I-1}^n \gamma_{I-1} = 0$

Jika disajikan dalam bentuk matriks, sistem persamaan tersebut adalah sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} h_1^{n+1} \\ h_2^{n+1} \\ h_3^{n+1} \\ \vdots \\ h_{l-1}^{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_2 & 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \gamma_l & \dots & \alpha_{l-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^{n-1} \\ h_2^{n-1} \\ h_3^{n-1} \\ \vdots \\ h_{l-1}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bentuk diskritisasi persamaan (14) dengan metode beda hingga skema Dufort-Frankel dapat disederhanakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} h^{n+1} + Ah^n - Bh^{n-1} &= 0 \\ h^{n+1} &= -Ah^n + Bh^{n-1} \end{aligned} \quad (21)$$

Dengan

$$Q^{n+1} = \begin{bmatrix} Q_1^{n+1} \\ Q_2^{n+1} \\ Q_3^{n+1} \\ \vdots \\ Q_{l-1}^{n+1} \end{bmatrix}, Q^{n-1} = \begin{bmatrix} Q_1^{n-1} \\ Q_2^{n-1} \\ Q_3^{n-1} \\ \vdots \\ Q_{l-1}^{n-1} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_2 & 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \gamma_l & \dots & \alpha_{l-2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_2 & \beta_2 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \beta_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \gamma_l & \dots & \beta_{l-1} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk iterasi yang kedua mencari nilai  $h_i^1$  yang dilakukan dengan mendiskritkan model penelusuran banjir (14) menggunakan skema beda hingga maju. Perubahan hingga skema beda hingga maju terhadap waktu dan ruang yang digunakan dalam mendiskritkan model penelusuran banjir gelombang difusi yaitu sebagai berikut.

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h_{i+1}^n - h_i^n}{\Delta x} \quad (22)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_{i+1}^n - h_i^n}{\Delta t} \quad (23)$$

Turunan kedua terhadap ruang pada model penelusuran banjir gelombang difusi didiskritkan dengan menggunakan skema beda hingga tengah atau pusat sebagai berikut.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{h_{i+1}^n - 2h_i^n + h_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (24)$$

Dengan menggunakan persamaan (22, 23 dan 24) maka model penelusuran banjir gelombang difusi menjadi sebagai berikut

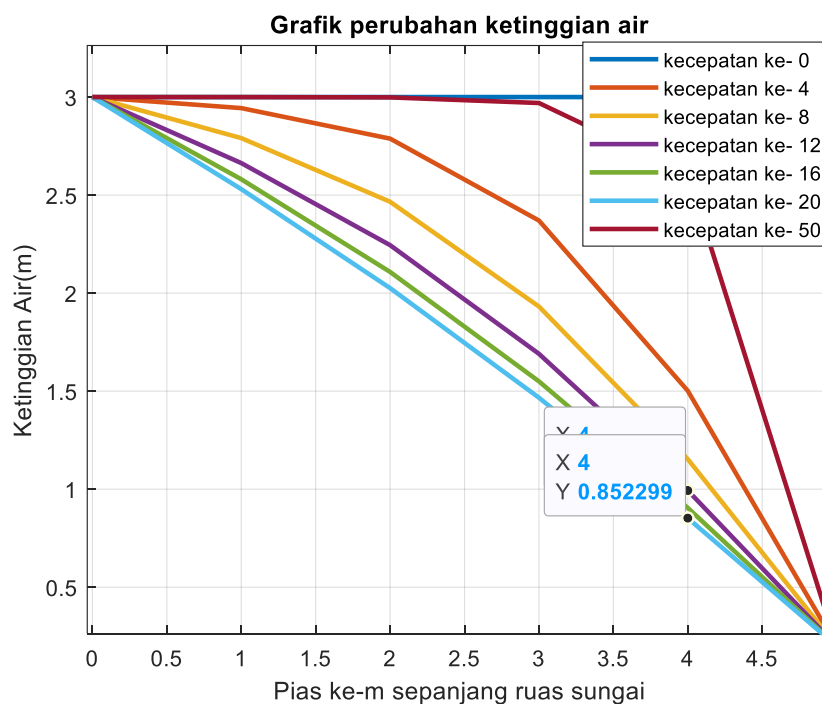
$$\frac{h_{i+1}^n - h_i^n}{\Delta t} + c \left( \frac{h_{i+1}^n - h_i^n}{\Delta x} \right) - S \frac{h_{i+1}^n - 2h_i^n + h_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \quad (25)$$

Dari persamaan (25) akan dicari nilai  $h_i^1$ . Setelah nilai  $h_i^1$  diketahui maka kisi skema Dufort-Frankel dapat dilihat.

Selanjutnya akan mensimulasikan model penelusuran banjir gelombang difusi dengan metode beda hingga Dufort-Frankel. Parameter yang digunakan adalah kecepatan aliran rata-rata ( $v$ ) sebesar 4 m/s, 8 m/s dan 12 m/s. Selain itu diinputkan nilai-nilai yang telah ditetapkan yaitu panjang ruas saluran ( $L$ ) = 10.000 m, lebar saluran ( $b$ ) = 50 m, koefisien chezy ( $C$ ) = 50,2, kedalaman air rata-rata ( $h$ ) = 4 m, kondisi batas

hulu ( $h_A$ ) = 25  $m^3/s$ , kondisi batas hilir ( $h_B$ ) = 20  $m^3/s$  dan debit awal ( $h_0$ ) = 25  $m^3/s$ , dengan output yang dihasilkan berupa pengaruh kecepatan aliran rata-rata ( $v$ ) yang berbeda terhadap debit aliran sungai ( $h$ ). Berikut merupakan simulasi program dengan dengan pias sebesar 5.

Simulasi dengan pias sebesar 5 ini dilakukan dengan cara membagi  $x = 10.000$  m dengan 5 pias sehingga didapatkan  $\Delta x = 750$  m serta dengan  $\Delta t = 0,01$  detik. Berikut merupakan simulasi dengan kecepatan sebesar sebesar 4 m/s , 8 m/s dan 12 m/s. Simulasi program yang pertama yaitu pengaruh kecepatan aliran rata-rata sebesar 2 m/s terhadap debit aliran sungai. Grafik simulasi program dapat dilihat pada gambar 1. Dalam kasus ini setiap kecepatan yang diberikan menghasilkan nilai ketinggian muka air yang berbeda terhadap titik node sepanjang ruas saluran.



Gambar 1 Perubahan Ketinggian muka air sepanjang ruas saluran/sungai

## PENUTUP

Dari hasil simulasi model penelusuran banjir gelombang difusi menunjukkan bahwa kemiringan dasar saluran dan kecepatan rata-rata aliran berpengaruh terhadap perilaku aliran gelombang banjir dengan kesimpulan:

1. Semakin besar kecepatan aliran rata-rata pada saluran/sungai maka semakin kecil ketinggian muka air yang dihasilkan sepanjang ruas saluran/sungai dan semakin kecil kecepatan aliran rata-rata pada saluran/sungai maka semakin besar ketinggian muka air.
2. Semakin besar kemiringan dasar saluran maka semakin besar ketinggian muka air yang dihasilkan sepanjang ruas saluran/sungai dan semakin kecil kemiringan dasar saluran maka semakin kecil ketinggian muka air.

**DAFTAR PUSTAKA**

- [1] Siing, M., dan Basuki, W. (2011). Penyelesaian Numerik Model Penelusuran Banjir Gelombang Difusi Menggunakan Metode Volume Hingga. *Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA*, Universitas Negeri Yogyakarta. M77-M84.
- [2] Gosiorowski, D., dan Szymkiewicz, R. (2007). Mass And Momentum Conservation In The Simplified Flood Routing Models. *Jurnal of Hydrology*, **346**: 51- 58.
- [3] Novak, P., Guinot, V., Jeffrey, A. and Reeve, D.E. (2010). *Hydraulic Modelingan Introduction. Principles, Methods and Application*. New York: Spon Press.
- [4] Chagas, P. F. (2010). Aplication of Mathematical Modeling to Study Flood Wave Beahvior in Natural Rivers as Function of Hydraulic and Hydrological Parameters of the Basin. *Hydrology Day*
- [5] Siswanto, H., Purnomo, K. D., dan Kusbudiono. (2014). Penentuan Harga Opsi Pada Model Balck-Scholes Menggunakan Metode Beda Hingga Dufort Frankel. *Prosiding Seminar Nasional Matematika*, Universitas Jember.329-335.
- [6] Alman, Kusuma, J., dan Amiruddin. (2013). Penyelesaian Numerik Persamaan Adveksi Difusi 2-D Untuk Transfer Polutan dengan Menggunakan Metode Beda Hingga Dufort Frankel. *Jurnal Matematika*, 1-14. Universitas Hasanudin.
- [7] Tikno, S. (2002). Penerapan Metode Penelusuran Banjir (Flood Routing) untuk Program Pengendalian dan Sistem Peringatan Dini Banjir Kasus : Sungai Ciliwung. *Jurnal sains dan Teknologi Modfikasi Cuaca*, Universitas Diponegoro. 53-60.
- [8] Kodoatie, R. (2002). *Hidrolika Terapan Aliran Pada Saluran Terbuka dan Pipa*. Yogyakarta: Andi.
- [9] Caretto, L. (2002). *Computational Fluid Dynamics*. California: University Nortridge

## Solusi Numeris Persamaan Saint Venant pada *Lateral Flow* Aliran Terbuka di Kanal Sempaja

Indriasri Raming<sup>1,\*</sup>, Itsar Mangiri<sup>1</sup>, Anis Mujiyarti<sup>1</sup>, Rara Suciati<sup>1</sup>, Maulidhina Syafitri<sup>1</sup>, Riski Alfira Wulandari S<sup>1</sup>, Mushalifah<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Laboratorium Matematika Komputasi, Program Studi Matematika, FMIPA Universitas Mulawaman*

Dikirim: September 2022; Diterima: September 2022; Dipublikasi: September 2022

Alamat Email Korespondensi: [indriasriraming@fmipa.unmul.ac.id](mailto:indriasriraming@fmipa.unmul.ac.id)

### Abstrak

Banjir merupakan suatu kejadian yang ditandai dengan naiknya muka air melebihi kapasitas volume tampungan air, semisal sungai atau saluran air. Banjir juga dapat diprediksi dengan melihat fenomena alam seperti curah hujan. Penelitian dilakukan dengan mencari data langsung ke lapangan yang terkena dampak banjir di Samarinda. Model matematika diperoleh dalam bentuk persamaan Saint Venant dan diselesaikan dengan cara numerik atau menggunakan metode beda hingga Skema Lax-Friedrichs. Kemudian, setelah menemukan model matematika yang dibutuhkan, akan dilanjutkan dengan memasukkan data hasil observasi. Adapun tujuan dari Penelitian ini adalah untuk menentukan hubungan *later flow* dan kedalaman air pada saluran terbuka serta menentukan cara mengatasi banjir menggunakan model matematika serta sebagai upaya untuk mengurangi dampak yang merugikan akibat banjir.

### Kata Kunci:

*Banjir, Later Flow, dan Persamaan Saint Venant.*

## PENDAHULUAN

Banjir merupakan suatu bencana yang disebabkan oleh naiknya volume tampungan air yang melebihi batas saluran air. Banjir terjadinya akibat intensitas curah hujan yang tinggi. Faktor lain yang menyebabkan bencana banjir yaitu penebangan pohon di hutan secara liar. Bencana banjir juga dapat memberikan kerugian seperti rusaknya barang rumah tangga, alat elektronik, surat-surat berharga dan lain-lain. Bencana banjir besar juga dapat menyebabkan rusaknya gedung, jembatan, putusnya suatu jalan bahkan kematian [1].

Banjir juga merupakan masalah besar yang sering terjadi di wilayah Indonesia, salah satunya yaitu wilayah Samarinda. Samarinda merupakan Ibu kota Kalimantan Timur. Permasalahan banjir yang terjadi di Samarinda disebabkan oleh tingginya tingkat volume air di Sungai Karang Mumus. Apabila terjadi hujan dengan durasi waktu 2-3 jam dengan intensitas yang tinggi dalam waktu 2-3 jam, maka akan terjadi banjir di beberapa wilayah Samarinda. Daerah yang rawan terjadinya banjir seperti Sempaja, Jalan S. Parman, Jalan Pemuda, Jalan Abdul Syahroni, Jalan M. Panjaitan, Mugirejo, dan Lempake [2].

Penyebab lain banjir yang terjadi di Samarinda adalah kurangnya kesadaran masyarakat dalam pembangunan tata ruang yang salah dan membuang sampah tidak beraturan ke daerah Sungai. Penyebab lain terjadinya banjir di Kota Samarinda yaitu



Indriasri Raming<sup>1,\*</sup>, Itsar Mangiri<sup>2</sup>, Anis Mujiyarti<sup>3</sup>, Rara Suciati<sup>4</sup>, Maulidhina Syafitri<sup>5</sup>, Riski Alfira Wulandari S<sup>6</sup>, Mushalifah<sup>7</sup>

penebangan hitan yang tidak terkontrol serta tidak baiknya sistem pengaliran air di daerah pemukiman perkotaan. Banjir di Samarinda juga memberikan kerugian terhadap aktivitas warga dan rusaknya lingkungan [2].

Berdasarkan permasalahan tersebut perlu adanya kajian mendalam terkait banjir di Kota Samarinda. Pendekatan matematis yang dapat digunakan dalam mengatasi permasalahan banjir adalah metode numeric, salah satu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial seperti pada persamaan saint venant adalah metode beda hingga [1].

Persamaan saint venant merupakan salah satu model matematika yang sering digunakan untuk saluran terbuka atau aliran fluida. Persamaan saint venant diturunkan oleh Adhemar Jean Claud Barre de Saint-Venant pada tahun 1884. Persamaan Saint Venant merupakan bentuk persamaan Differensial parsial nonlier yang memiliki persamaan kekontinuan dan momentum yang terdiri disebabkan oleh gaya gravitasi, topografi dasar, dan kekasaran dasar. Persamaan Saint Venant sering juga disebut sebagai persamaan gelombang air dangkal (*shallow water wave equation*) dan dapat dipandang sebagai model hidrostatis dari persamaan Navier-Stokes. Model hidrostatis dari persamaan Navier Stokes diturunkan dengan merata-ratakan kedalaman dengan asumsi bahwa skema vertical lebih kecil dibandingkan skala horizontal, mengabaikan viskositas dan turbulensi yang tidak mempertimbangkan pengaruh angin maupun gaya coriolis.

Pada penelitian ini akan di fokuskan pada penyelesaian persamaan Saint Venant satu dimensi yang diturunkan dari Persamaan Navier Stokes dan Persamaan Reynolds Transport. Pada persamaan ini juga akan memperhatikan variabel khusus (*lateral flow*) sebagai variabel yang sangat mempengaruhi ketidakstabilan kedalaman kanal. Persamaan ini akan diselesaikan dengan metode numerik beda hingga. Hasil dari penelitian ini akan diperhatikan perubahan kedalaman kanal dalam saluran waktu sehingga penelitian dapat menjadi landasan dalam melakukan prediksi luapan kanal. Adapun tujuan yang akan dicapai pada penelitian ini adalah Menentukan hubungan *lateral flow* dan kedalaman air pada saluran terbuka dan menentukan cara mengatasi banjir menggunakan model matematika.

## **LANDASAN TEORI**

### **Persamaan Saint Venant**

Persamaan Saint Venant merupakan persamaan diferensial parsial berorde satu dengan variabel bebasnya yaitu  $x$  dan  $t$  serta variabel tak bebasnya yaitu  $h$  (kedalaman air) dan  $Q$  (debit air), untuk setiap titik di aliran sungai. Persamaan ini pertama kali dikemukakan oleh Barre de Saint Venant pada Tahun 1871 untuk penelusuran dinamis. Persamaan ini menurut [3] digunakan pada aliran tak langgeng satu dimensi. Persamaan ini tersusun oleh dua persamaan dasar yaitu persamaan keseimbangan massa yang mengikuti hukum kekekalan massa dan persamaan keseimbangan momentum yang mengikuti hukum kekekalan momentum yang diperoleh dari Hukum II Newton. Persamaan Saint Venant digunakan sebagai persamaan dasar pada aliran sungai, karena persamaan ini menghitung debit aliran dan kedalaman air sebagai fungsi ruang dan waktu, serta aliran di sungai dianggap sebagai aliran yang arahnya

searah dengan alur sungai, sehingga aliran ini diasumsikan sebagai aliran tak langgeng satu dimensi.

Karena Persamaan Saint Venant dapat digunakan pada aliran tak langgeng [3] dan dapat juga memodelkan saluran terbuka seperti sungai [4], maka asumsi-asumsi yang digunakan dalam Persamaan Saint Venant yaitu:

1. Aliran Satu Dimensi.
2. Panjang Sungai yang dipengaruhi oleh gelombang banjir umumnya lebih besar dari kedalaman air.
3. Percepatan vertikal diabaikan dan distribusi tekanan gelombang adalah tekanan hidrostatik.
4. Densitas atau kerapatan massa air konstan.
5. Dasar dan dinding saluran ditentukan tidak berubah-ubah untuk mempermudah pengamatan.
6. Kemiringan dasar saluran relatif kecil.

### Persamaan Kekekalan Massa

Pada penyelesaian persamaan saint venant, permasalahan aliran pada kanal terbuka dapat ditinjau dari 3 sudut pandang penampang kanal yakni penampang dari sumbu  $x$  dan  $z$ , penampang dari sumbu  $x$  dan  $y$  dan penampang dari sumbu  $y$  dan  $z$ . Pada permasalahan ini, dibatasi pada keadaan ali

$$\frac{DB_{sys}}{D_t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho b dV + \int_{cs} \rho b (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \quad (1)$$

dengan  $\frac{DB_{sys}}{D_t}$  adalah jumlahan besaran sistem yang diamati (pendekatan sistem).

$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho b dV$  adalah jumlah besaran volume kontrol dan  $\int_{cs} \rho b (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$  jumlah besaran yang masuk-keluar dari permukaan atur. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa teorema ini menyatakan bahwa jumlah besaran dalam volume kontrol setiap satuan waktu dikurangi jumlah besaran yang keluar permukaan kontrol setiap satuan waktu adalah jumlah besaran dari sistem yang diamati setiap satuan waktu. Adapun  $\rho$  dan  $V$  adalah massa jenis dan volume dari fluida.  $\vec{V}$  adalah vektor kecepatan.  $\vec{n}$  adalah unit dari vektor normal ke pengaturan permukaan dan  $t$  adalah waktu.

Salah satu aplikasi dari teorema transport Reynolds ini yang paling terkenal adalah persamaan kontinuitas. Persamaan kontinuitas adalah suatu persamaan yang menyatakan bahwa jumlah massa dalam suatu volume kontrol setiap satuan waktu adalah selisih dari jumlah massa yang masuk dengan massa yang keluar dari permukaan kontrol setiap satuan waktu. Sehingga, dalam hal ini, variabel " $B_{sys}$ " digantikan oleh variabel " $M$ " (massa). Kita tahu dalam pelajaran fisika bahwa besar massa dari suatu sistem tidak akan pernah berubah (hukum kekekalan massa). Sehingga,  $\frac{dM}{dt}$  dalam sistem memiliki nilai 0. Dengan demikian pula, variabel " $b$ " berubah menjadi  $m/m = 1$ . Sehingga, persamaan kontinuitas dapat dituliskan secara matematis ke dalam bentuk berikut.

$$\frac{DB_{sys}}{D_t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho b dV + \int_{cs} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \quad (2)$$

Dari gambar terlihat bahwa perubahan massa dalam daerah kontrol sama dengan beda antara massa yang masuk dan massa yang keluar dari permukaan kontrol dari daerah kontrol.

$$\text{Total Massa} = \sum \text{massa yang masuk} - \sum \text{massa yang keluar} \quad (3)$$

Persamaan umum dari kontinuitas bisa diberikan untuk aliran buca sebuah geometri irregular. Seperti pada gambar, yang masuk dalam volume kontrol adalah jumlah aliran  $Q$  masuk dari volume kontrol ke hulu akhir dari aliran dan *lateral flow*  $q$  masuk ke volume kontrol seperti pendistribusian aliran sepanjang sisi aliran. Dalam hal ini, aliran samping mempunyai dimensi dari aliran per satuan panjang.

$$\rho(Q + qdx) - \rho\left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx\right) = \frac{\partial(\rho A dx)}{\partial t} \quad (4)$$

karena  $\rho$  dan  $dx$  bernilai konstan maka didapatkan bentuk persamaan kontinuitas seperti berikut:

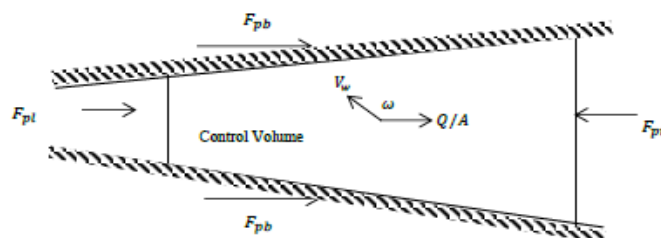
$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} - q = 0 \quad (5)$$

### Persamaan Momentum

Dalam hukum Newton kedua dari suatu sistem, laju perubahan terhadap waktu dari momentum sama dengan jumlah gaya luar yang bekerja dalam sistem. Aplikasikan hukum ini ke dalam teorema transportasi Reynolds.

$$\frac{DB_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho b dV + \int_{cs} \rho V(\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \quad (6)$$

Dalam hal ini, intensive property  $b$  sama dengan kecepatan fluida. Persamaan ini menyatakan jumlah dari gaya yang diaplikasikan dalam sistem sama dengan jumlah perubahan rata-rata volume kontrol terhadap waktu ditambah rata-rata momentum aliran yang melalui permukaan control.



Gambar 2. Bentuk Penampang Saluran dari Sumbe  $x$  dan  $y$  [4]

Keterangan:

$F_{pl}$ : Gaya Tekanan dari Sisi Kiri

$F_{pr}$ : Gaya Tekanan dari Sisi Kanan

$F_{pb}$ : Gaya Tekanan dari Samping Saluran

Pada Gambar 2.2 dapat dilihat terdapat beberapa gaya yang mempengaruhi permasalahan estuaria tersebut yakni gaya tekanan dan aliran samping. Di bawah ini bentuk penampang saluran dari sumbu  $x$  dan  $y$ .

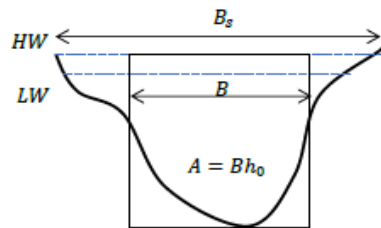
Bentuk penampang berikutnya ditinjau dari sumbu  $y$  dan  $z$  (Gambar 3) dapat dilihat lebih jelas beberapa variabel  $dh_0$  sebagai besar gelombang yang terjadi,  $B$  sebagai lebar saluran dasar dan  $B_s$  sebagai lebar saluran.

Gaya yang bekerja dalam volume kontrol sebagai berikut:

1. Gaya gravitasi ( $F_g$ )
2. Gaya tekanan ( $F_p$ )
3. Gaya gesek ( $F_f$ )
4. Gaya yang digerakkan oleh massa jenis ( $F_\rho$ )

Sehingga jumlah total gaya pada volume kontrol adalah:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_p + \vec{F}_f + \vec{F}_\rho \quad (7)$$



Gambar 3. Bentuk Penampang Saluran dari Sumbu  $y$  dan  $z$

Gaya grafitasiyang bekerja dalam volume control adalah fungsi dari volume fluida, yang mana diberikan seperti:

$$dV = A dx \quad (8)$$

Berat yang sesuai dari fluida bisa diekspresikan seperti:

$$W = \rho dV g = \rho g A dx \quad (9)$$

dengan  $g$  merupakan percepatan grafitasi. Komponen berat dalam pengaturan dari aliran menjadi gaya gravitasi.

$$F_g = \rho g A x \sin \theta \quad (10)$$

Dimana  $\theta$  merupakan sudut kemiringan dasar sungai. Dengan diasumsikan bahwa sudut kemiringan dasar sungai sangat kecil, sinus dari sudut bisa mendekati tangen dari sudut:

$$\sin(\theta) \approx \tan(\theta) \quad (11)$$

Yang bernilai sama dengan kemiringan dari dasar sungai  $S$ . Maka,

$$F_g = -\rho g A dx \frac{\partial z_b}{\partial x} \quad (12)$$

Gaya tekanan adalah hasil dari gaya hidrostatis dari sebelah kiri volume kontrol ( $F_{pl}$ ), gaya hidrostatis dari kanan volume control ( $F_{pr}$ ), dan gaya tekanan dari samping volume control ( $F_{pb}$ ):

$$F_p = F_{pl} - F_{pr} + F_{pb} \quad (13)$$

$$dF_{pl} = \rho dV g$$

$$dF_{pl} = \rho g (h - h_0) B dh_0 \quad (14)$$

Dimana  $B$  merupakan lebar aliran

$$F_{pl} = \int_0^h \rho g (h - h_0) B dh_0 \quad (15)$$

Dengan menggunakan ekspansi deret taylor dari gaya hidrostatis di kiri, dan mengabaikan bentuk orde tinggi, suatu tenaga yang dibutuhkan gaya hidrostatis di kanan dari volume control seperti:

$$F_{pr} = \left( F_{pl} + \frac{\partial F_{pl}}{\partial x} dx \right) \quad (16)$$

Diferensial  $F_{pl}$  dari  $x$  dalam persamaan di tunjukkan dengan hukum Leibniz untuk penurunan

$$\frac{\partial F_{pl}}{\partial x} = \int_0^h \partial \frac{\rho g (h - h_0) B}{\partial x} dh_0 + \rho g (h - h_0) B \frac{\partial h}{\partial x} + \rho g (h - 0) B \frac{\partial 0}{\partial x} \quad (17)$$

dimana bentuk kedua dan ketiga bernilai 0. Maka,

$$\frac{\partial F_{pl}}{\partial x} = \int_0^h \rho g \frac{\partial h}{\partial x} B dh_0 + \int_0^h \rho g (h - h_0) \frac{\partial B}{\partial x} dh_0 \quad (18)$$

Persamaan integral yang pertama dapat disederhanakan menjadi:

$$\int_0^h \rho g \frac{\partial h}{\partial x} B dh_0 = \rho g \frac{\partial h}{\partial x} \int_0^h B dh_0 = \rho g \frac{\partial h}{\partial x} A \quad (19)$$

dengan

$$\int_0^h B dh_0 \quad (20)$$

$$F_{pb} = \left[ \int_0^h \rho g (h - h_0) \frac{\partial B}{\partial x} dh_0 \right] dx \quad (21)$$

$$F_p = F_{pl} - \left( F_{pl} + \frac{\partial F}{\partial x} dx \right) + F_{pb} = - \frac{\partial F_{pl}}{\partial x} dx + F_{pb} \quad (22)$$

Substitusi persamaan (18) dan persamaan (21) ke persamaan (22)

$$F_p = - \left( \rho g \frac{\partial h}{\partial x} A + \int_0^h \rho g (h - h_0) \frac{\partial B}{\partial x} dh_0 \right) dx + \left[ \int_0^h \rho g (h - h_0) \frac{\partial B}{\partial x} dh_0 \right] dx \quad (23)$$

Hasil dari gaya tekanan yang bergerak dalam volume control bisa ditulis seperti:

$$F_p = - \rho g \frac{\partial h}{\partial x} A \quad (24)$$

Gaya gesek diciptakan oleh tegangan geser sepanjang bagian bawah dan sisi volume control dapat didefinisikan dalam hal ini tegangan geser bawah  $\tau_0$  dan dapat diberikan sebagai  $\tau_0 P dx$ , dimana  $P$  adalah keliling yang basah. Tegangan geser dapat didefinisikan sebagai aliran seragam stabil:

$$\tau_0 = \rho g R S_f = \rho \left( \frac{A}{P} \right) S_f \quad (25)$$

Dimana  $R$  adalah radius hidrolis didefinisikan sebagai rasio dari luas aliran  $A$  dan keliling yang basah  $P$  dan  $S_f$  adalah kemiringan gesekan, yang tergantung pada kecepatan aliran, ditetapkan sebagai:

$$V = C_h \sqrt{h S_f} \quad (26)$$

berdasarkan pada rumus Chezy, kedalaman  $h$  digunakan sebagai pengganti jari-jari hidrolis. Asumsi ini dibenarkan jika lebar estuaria lebih besar dari kedalamannya ( $B > h$ ). Berdasarkan definisi dari tegangan geser yang diberikan dalam persamaan di atas, gaya gesekan yang bekerja pada volume control mengambil bentuk akhir yang diberikan di bawah:

$$F_f = - \rho g A S_f dx \quad (27)$$

atau

$$F_f = -\rho g A \frac{V|V|}{C_h^2 h} dx \quad (28)$$

Gaya yang digerakkan oleh massa jenis. Di estuaria, massa jenis mempunyai peranan yang sangat penting. Besarnya massa jenis adalah fungsi dari perubahan massa jenis sepanjang saluran,  $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ , derivasi ini berlaku untuk semua saluran terbuka (sungai, kanal, ataupun estuaria).

Gaya yang digerakkan oleh kerapatan yang mengarah ke hulu dapat didefinisikan mirip dengan  $S_f$  digantikan dengan  $S_\rho$ , yang merupakan perubahan massa jenis terhadap  $x$  [5].

$$S_\rho = \frac{h}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (29)$$

Oleh karena itu, gaya akibat massa jenis menjadi:

$$F_f = \rho g A S_\rho dx \quad (30)$$

Atau

$$F_f = \rho g A \frac{h}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \quad (31)$$

Jadi, jumlahan dari empat 4 gaya tersebut didefinisikan sebagai gaya total dari sebelah kiri persamaan momentum:

$$\sum \vec{F} = -\rho g A \frac{\partial Z_b}{\partial x} dx - \rho g A \frac{\partial h}{\partial x} dx + \rho g A \frac{h}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} dx - \rho g A \frac{V|V|}{C_h^2 h} dx \quad (32)$$

$$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho \vec{V} dV + \int_{cv} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \quad (33)$$

Dua istilah momentum di sisi kanan mewakili laju perubahan momentum dalam volume control dan total momentum aliran keluar diseluruh permukaan kontrol.

Total momentum keluar adalah momentum aliran keluar dikurang momentum aliran masuk ke volume control. Tingkat inflow massa dengan volume control adalah inflow sungai dan didefinisikan sebagai  $\rho Q$ .

Momentum *inflow* ke volume control dihitung dengan mengalikan inflow massa dengan kecepatan masing-masing dan faktor momentum,

$$\iint_{inlet} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \rho (VQ) \quad (34)$$

Momentum aliran keluar dari volume kontrol juga merupakan fungsi dari aliran massa dari volume control yang dapat didefinisikan sebagai ekspansi deret Taylor dari massa aliran masuk. Oleh karena itu, arus perpindahan momentum dari volume control dihitung sebagai

$$\iint_{outlet} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \rho \left( VQ + \frac{\partial VQ}{\partial x} dx \right) \quad (35)$$

dengan demikian, total momentum aliran keluar dipermukaan kontrol

$$\int_{cs} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \rho \left( VQ + \frac{\partial VQ}{\partial x} dx \right) - \rho (VQ) \quad (36)$$

Tingkat perubahan momentum terhadap waktu disimpan dalam volume control ditulis sebagai fungsi dari volume pada panjang unsur saluran  $dx$ . Momentum dikaitkan

dengan volume unsur ini dapat ditulis sebagai  $\rho V A dx$  dan tingkat perubahan momentum terhadap waktu diberikan sebagai:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \vec{V} \rho dV = \rho \frac{\partial Q}{\partial t} dx \quad (37)$$

Ketika semua hal digabungkan dan diganti kembali ke dalam persamaan momentum,

$$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho \vec{V} dV + \int_{cv} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA - \rho g A \frac{\partial z_b}{\partial x} dx - \rho g A \frac{\partial h}{\partial x} dx + \rho g A \frac{h}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} dx - \rho g A \frac{V|V|}{C_h^2 h} dx \quad (38)$$

$$= \rho \frac{\partial \left( \frac{Q^2}{A} \right)}{\partial x} dx + \rho \frac{\partial Q}{\partial t} dx \quad (39)$$

Persamaan ini disederhanakan dengan membagi kedua ruas dengan  $\rho dx$  dan  $Q$  diubah dengan  $AV$ ,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial z_b}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} - g \frac{h}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + g \frac{V|V|}{C_h^2 h} = 0 \quad (40)$$

### Metode Beda Hingga Skema Lax-Friedrichs

Dimisalkan  $x \in [x_{min}, x_{max}]$  dan  $t \in [0, T]$ . Pada metode beda hingga, diskritisasi grid untuk variabel  $x$  dibagi  $N$  interval dengan jarak yang sama sehingga terdapat  $N+1$  titik dengan  $x = i\Delta x, \Delta x = \frac{x_{max}}{N}$ , dan  $i = 0, 1, \dots, N$ . Kemudian untuk variabel  $t$  dibagi menjadi  $M$  interval sehingga terdapat  $M+1$  titik dengan  $t = j\Delta t, \Delta t = \frac{T}{M}$ , dan  $j = 0, 1, \dots, M$ . Nilai  $\Delta t$  juga dapat ditentukan menggunakan formula

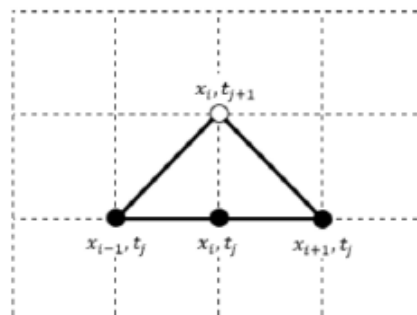
$$\Delta t = \frac{\lambda \Delta x}{\max(c_1, c_2)} \quad (41)$$

Dengan  $\lambda$  merupakan nilai Courant dan

$$c_{1,2} = u_0 \pm \sqrt{gh_0}, \quad h_0 = D + A \quad (42)$$

dengan  $g=9.81$  m/s<sup>2</sup>, serta  $u_0$  merupakan kecepatan awal gelombang pada saat  $t=0$ .

Skema Lax-Friedrichs merupakan bentuk pengembangan dari skema eksplisit sehingga untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial digunakan pendekatan beda maju untuk turunan terhadap variabel waktu  $t$ , dan pendekatan beda pusat untuk turunan terhadap variabel ruang  $x$ . Pembagian partisi digunakan untuk memudahkan perhitungan secara numerik pada skema Lax-Friedrichs dapat dilihat pada Gambar 4.



Gambar 4. Skema Lax-Friedrichs

Dasar dari skema Lax-Friedrichs adalah nilai dari  $(i, j)$  pada skema eksplisit diganti dengan rata-rata dari  $(i + 1, j)$  dan  $(i - 1, j)$  sebagai contoh diperoleh bentuk diskrit dari  $\eta(x, t)$ ,  $u(x, t)$ , dan  $b(x)$  adalah

$$\eta_i^j = \frac{\eta_{i+1}^j + \eta_{i-1}^j}{2}, u_i^j = \frac{u_{i+1}^j + u_{i-1}^j}{2} \quad (43)$$

$$b_i = \frac{b_{i+1} + b_{i-1}}{2} \quad (44)$$

Pada persamaan gelombang aliran sungai 1D terdapat lima turunan yaitu turunan pertama dari  $A$  dan  $V$  terhadap  $t$  serta turunan pertama dari  $Q$ ,  $V$  dan  $h$  terhadap  $x$ . Menggunakan pendekatan beda maju untuk turunan terhadap variabel waktu  $t$  dan pendekatan beda pusat untuk turunan terhadap variabel ruang  $x$ , diperoleh:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{A_i^{j+1} - A_i^j}{\Delta t}, V_t = \frac{V_i^{j+1} - V_i^j}{\Delta t} \quad (45)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{Q_{i+1}^j - Q_{i-1}^j}{2\Delta x}, V_x = \frac{V_{i+1}^j - V_{i-1}^j}{2\Delta x} \quad (46)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2\Delta x} \quad (47)$$

Persamaan (46) dan (47) disubstitusikan ke dalam Sistem Persamaan (5) dan (40) sehingga diperoleh penyelesaian numerik persamaan saint venant 1D menggunakan metode beda hingga skema Lax-Friedrichs sebagai berikut:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{Q_i^{j+1} - Q_i^j}{2\Delta x} - q \quad (48)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -(V_i^{j+1} - V_i^j) \frac{V_i^{j+1} - V_i^j}{2\Delta x} - g \frac{\partial z_b}{\partial x} - g \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2\Delta x} + g \frac{h}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} - g \frac{V|V|}{C_h^2 h} \quad (49)$$

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### Persamaan Saint Venant

Penurunan persamaan Saint Venant 1-D telah dilakukan pada bab sebelumnya. Dari penurunan persamaan tersebut terdapat beberapa variabel utama yang diperhatikan dalam persamaan ini yakni Kecepatan arus, yang apabila dikalikan dengan penampang basah saluran menjadi besaran debit pada cross sectional ( $V$ ), debit aliran kanal ( $Q$ ), Kedalaman aliran yang terdiri dari kedalaman dari dasar saluran ditambah dengan simpangan ( $h$ ), Elevasi dasar kanal atau lereng bawah ( $z_b$ ), densitas air ( $\rho$ ), faktor gesekan Chezy; gradien longitudinal dari densitas air  $\rho$  yang mendorong Massa air ke permukaan  $slope$  ( $C_h$ )

### Persamaan Kontinuitas

Pada persamaan (5), luas permukaan diturunkan terhadap waktu, debit diturunkan terhadap jarak dan variabel *lateral flow* ( $q$ ). Dalam penyelesaian numerik metode beda hingga skema Lax-Friedrichs nilai  $A$  dan  $Q$  ditentukan sebagai syarat awal penyelesaian numerik tersebut. Variabel  $q$  akan diberikan nilai dengan dimensi debit per satuan panjang. Pada percobaan ini akan diambil nilai  $q$  sebesar  $0 \text{ m}^2/\text{detik}$  dan  $40 \text{ m}^2/\text{detik}$ . Selain variabel, terdapat beberapa parameter yang juga mempengaruhi persamaan ini. Berdasarkan data yang diperoleh dari pengamatan di kanal Sempaja di Jl. Abdul Wahab Syahrani Kota Samarinda. Nilai-nilai parameter tersebut diberikan pada Tabel 1 berikut.

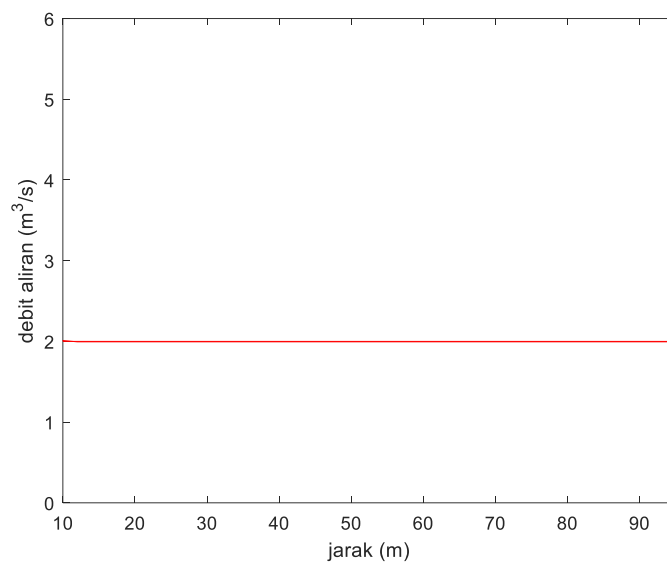


Tabel 1. Nilai-Nilai Parameter untuk Pengujian Sistem

Variabel	Nilai Parameter
Tinggi Kanal	$h_0 = 1 \text{ m}$
Lebar Kanal	$B = 140 \text{ cm}$
Panjang Kanal	$L = 150 \text{ m}$
Luas Penampang Kanal	$A = 13 \text{ m}^2$
Gaya Gravitasi	$g = 9,81 \text{ m}^2/\text{s}$
Debit Air	$Q = 39 \text{ m}^3/\text{s}$

### Hasil Perhitungan dengan Matlab

#### a. Untuk $q = 0 \text{ m}^2/\text{s}$

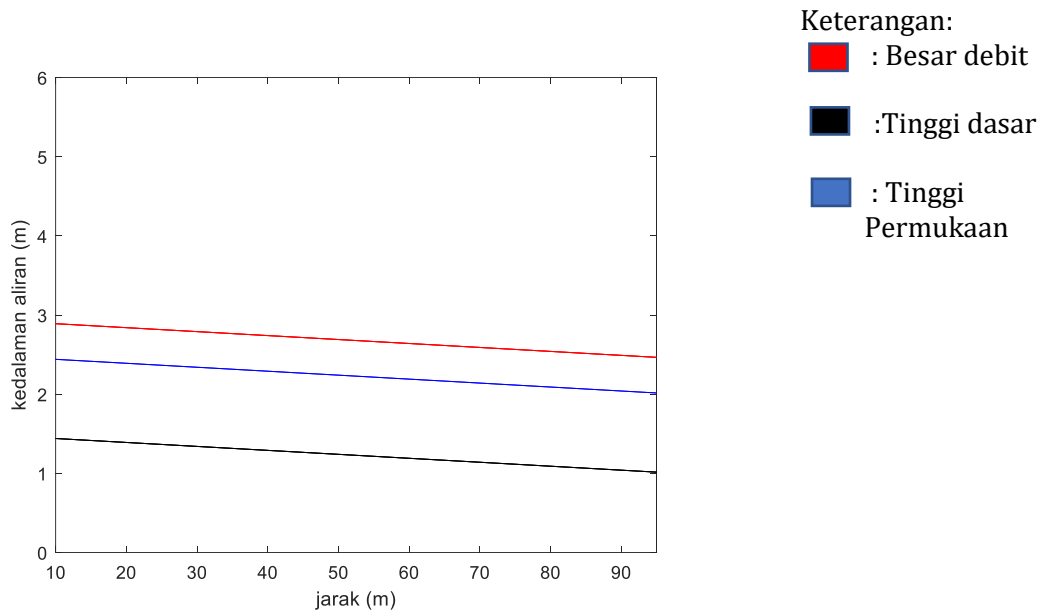


Keterangan:

- Besar debit aliran

Gambar 5. Debit aliran saat diberikan *lateral flow* sebesar  $q = 0$ .

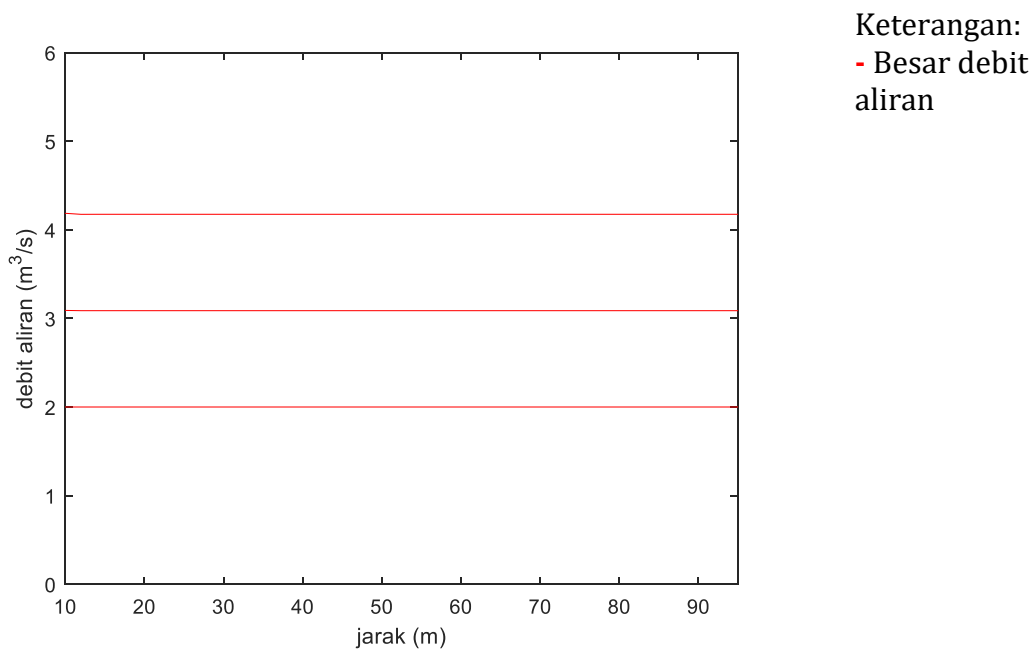
Pada gambar 5 terlihat bahwa debit aliran air tidak mengalami peningkatan seiring dengan jeda waktu  $t = 1 \text{ detik}$ ,  $t = 302 \text{ detik}$  dan  $t = 601 \text{ detik}$ . Pada percobaan  $q = 0 \text{ m}^2/\text{s}$  menunjukkan bahwa *lateral flow* yang besar akan tidak memberikan perubahan yang signifikan pada debit aliran.



Gambar 6. Keadaan aliran saat diberikan lateral flow sebesar  $q = 0$ .

Pada gambar 6 terlihat bahwa kedalaman aliran tidak berubah disepanjang saluran kanal. Hal ini mengakibatkan ketinggian permukaan air tidak akan melebihi ketinggian kanal sehingga saat lateral flow  $q = 0 \text{ m}^2/\text{s}$  tidak akan terjadi luapan untuk setiap waktunya.

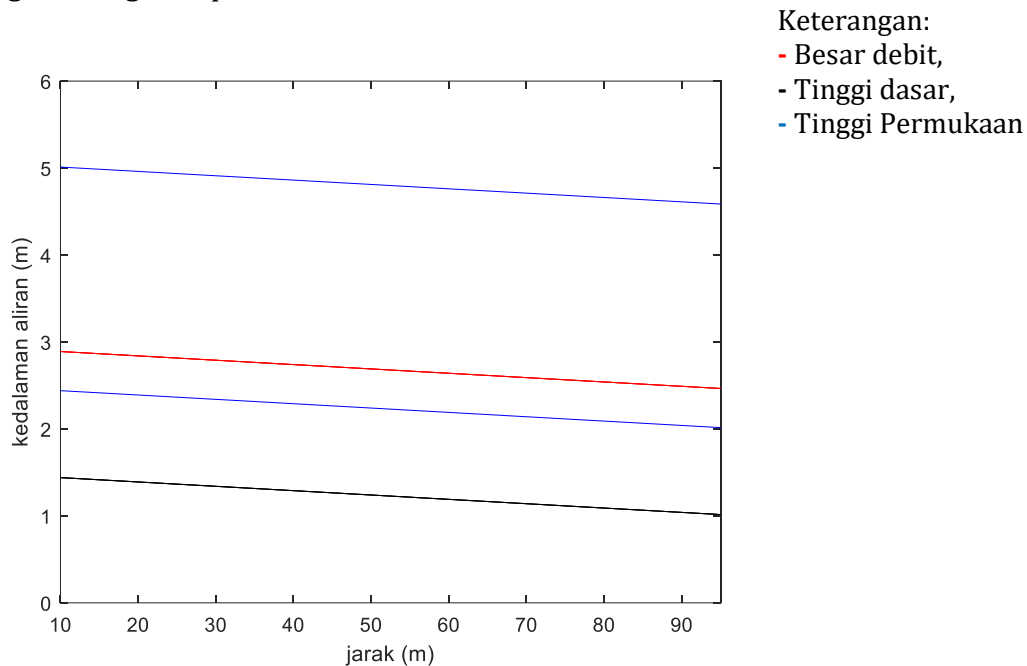
**b. Untuk  $q = 40 \text{ m}^2/\text{s}$**



Gambar 7. Debit aliran saat diberikan lateral flow sebesar  $q = 40$ .

Pada gambar 7 terlihat bahwa debit aliran air akan meningkat secara cepat seiring dengan jeda waktu  $t = 1 \text{ detik}$ ,  $t = 302 \text{ detik}$  dan  $t = 601 \text{ detik}$ . Pada percobaan  $q =$

$40 \text{ m}^2/\text{s}$  menunjukkan bahwa *lateral flow* yang besar akan memberikan bedas debit akan meningkat dengan cepat.



Gambar 8. Keadaan aliran saat diberikan *lateral flow* sebesar  $q = 40$ .

Pada gambar 8 terlihat bahwa perubahan kedalaman air meningkat secara cepat seiring dengan waktu. Hal ini mengakibatkan ketinggian permukaan air akan terus meningkat seiring dengan waktu yang pada akhirnya akan melewati ketinggian kanal. Ketinggian permukaan air melewati ketinggian kanal pada waktu  $t = 232 \text{ detik}$ . Pada waktu itu mulai terjadi luapan. Pada percobaan  $q = 40 \text{ m}^2/\text{detik}$  menunjukkan bahwa *lateral flow* yang diberikan mengakibatkan peningkatan ketinggian permukaan air yang cepat.

## KESIMPULAN

Kesimpulan yang diambil dari penulisan penelitian ini adalah sebagai berikut:

- Lateral flow* merupakan variable yang sangat mempengaruhi suatu aliran sungai. Aliran sungai khususnya di Jalan Abdul Wahab Syahrani memiliki batas ketinggian tertentu, sehingga apabila volume airakan meningkat melebihi batas kanal yang telah ditentukan, hal ini disebut sebagai *lateral flow*.
- Semakin besar *lateral flow* yang diberikan maka semakin cepat pula penambahan volume atau ketinggian aliran tersebut.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Hasan, Yulianto, T., Amalia, R., Faisol. Penerapan metode beda hingga pada model matematika aliran banjir dari persamaan Saint Venant. *Zeta- Math Journal*, 2 (1): 6-12.

- [2] Anwar Y., Setyasih I., Ningrum R.V., Jedo A. (2022). Dampak Bencana Banjir Terhadap Ekonomi Masyarakat di Kecamatan Samarinda Utara, Kota Samarinda. *Jurnal Pendidikan Geografi*, 9(1): 40-48.
- [3] Makrup, L. (2001). *Dasar-Dasar Analisis Aliran di Sungai dan Muara*. Universitas Islam Indonesia Press. Yogyakarta.
- [4] Gunduz, O., (2012). *ENV5056 Numerical Modeling of Flow and Contaminant Transport in Rivers*. Turkey: Department of Enviromental Engineering.
- [5] Savenije, H.H.G. (2012). *Salinity and Tides in Alluvial Estuaries*. Second Completely Revised Edition ed. New York: Elsevier. p.31.

## Penerapan Metode Beda Hingga pada Model Matematika Aliran Banjir dari Persamaan Saint Venant

Indriasri Raming<sup>1,\*</sup>, Awang Romy Rehanda Putra<sup>1</sup>, Wulandari<sup>1</sup>, Yogie Pratama Kaindi<sup>1</sup>, Saderisa<sup>1</sup>, Shanaz Tulzahrah<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Program Studi Matematika, FMIPA Universitas Mulawaman

Dikirim: September 2022; Diterima: September 2022; Dipublikasi: September 2022

Alamat Email Korespondensi: [indriasriraming@fmipa.unmul.ac.id](mailto:indriasriraming@fmipa.unmul.ac.id)

### Abstrak

Banjir merupakan suatu kejadian yang ditandai dengan naiknya muka air melebihi volume tampung air semisal sungai atau saluran air. Adapun banjir itu sering terjadi salah satunya di Indonesia karena Indonesia merupakan Negara tropis dan beberapa daerah pun juga air resapan sudah mulai berkurang. Dalam penelitian ini diselesaikan dari model matematika aliran banjir pada persamaan saint venant menggunakan metode Beda Hingga. Adapun hasil penelitian didapatkan suatu ketidakstabilan banjir yaitu dengan dihasilkannya grafik yang yang terbentuk tidak menuju satu garis artinya tidak menuju satu titik.

**Kata Kunci:** *Banjir, Persamaan Kontinuitas, Metode Beda Hingga*

### PENDAHULUAN

Banjir merupakan suatu kejadian yang ditandai dengan naiknya muka air melebihi volume tampung air semisal sungai atau saluran air. Banjir dapat diprediksi dengan melihat fenomena alam seperti curah hujan yang tinggi. Terjadinya banjir sulit untuk diprediksi apabila datang secara tiba-tiba. Banjir akan mengakibatkan permasalahan dan kerugian seperti kerusakan benda, alat elektronik, mesin, surat-surat berharga dan lain-lain. Adapun dampak negatif dari banjir tersebut dapat menghancurkan rumah, gedung, jembatan, dan dapat memutuskan jalan alat transportasi, sehingga diperlukan suatu prediksi sebagai peringatan dini akan timbulnya banjir [1].

Air luapan merupakan hal yang tidak asing lagi di mata masyarakat selama ini. Definisi dari luapan air itu sendiri adalah aliran permukaan tanah (*surface water*) yang relatif tinggi dan tidak dapat di tampung lagi oleh drainase sehingga air meluap ke samping kiri dan kanan saluran drainase tersebut, sehingga menimbulkan genangan pada sub-sub area atau daerah tertentu yang berada pada daerah dataran rendah dalam jumlah melebihi normal dan menyebabkan kerugian pada manusia [2].

Banjir sering terjadi hampir di seluruh propinsi di Indonesia termasuk Kalimantan Timur, khususnya Kota Samarinda. Permasalahan banjir yang terjadi setiap tahun di Kota Samarinda disebabkan jumlah aliran air yang masuk sangat besar sehingga terjadi akumulasi aliran air. Penyebab lain banjir di kota Samarinda adalah pembuangan sampah dari orang-orang yang tidak beraturan ke sungai, serta kurang

baiknya sistem pengaliran air terutama di daerah permukiman perkotaan. Beberapa permasalahan tersebut yang akhirnya dapat memicu terjadinya banjir di Samarinda.

Masalah yang umum lain yang terjadi saat ini adalah bobolnya penampungan air yang disebabkan oleh aliran air dalam skala besar. Oleh karena itu, dibutuhkan suatu model matematika untuk menggambarkan aliran air tersebut agar ketinggian dan kecepatan aliran air dapat diprediksi dan dikontrol, sehingga bencana banjir dan sebagainya bisa diantisipasi sebelumnya dengan baik. Dalam penelitian ini model yang digunakan untuk aliran air adalah model Saint Venant. Sedangkan untuk penyelesaiannya, digunakan metode beda hingga. Metode ini dipilih sebagai penyelesaian numerik, dikarenakan metode tersebut cukup mudah dan sudah banyak diaplikasikan untuk persamaan differensial biasa maupun persamaan differensial parsial. Metode beda hingga lebih mudah dari segi pemrograman dengan komputer dan konsepnya pun tidak sulit untuk dipahami.

## **LANDASAN TEORI**

### **Pengertian Bencana Banjir**

Banjir didefinisikan sebagai tergenangnya suatu tempat akibat meluapnya air yang melebihi kapasitas pembuangan air disuatu wilayah dan menimbulkan kerugian fisik, sosial dan ekonomi [3]. Banjir adalah ancaman musiman yang terjadi apabila meluapnya tubuh air dari saluran yang ada dan menggenangi wilayah sekitarnya. Banjir adalah ancaman alam yang paling sering terjadi dan paling banyak merugikan, baik dari segi kemanusiaan maupun ekonomi.

Banjir merupakan peristiwa dimana daratan yang biasanya kering (bukan daerah rawa) menjadi tergenang oleh air, hal ini disebabkan oleh curah hujan yang tinggi dan kondisi topografi wilayah berupa dataran rendah hingga cekung. Selain itu terjadinya banjir juga dapat disebabkan oleh limpasan air permukaan (runoff) yang meluap dan volumenya melebihi kapasitas pengaliran sistem drainase atau sistem aliran sungai. Terjadinya bencana banjir juga disebabkan oleh rendahnya kemampuan infiltrasi tanah, sehingga menyebabkan tanah tidak mampu lagi menyerap air. Banjir dapat terjadi akibat naiknya permukaan air lantaran curah hujan yang di atas normal, perubahan suhu, tanggul/bendungan yang bobol, pencairan salju yang cepat, terhambatnya aliran air di tempat lain.

### **Persamaan Saint Venant**

Persamaan Saint Venant sering juga disebut sebagai persamaan gelombang air dangkal (*shallow water wave equation*) dan dapat dipandang sebagai model hidrostatis dari persamaan Navier-Stokes yang diturunkan dengan merataratakan kedalaman dan dengan asumsi bahwa skala vertikal lebih kecil dibanding skala horizontal, mengabaikan viskositas dan turbulensi dengan tidak mempertimbangkan pengaruh angin maupun gaya Coriolis [4].

Persamaan Saint Venant merupakan persamaan differensial parsial berorde satu dengan variabel bebasnya yaitu  $x$  dan  $t$  serta variabel tak bebasnya yaitu  $h$  (kedalaman air) dan  $Q$  (debit air) untuk setiap titik di aliran sungai. Persamaan ini tersusun oleh dua persamaan dasar yaitu persamaan keseimbangan massa yang mengikuti hukum kekekalan massa dan persamaan keseimbangan momentum yang mengikuti hukum kekekalan momentum yang diperoleh dari Hukum II Newton

### **Parameter-parameter pada Persamaan Saint Venant**

Parameter-parameter yang digunakan pada Persamaan Saint Venant dapat dilihat pada Tabel 1 berikut.

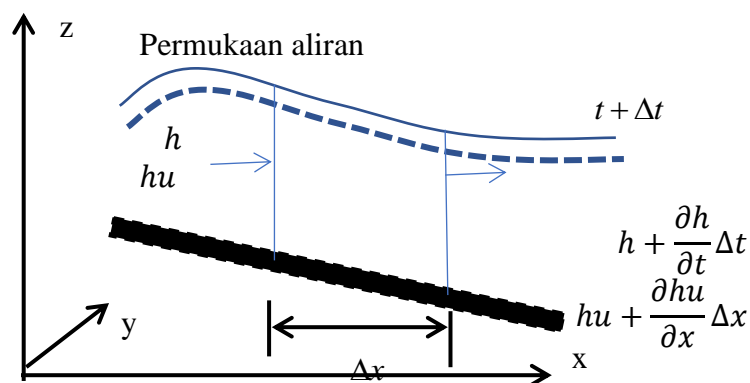
Tabel 1 Parameter-parameter pada Persamaan Saint Venant

No	Parameter	Arti	Satuan
1	$\rho$	Rapat massa air	$kg / m^3$
2	$Q$	Debit aliran	$m^3 / s$
3	$z$	Ketinggian permukaan aliran	$m$
4	$h$	Kedalaman air pada suatu titik dan suatu waktu sepanjang B	$m$
5	$\bar{h}$	Kedalaman rata-rata arah lebar sungai	$m$
6	$O$	Keliling Basah	$m$
7	$\beta$	Koefisien koreksi	-
8	$R$	Jari-jari hidrolis	$m$
9	$\bar{u}$	Kecepatan rata-rata aliran dalam suatu penampang melintang sungai	$m / s$
10	$u$	Kecepatan rata-rata aliran kedalaman	$m / s$
11	$C$	Koefisien chezy	$m^{0.5} / s$
12	$F$	Gaya-gaya yang bekerja pada aliran	N
13	$A$	Luas tampang basah	$m^3$
14	$B$	Lebar permukaan air	$m$
15	$t$	waktu	s
16	$g$	gravitasi	$m / s^2$

Persamaan Saint Venant yang terdiri dari dua persamaan dasar yaitu persamaan keseimbangan massa dan persamaan keseimbangan momentum, penurunannya dapat dilakukan secara geometris. Berikut langkah-langkah penurunan Persamaan Saint Venant.

### Persamaan Keseimbangan Massa

Penurunan persamaan keseimbangan massa mengikuti hukum kekekalan massa yaitu laju perubahan massa fluida persatuan waktu sama dengan laju bersih dari massa fluida tersebut. Penjelasan tersebut dapat dilihat pada Gambar 1 berikut:



Gambar 1. Keseimbangan Aliran Massa Fluida

Gambar 1 merupakan gambar yang menjelaskan dua hal yaitu perubahan massa fluida yang masuk ke dalam daerah sepanjang  $\Delta x$  dengan lebar  $\Delta y$  pada waktu  $\Delta t$  mengakibatkan perubahan ketinggian permukaan fluida dan perubahan massa fluida yang masuk pada waktu  $\Delta t$  sama dengan nilai rata-rata aliran massa yang masuk dan keluar pada daerah sepanjang  $\Delta x$  dengan lebar  $\Delta y$ . Perubahan massa fluida yang masuk dikurangi dengan massa fluida yang keluar sama dengan perubahan ketinggian permukaan fluida dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\rho x \Delta x \Delta y - \rho \left( h + \frac{\partial h}{\partial t} \Delta t \right) \Delta x \Delta y = -\rho \frac{\partial h}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta t \quad (1)$$

Jika  $\rho$  dianggap konstan pada persamaan (1), maka diperoleh:

$$hx \Delta x \Delta y - \frac{\partial h}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta t - hx \Delta x \Delta y = -\frac{\partial h}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta t \quad (2)$$

Perubahan massa fluida yang masuk dalam waktu  $\Delta t$  sama dengan nilai rata-rata aliran massa yang masuk dan keluar pada daerah sepanjang  $\Delta x$  dengan lebar  $\Delta y$  atau perubahan ini merupakan laju bersih dari aliran fluida dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\rho \left( hu + \frac{\partial hu}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta t - \rho h \Delta y \Delta t = \rho \frac{\partial hu}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta t \quad (3)$$

Karena  $\rho$  dianggap konstan, maka persamaan (3) dapat berbentuk sebagai berikut:

$$hu \Delta y \Delta t + \frac{\partial hu}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta t - \rho hu \Delta y \Delta t = \frac{\partial hu}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta t \quad (4)$$

Jika mengikuti hukum kekekalan massa, maka persamaan (2) dan persamaan (4) dapat dibentuk sebagai berikut:

$$-\frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta t = \frac{\partial hu}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta t \quad (5)$$

Jika ruas kanan pada persamaan (5) dipindahkan ke ruas kiri dan dibuat sama dengan nol, maka diperoleh:

$$-\left( \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta t + \frac{\partial hu}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta t \right) = 0 \quad (6)$$

jika persamaan (6) dikalikan dengan (-1), maka diperoleh:

$$\frac{\partial h}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta t + \frac{\partial hu}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta t = 0 \quad (7)$$

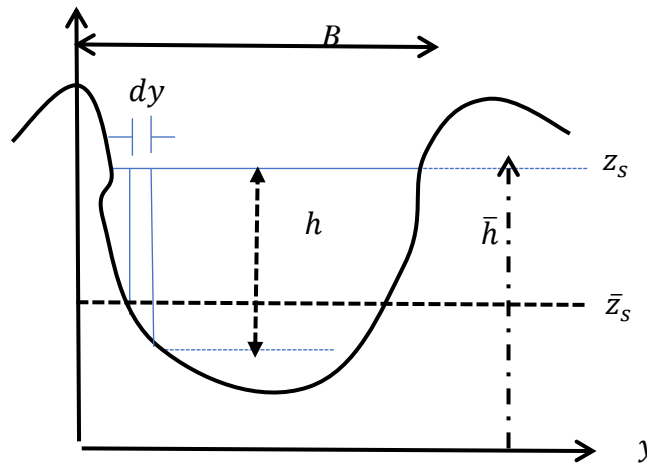
Persamaan (7) menyatakan perubahan massa fluida dalam keadaan seimbang. Jika persamaan (7) dibagi dengan  $\Delta x \Delta y \Delta t$ , maka diperoleh

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

Persamaan (8) merupakan persamaan yang diturunkan dengan melihat perubahan massa fluida secara horizontal tanpa melihat bentuk penampang melintang dari aliran sungai. Sehingga selanjutnya akan dibahas persamaan (8)



dengan melihat bentuk penampang melintang aliran sungai. Perhatikan Gambar 2 berikut.



Gambar 2. Penampang Melintang Sungai

Misalkan penampang melintang aliran sungai berbentuk seperti pada Gambar 2. Gambar tersebut diperoleh dengan melihat aliran dalam arah  $y$  atau dalam arah lebar. Sehingga luas tampang basah aliran (lihat daerah selebar  $dy$ ) dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan integral berikut:

$$A = \int_0^B h dy$$

Misalkan kedalaman rata-rata air terhadap lebar permukaan aliran ( $B$ ) adalah

$$\bar{h} = \frac{A}{B} = \frac{1}{B} \int_0^B h dy$$

Dengan

$\bar{h}$  : Kedalaman rata-rata arah lebar sungai ( $m$ )

$A$  : Luas tampang basah ( $m^2$ )

$B$  : Lebar permukaan air ( $m$ ).

$h$  : Kedalaman air pada suatu titik dan suatu waktu sepanjang  $B$  ( $m$ ).

Jika  $h$  pada persamaan (8) disubstitusi dengan  $\bar{h}$  dan diintegrasikan terhadap  $dy$ , maka diperoleh

$$\int_0^B \left( \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{h} u}{\partial x} \right) dy = 0 \quad (9)$$

Jika dianggap permukaan air sama dengan permukaan aliran atau  $z_s = z$ , maka persamaan (9) dapat ditulis sebagai berikut.

$$B \frac{\partial z_s}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

Dengan

$B$  : lebar permukaan aliran ( $m$ )

$z$  : ketinggian permukaan aliran ( $m$ )

$Q$  : debit aliran ( $m^3/detik$ )

Persamaan (10) disebut persamaan keseimbangan massa.

### Metode Beda Hingga

Metode beda hingga adalah metode numerik yang umum digunakan untuk menyelesaikan persoalan teknis dan masalah matematis dari suatu gejala fisis. Secara umum metode beda hingga adalah metode yang mudah digunakan dalam penyelesaian problem fisis yang mempunyai bentuk geometri yang teratur, seperti interval dalam satu dimensi, domain kotak dalam dua dimensi, dan kubik dalam ruang tiga dimensi ([5], [6]).

Prinsipnya adalah mengganti turunan yang ada pada persamaan diferensial dengan diskritisasi beda hingga berdasarkan deret Taylor. Secara fisis, deret Taylor dapat diartikan sebagai besaran tinjauan pada suatu ruang dan waktu (ruang dan waktu tinjauan) dapat dihitung dari besaran itu sendiri pada ruang dan waktu tertentu yang mempunyai perbedaan yang kecil dengan ruang dan waktu tinjauan [7].

Andai  $f$  dan semua turunannya  $f', f'', f''', \dots$ , di dalam selang  $[a, b]$ . Misalkan  $x_0 \in [a, b]$ , maka nilai  $x$  di sekitar  $x_0$  dan  $x \in [a, b]$ ,  $f(x)$  dapat diekspansi ke dalam deret Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^m}{m!} f^m(x_0) + \dots \quad (11)$$

Jika  $x - x_0 = h$ , maka  $f(x)$  dapat dilihat pada persamaan sebagai berikut:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^m}{m!} f^m(x_0) + \dots \quad (12)$$

Dengan menggunakan tiga ruas suku pertama dari ruas kanan deret Taylor pada persamaan (paling atas), diperoleh skema maju:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} \quad (13)$$

Dengan cara yang sama untuk memperoleh skema maju, diperoleh skema mundur:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} \quad (14)$$

Jika deret Taylor persamaan (skema maju) dikurangi dengan deret Taylor dari persamaan (skema mundur), akan didapat skema tengah:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_{i-1})}{2\Delta x} \quad (15)$$

Seperti yang ditunjukkan skema tengah dengan menggunakan kisi beda hingga, maka skema tengah:

a. Beda hingga terhadap ruang

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (16)$$

Atau untuk  $t^{n+1}$  menjadi

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_{i+1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \quad (17)$$

b. Beda hingga terhadap waktu

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{i-1} = \frac{f_{i-1}^{n+1} - f_{i-1}^n}{\Delta t},$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t}, \text{ atau} \quad (18)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{i+1} = \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^n}{\Delta t}$$

dengan  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ .

Metode *Leapfrog* atau Loncat-Katak merupakan salah satu metode beda hingga yang menggunakan metode beda hingga tengah. Seperti yang ditunjukkan skema di atas dengan menggunakan kisi beda hingga, maka skema *leapfrog* dapat ditulis sebagai berikut:

a. Beda hingga terhadap ruang

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

b. Beda hingga terhadap waktu

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t}$$

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Persamaan air dangkal (shallow water equation) yang digunakan dalam penelitian ini diekspresikan dalam bentuk persamaan Saint Venant sebagai berikut.

$$B \frac{\partial h}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} - q = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_0 - S_f) - \frac{q}{A} u \quad (20)$$

dengan syarat batas :  $\frac{\partial h}{\partial x_{x=0}} = 0$ ;  $u(0, t) = u(t)$ ;  $\frac{\partial u}{\partial x_{x=L}} = 0$ ;  $h(L, t) = h(t)$ ;

dengan  $x$  adalah koordinat posisi ( $m$ ),  $u$  adalah kecepatan ( $m/sec$ ),  $B$  adalah lebar sungai ( $m$ ),  $h$  adalah kedalaman air sungai ( $m$ ),  $A$  adalah luas penampang sungai  $A = hB$  ( $m^2$ ),  $S_0$  adalah kemiringan dasar,  $S_f$  adalah koefisien friction,  $g$  adalah percepatan gravitasi ( $m/sec^2$ ),  $q$  adalah debit air ( $m^3/sec$ ),  $u(x, t)$  adalah kecepatan fungsi waktu, dan  $h(x, t)$  adalah ketinggian fungsi waktu.

Dengan substitusi metode beda hingga berikut,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} && \text{Beda Maju } h \text{ terhadap } t \\ \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{h_i^{n+1} - h_{i-1}^n}{2\Delta x} && \text{Beda pusat } h \text{ terhadap } x \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} && \text{Beda Maju } u \text{ terhadap } t \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^n}{2\Delta x} && \text{Beda pusat } u \text{ terhadap } x \end{aligned}$$

Maka Persamaan (19) dan (20), dapat dituliskan menjadi:

$$B \left( \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} \right) + A \left( \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) - q = 0$$

$$\left(\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}\right) + u_i^n \left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}\right) + g \left(\frac{h_{i+1}^n - h_{i-1}^n}{2\Delta x}\right) = g(S_0 - S_f) - \frac{q}{A} u_i^n$$

atau dapat dituliskan menjadi

$$h_i^{n+1} = h_i^n + B \left(\frac{q}{\Delta t}\right) + A \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^n}{2\Delta x}\right) - q$$

$$u_i^{n+1} = \left(1 - \frac{q}{A} \Delta t\right) u_i^n + g \Delta t (S_0 - S_f) - \frac{u_i^n \Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) - \frac{g \Delta t}{2\Delta x} (h_{i+1}^n - h_{i-1}^n) \quad (21)$$

karena  $A = h \cdot B$ , maka Persamaan (21) menjadi

$$h_i^{n+1} = h_i^n \Delta t + B h_i^n \Delta t \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^n}{2\Delta x}\right) + q(B - \Delta t)$$

$$u_i^{n+1} = \left(1 - \frac{q \Delta t}{h_i^n B}\right) u_i^n + g \Delta t (S_0 - S_f) - \frac{u_i^n \Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) - \frac{g \Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \quad (22)$$

dengan syarat batas :

$$u(0, t) = u(t)$$

$$h(L, t) = h(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_{x=L}} = 0$$

$$\frac{u_L^n - u_{L-2}^n}{2\Delta x} = 0$$

$$u_L^n - u_{L-2}^n = 0$$

Dengan mengambil banyak partisi adalah 20, maka nilai  $i = 1, 2, 3, \dots, 19$ , disubstitusikan pada Persamaan (22), maka diperoleh

$$h_i^{n+1} = h_i^n \Delta t + B h_i^n \Delta t \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^n}{2\Delta x}\right) + q(B - \Delta t)$$

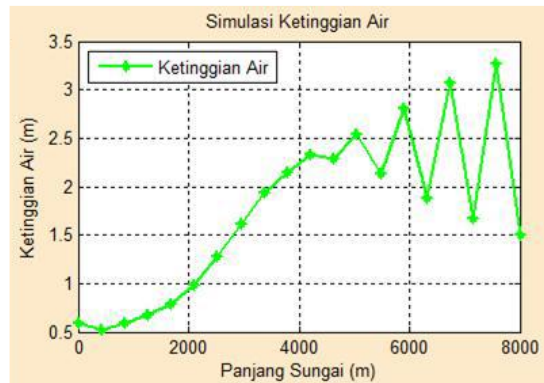
$$u_i^{n+1} = \left(1 - \frac{q \Delta t}{h_i^n B}\right) u_i^n + g \Delta t (S_0 - S_f) - \frac{u_i^n \Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) - \frac{g \Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \quad (22)$$

$$\begin{cases}
 h_1^{n+1} = h_1^n \Delta t + B h_1^n \Delta t \left( \frac{u_2^{n+1} - u_0^n}{2\Delta x} \right) + q(B - \Delta t) \\
 u_1^{n+1} = \left( 1 - \frac{q\Delta t}{h_1^n B} \right) u_1^n + g\Delta t(S_0 - S_f) - \frac{u_1^n \Delta t}{2\Delta x} (u_2^n - u_0^n) - \frac{g\Delta t}{2\Delta x} (u_2^n - u_0^n) \\
 \\
 h_2^{n+1} = h_2^n \Delta t + B h_2^n \Delta t \left( \frac{u_3^{n+1} - u_1^n}{2\Delta x} \right) + q(B - \Delta t) \\
 u_2^{n+1} = \left( 1 - \frac{q\Delta t}{h_2^n B} \right) u_2^n + g\Delta t(S_0 - S_f) - \frac{u_2^n \Delta t}{2\Delta x} (u_3^n - u_1^n) - \frac{g\Delta t}{2\Delta x} (u_3^n - u_1^n) \\
 \\
 \vdots \\
 \\
 h_{19}^{n+1} = h_{19}^n \Delta t + B h_{19}^n \Delta t \left( \frac{u_{20}^{n+1} - u_{18}^n}{2\Delta x} \right) + q(B - \Delta t) \\
 u_{19}^{n+1} = \left( 1 - \frac{q\Delta t}{h_{19}^n B} \right) u_{19}^n + g\Delta t(S_0 - S_f) - \frac{u_{19}^n \Delta t}{2\Delta x} (u_{20}^n - u_{18}^n) - \frac{g\Delta t}{2\Delta x} (u_{20}^n - u_{19}^n)
 \end{cases} \tag{23}$$

Dari Persamaan (23) jika dibuat matriks menjadi

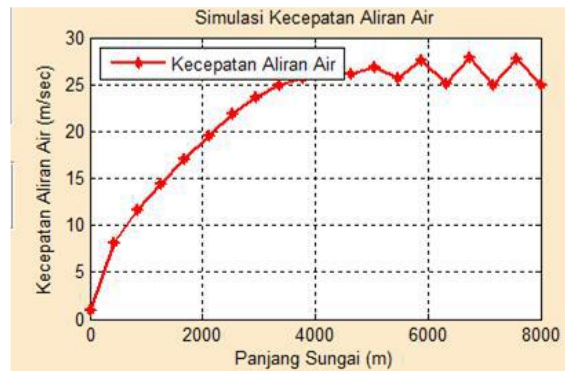
$$\begin{pmatrix} h_1 \\ u_1 \\ h_2 \\ u_2 \\ \vdots \\ h_{19} \\ u_{19} \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} h_1^{n+1} = h_1^n \Delta t + B h_1^n \Delta t \left( \frac{u_2^{n+1} - u_0^n}{2\Delta x} \right) + q(B - \Delta t) \\ u_1^{n+1} = \left( 1 - \frac{q\Delta t}{h_1^n B} \right) u_1^n + g\Delta t(S_0 - S_f) - \frac{u_1^n \Delta t}{2\Delta x} (u_2^n - u_0^n) - \frac{g\Delta t}{2\Delta x} (u_2^n - u_0^n) \\ h_2^{n+1} = h_2^n \Delta t + B h_2^n \Delta t \left( \frac{u_3^{n+1} - u_1^n}{2\Delta x} \right) + q(B - \Delta t) \\ u_2^{n+1} = \left( 1 - \frac{q\Delta t}{h_2^n B} \right) u_2^n + g\Delta t(S_0 - S_f) - \frac{u_2^n \Delta t}{2\Delta x} (u_3^n - u_1^n) - \frac{g\Delta t}{2\Delta x} (u_3^n - u_1^n) \\ \vdots \\ h_{19}^{n+1} = h_{19}^n \Delta t + B h_{19}^n \Delta t \left( \frac{u_{20}^{n+1} - u_{18}^n}{2\Delta x} \right) + q(B - \Delta t) \\ u_{19}^{n+1} = \left( 1 - \frac{q\Delta t}{h_{19}^n B} \right) u_{19}^n + g\Delta t(S_0 - S_f) - \frac{u_{19}^n \Delta t}{2\Delta x} (u_{20}^n - u_{18}^n) - \frac{g\Delta t}{2\Delta x} (u_{20}^n - u_{19}^n) \end{pmatrix}$$

Dalam makalah ini parameter yang digunakan untuk simulasi adalah sebagai berikut : banyak partisi (nx = 20), lama waktu simulasi (nt = 120), lebar sungai (B = 50), percepatan gravitasi (g = 9.8), kemiringan dasar (S<sub>0</sub> = 0.024), koefisien friction (S<sub>f</sub>) = 0.006, panjang sungai (L = 8000) dan debit air (q = 0.25).



**Gambar 3.** Ketinggian air dengan  $t = 1.5$

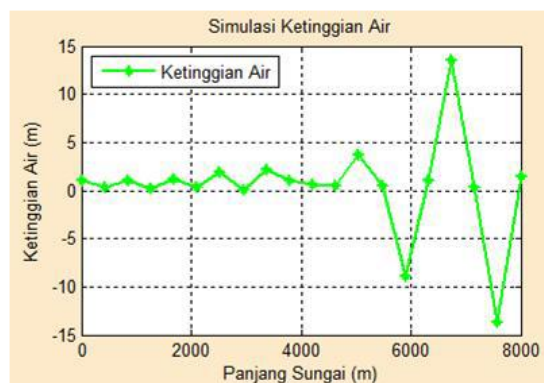
Berdasarkan Gambar (3) di atas, didapatkan ketinggian maksimum  $\pm 3,5$  meter. Ketinggian air selalu naik dari posisi hulu ke hilir.



**Gambar 4.** Kecepatan aliran air dengan  $t = 1.5$

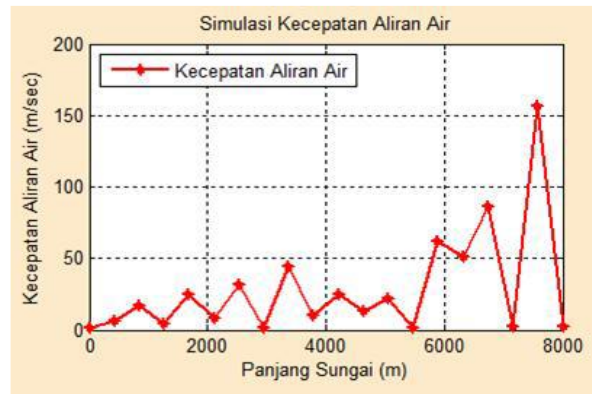
Berdasarkan Gambar (4) di atas, didapatkan kecepatan aliran air maksimum  $\pm 30$  meter/s. Kecepatan aliran air selalu naik dari posisi hulu ke hilir dan juga saat ketinggian air naik, maka kecepatan aliran air juga naik.

Dalam simulasi yang kedua ini dilakukan perubahan terhadap  $t$  yakni digunakan  $t = 3.5$ .



**Gambar 5.** Ketinggian air dengan  $t = 3.5$

Berdasarkan Gambar (5) dan dengan parameter yang sama seperti pada simulasi sebelumnya, didapatkan ketinggian maksimum  $\pm 15$  meter, namun ketinggian air mengalami penurunan menjadi sekitar  $-15$  meter, yang menunjukkan bahwa pemilihan parameter juga berpengaruh terhadap hasil simulasi.



Gambar 6. Kecepatan aliran air dengan  $t = 3.5$

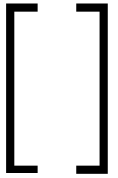
Berdasarkan Gambar (6) dan dengan parameter yang sama seperti pada simulasi sebelumnya, didapatkan kecepatan maksimum  $\pm 200$  meter/s, yang menunjukkan bahwa kecepatan aliran sangat besar. Jika digunakan  $\Delta t$  yang lebih besar lagi maka hasil yang diperoleh menjadi tidak akurat baik ketinggian maupun kecepatan, karena hasilnya sangat besar dan nilainya di Matlab menjadi "NaN".

## KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan Penerapan Metode Beda Hingga Pada Model Matematika Banjir Dari Persamaan Saint Venant memberikan hasil bahwa Pada saat ketinggian air naik, kecepatan aliran air juga naik. Saat ketinggian air turun, kecepatan aliran air juga turun. Selanjutnya, penentuan nilai parameter dapat mempengaruhi hasil simulasi, sebagaimana dengan perubahan nilai  $\Delta t$  pada pembahasan sebelumnya.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Wardanu. (2016). Penelusuran banjir dengan metode numerik daerah aliran sungai ngunggan wonogiri. Jurnal matriks teknik sipil, 577
- [2] Martin J. & McCutcheon C. (1999). Hydrodynamics and Transport for Water Quality Modelling. Washington D.C. : Lewis Publishers.
- [3] Rahayu, dkk. (2009). Banjir dan Upaya Penanggulangannya. Bandung: Pusat Mitigasi Bencana (PMB-ITB).
- [4] Hidayat, Noor, dkk. (2012). Skema Central Upwind Semidiskrit untuk Persamaan Hiperbolik Dimensi-satu, Universitas Airlangga.
- [5] Liu, K.F., & M.C. Huang. (2009). Numerical Simulation of Debris Flows. Proceedings of the ASME 2009 28th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering: 1-8.
- [6] Sangadji. (2008). Metode Beda Hingga Untuk Solusi Numerik Persamaan Diferensial. Jurnal Mat Stat, 8( 2): 132-137
- [7] D.D Causon, C.G Mingham. (2010). introductory Finite Difference Methods for PDEs, Ventus Publishing Aps, ISBN 978-87-7681-642-1.



PS S1 MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA & ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS MULAWARMAN