

Analisis Model Matematika *Predator-Prey* Perikanan Pada Ekosistem Perairan Tercemar

Stefanny Pratiwi^{1*}, Yuki Novia Nasution¹, Moh Nurul Huda¹

¹ *Laboratorium Matematika Komputasi Program Studi Matematika Jurusan matematika FMIPA Unniversitas Mulawarman*

Dikirim: Juni 2022; Diterima: Juli 2022; Dipublikasi: September 2022

Alamat Email Korespondensi: stefannypratiwi3@gmail.com

Abstrak

Pada penelitian ini dibahas analisis dinamik model *predator-prey* perikanan pada lingkungan perairan tercemar. Analisis dinamik yang dilakukan meliputi yaitu penentuan titik kesetimbangan, syarat eksistensi titik kesetimbangan, dan analisis kestabilan pada titik kesetimbangan. Hasil analisis menunjukkan bahwa model *predator-prey* memiliki empat titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan P_1 atau trivial, titik kesetimbangan P_2 ketika populasi *predator* punah, titik kesetimbangan P_3 ketika populasi *prey* punah, dan titik kesetimbangan interior atau P_4 . Titik kesetimbangan P_1 selalu eksis, sedangkan titik kesetimbangan P_2 , P_3 , dan P_4 eksis dengan beberapa syarat eksistensi, yaitu P_2 eksis dengan syarat $\sigma > \epsilon$, P_3 eksis dengan syarat $1/4\delta + 1 > \beta$, dan P_4 eksis dengan syarat $b^2 > 4ac$. Pada titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan P_1 , P_2 , P_3 , dan P_4 bersifat stabil asimtotik lokal dengan beberapa syarat kestabilan. Hasil simulasi numerik yang dilakukan mendukung hasil analisis dinamik yang diperoleh.

Kata Kunci:

analisis kestabilan, model predator-prey perikanan, perairan tercemar, titik kesetimbangan.

PENDAHULUAN

Ekosistem merupakan sistem ekologi yang terbentuk berdasarkan pada hubungan timbal balik antara makhluk hidup dan lingkungannya [1]. Salah satu jenis ekosistem dalam kehidupan di dunia yaitu ekosistem perairan. Contoh permasalahan pada ekosistem perairan adalah ekosistem perairan tercemar. Masalah global yang sering terjadi seperti penangkapan ikan secara ilegal dan pengolahan sistem perikanan yang kurang baik menjadikan permasalahan pada ekosistem perairan tercemar menjadi lebih buruk. Selain itu, racun antropogenik seperti limbah hasil dari kegiatan perindustrian dan pertambangan juga merupakan faktor lain yang menyebabkan terjadinya pencemaran pada ekosistem perairan. Kondisi ekosistem perairan yang kurang baik mengakibatkan keberlangsungan makhluk hidup seperti ikan-ikan yang tinggal pada perairan tercemar menjadi terganggu. Ekosistem perairan yang tercemar memberikan dampak kerusakan pada rantai makanan yang diakibatkan oleh kondisi lingkungan yang sudah tidak mendukung.

Salah satu pendekatan yang dapat digunakan untuk menggambarkan sistem perikanan pada perairan yang tercemar adalah model matematika. Model matematika yang digunakan yaitu model *Predator-Prey*. Model *predator-prey* menjelaskan interaksi

antara dua populasi yaitu *predator* (pemangsa) dan *prey* (mangsa). Model *predator-prey* ini juga dikenal dengan model Lotka-Volterra karena model ini pertama kali dikenalkan oleh Lotka pada tahun 1925 dan Volterra pada tahun 1926 [2].

Terdapat beberapa jurnal penelitian mengenai perikanan yang mengkaji tentang efek pencemaran lingkungan pada ekosistem perairan. Penelitian [3] mengkaji tentang sebuah model dampak kontaminasi pada dinamika populasi ikan. Penelitian [4] mengkaji tentang dampak racun lingkungan pada dinamika *predator-prey*. Penelitian [5] mengkaji dampak pemanenan pada bioekonomi *predator-prey* sebagai subjek perikanan pada racun lingkungan dimana populasi *prey* secara langsung terinfeksi oleh racun lingkungan dan secara tidak langsung menyebabkan *predator* ikut terinfeksi racun melalui proses pemberian pakan.

Pada skripsi ini dibahas analisis dinamik model *predator-prey* perikanan pada lingkungan perairan tercemar. Model matematika yang terbentuk dari dua spesies yaitu pemangsa dan mangsa perairan yang tercemar akibat racun hasil kegiatan pertambangan dan perindustrian. Model matematika yang digunakan pada skripsi ini merupakan kajian ulang model [5]. Dari model [5] dilakukan analisis dinamik yaitu dengan menentukan titik kesetimbangan dan analisis kestabilannya.

LANDASAN TEORI

1. Sistem dinamik

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang digunakan untuk mengetahui kondisi di masa yang akan datang berdasarkan dengan sistem atau kondisi yang telah ditentukan atau diberikan pada masa lalu atau masa sekarang [6].

2. Sistem Otonomus

Sistem persamaan diferensial dengan bentuk

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x, y), \\ \dot{y} &= f_2(x, y),\end{aligned}\tag{1}$$

Dimana fungsi f_1 dan f_2 merupakan fungsi bernilai real yang tidak bergantung secara eksplisit [6].

Definisi 1. Titik Kesetimbangan Sistem Otonomus

Diberikan suatu sistem otonomus (1). Titik (x_0, y_0) adalah titik kritis (atau titik kesetimbangan) dari sistem (1) jika $f_1(x_0, y_0) = 0$ dan $f_2(x_0, y_0) = 0$. Karena turunan konstanta 0, maka jika titik (x_0, y_0) adalah titik kritis dari sistem (1) fungsi pasangan konstanta nya adalah

$$x(t) = x_0, y(t) = y_0,\tag{2}$$

merupakan solusi dari sistem (1) untuk semua t [7].

Definisi 2. Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem Otonomus

Titik kesetimbangan (x_0, y_0) (atau solusi konstanta dari sistem (2)) pada sistem otonomus (1) dikatakan:

- a. stabil, jika $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $(x(t), y(t))$ pada saat $t = 0$ dari sistem otonomus (1) yang memenuhi

$$[x(0) - x_0]^2 + [y(0) - y_0]^2 < \delta,$$

maka berlaku

$$[x(t) - x_0]^2 + [y(t) - y_0]^2 < \varepsilon, \forall t \geq 0,$$

- b. stabil asimtotik, jika (x_0, y_0) stabil dan $\exists \eta > 0$ sedemikian sehingga setiap solusi $(x(t), y(t))$ pada saat $t = 0$ dari sistem otonomus (1) yang memenuhi

$$[x(0) - x_0]^2 + [y(0) - y_0]^2 < \eta$$

ada untuk semua $t \geq 0$ dan memenuhi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*,$$

c. tidak stabil, apabila titik kritis tersebut tidak memenuhi (a).

3. Model Predator Prey Dua Spesies

Salah satu model matematika yang cukup terkenal adalah model *predator-prey*. Model *predator-prey* dinamai berdasarkan dua ilmuwan yang termasuk dalam ilmuwan pertama yang mempelajari dan menerapkan model *predator-prey*. Dua ilmuwan tersebut yaitu Alfred Lotka (1880-1949) dan Vito Volterra (1860-1940). Terdapat dua persamaan diferensial dalam model Lotka-Volterra, yaitu dimana populasi *prey* dan populasi *predator* dinyatakan dengan $x(t)$ dan $y(t)$ pada waktu t . Dua persamaan diferensial tersebut adalah

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= gx - hf(x,y)y, \\ \frac{dy}{dt} &= -ry + sf(x,y)y,\end{aligned}\tag{3}$$

dengan

$f(x,y)$ = fungsi respon,

g = laju pertumbuhan *prey*,

h = penurunan per kapita *prey* per *predator*,

r = laju kematian *predator*,

s = peningkatan per kapita *predator* per mangsa,

dimana $g, h, r, s > 0$. Pada saat *prey* tidak ada, populasi *predator* dengan laju yang dinyatakan dengan $-rY$ akan mengalami kematian secara alami [8].

4. Kriteria Routh-Hurwitz

Kriteria Routh-Hurwitz digunakan pada sistem persamaan diferensial untuk menentukan stabil asimtotik lokal dari suatu kesetimbangan. Misal diberikan n memiliki persamaan karakteristik sebagai berikut

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,\tag{4}$$

dimana koefisien a_i adalah konstanta real, $i = 1, \dots, n$.

Teorema 2.3

Didefinisikan n matriks Hurwitz sebagai berikut

$$H_1 = [a_1], H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \\ a_5 & a_4 \end{bmatrix},$$

dan

$$H_n = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix},$$

dimana $a_j = 0$ jika $j > n$. Semua akar persamaan karakteristik $P(\lambda)$ adalah negative jika determinan dari semua matriks Hurwitz positif :

$$\det H_j > 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

ketika $n = 2$, maka kriteria Routh-Hurwitz dapat disederhanakan sebagai berikut:

$$\det H_2 = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = a_1 a_2 > 0,$$

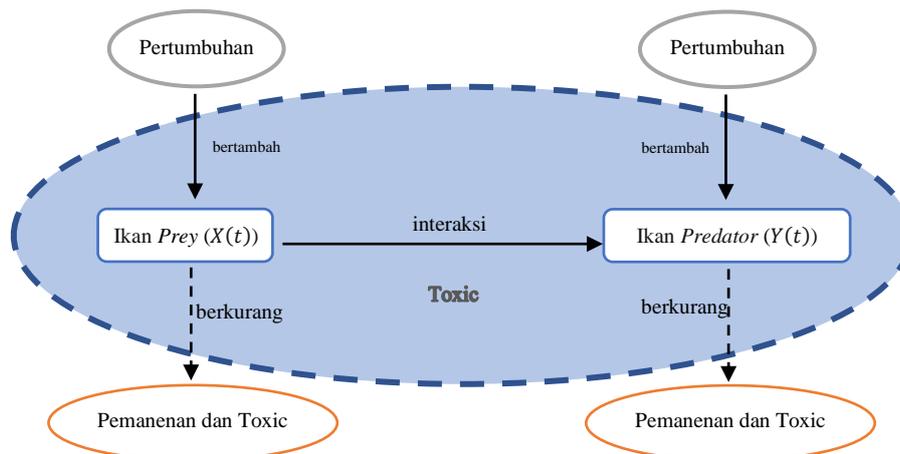
atau $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$ [8].

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Kontruksi Model *Predator-Prey* Perikanan Pada Lingkungan Perairan Tercemar

Pada model *predator-prey* perikanan pada lingkungan perairan tercemar terdapat dua populasi pada model yaitu populasi *prey* dan populasi *predator*. Dalam model ini, populasi ikan *prey* secara langsung terinfeksi oleh racun antropogenik seperti limbah hasil dari kegiatan perindustrian dan pertambangan. Namun berbeda dengan populasi ikan *prey*, populasi ikan *predator* secara tidak langsung terinfeksi oleh racun melalui proses pemberian makan pada ikan *prey* yang terinfeksi racun.

Berikut diberikan diagram model *predator-prey* perikanan pada lingkungan perairan tercemar yaitu sebagai berikut:



Gambar 1. Diagram Kompartemen Model *Predator-Prey* Perikanan

Misalkan populasi ikan *prey* pada saat t dinyatakan dengan $Q(t)$ dan populasi ikan *predator* pada saat t dinyatakan dengan $W(t)$. Tumbuh secara logistik dengan laju r_1 dan r_2 , dan didukung oleh daya dukung lingkungan masing-masing K_1 dan K_2 . Populasi ikan *prey* berkurang dengan upaya pemanenan masing-masing E_1 dan E_2 , di mana parameter b menunjukkan koefisien daya tangkap ikan *prey* dan parameter e menunjukkan koefisien daya tangkap ikan *predator*. Koefisien toksisitas atau racun pada populasi ikan *prey* dilambangkan dengan c , sedangkan koefisien toksisitas pada populasi *predator* dilambangkan f . sehingga laju pertumbuhan populasi *prey* dan populasi *predator* adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= r_1 Q \left(1 - \frac{Q}{K_1}\right) - aQW - bE_1Q - cQ^3, \\ \frac{dW}{dt} &= r_2 W \left(1 - \frac{W}{K_2}\right) + dQW - eE_2W - fW^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Sistem persamaan (5) akan disederhanakan menggunakan varabel-variabel dan parameter yaitu $q = \frac{Q}{K_1}$, $w = \frac{W}{K_2}$, dan $\tau = r_1 t$ yang menghasilkan model *predator-prey* sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dq}{d\tau} &= q(1 - q) - \alpha qw - \beta q - \delta q^3, \\ \frac{dw}{d\tau} &= \sigma w(1 - w) + \rho qw - \epsilon w - \mu w^2, \end{aligned} \quad (6)$$

dimana $\alpha = \frac{aK_2}{r_1}$, $\beta = \frac{bE_1}{r_1}$, $\delta = \frac{cK_1^2}{r_1}$, $\sigma = \frac{r_2}{r_1}$, $\rho = \frac{dK_1}{r_1}$, $\epsilon = \frac{eE_2}{r_1}$, dan $\mu = \frac{fK_2}{r_1}$.

2. Titik Keseimbangan Model

Titik keseimbangan persamaan (6) diperoleh ketika $\frac{dq}{dt} = \frac{dw}{dt} = 0$ sehingga persamaan (6) menjadi

$$q[(1 - q) - \alpha w - \beta - \delta q^2] = 0 \quad (7a)$$

$$w[\sigma(1 - w) + \rho q - \epsilon - \mu w] = 0. \quad (7b)$$

Dari persamaan (7a) diperoleh

$$q = 0, \quad (8a)$$

atau

$$(1 - q) - \alpha w - \beta - \delta q^2 = 0, \quad (8b)$$

Dari persamaan (7b) diperoleh

$$w = 0, \quad (9a)$$

atau

$$\sigma(1 - w) + \rho q - \epsilon - \mu w = 0, \quad (9b)$$

atau

$$w = \frac{\rho q - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}. \quad (9c)$$

Pada persamaan (6) diperoleh empat titik keseimbangan, yaitu titik keseimbangan $P_1 = (0,0)$ dimana diperoleh dengan mengkombinasikan persamaan (8a) dan (9a). Titik keseimbangan $P_2 = \left(0, \frac{\sigma - \epsilon}{\mu + \sigma}\right)$ diperoleh dengan cara mensubstitusikan persamaan (8a) ke persamaan (9b) dimana nilai y akan bernilai positif jika $\sigma > \epsilon$. Titik keseimbangan $P_3 = (\check{q}, 0)$ diperoleh dengan cara mensubstitusikan persamaan (9a) ke persamaan (8b), dimana \check{q} adalah akar dari persamaan $\delta q^2 + q + \beta - 1 = 0$ menghasilkan $q = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\delta\beta + 4\delta}}{2\delta}$, nilai q merupakan populasi *prey* dimana nilai atau jumlah dari populasi *prey* tidak mungkin bernilai negatif sehingga q haruslah positif. Nilai q akan bernilai positif jika $1/4\delta + 1 > \beta$. Titik keseimbangan $P_4 = \left(\hat{q}, \frac{\rho\hat{q} - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}\right)$, diperoleh dengan cara mensubstitusikan persamaan (9c) ke persamaan (8b) diperoleh $(\mu + \sigma)\delta q^2 + (\alpha\rho + \mu + \sigma)q + (\beta - 1)(\mu + \sigma) + \alpha(\sigma + \epsilon) = 0$ menghasilkan $q = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ dengan $a = (\mu + \sigma)$, $b = (\alpha\rho + \mu + \sigma)$, dan $c = (\beta - 1)(\mu + \sigma) + \alpha(\sigma + \epsilon)$. Nilai q merupakan populasi *prey* dimana nilai atau jumlah dari populasi *prey* tidak mungkin bernilai negatif sehingga $q > 0$ dan q akan bernilai positif jika $b^2 > 4ac$.

3. Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan

Matriks Jacobi dari sistem (6) adalah sebagai berikut

$$J(q, w) = \begin{bmatrix} 1 - 2q - \alpha w - \beta - 3\delta q^2 & -\alpha q \\ \rho w & \sigma - 2\sigma w + \rho q - \epsilon - 2\mu w \end{bmatrix}. \quad (10)$$

a. Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan P_1

Matriks Jacobi persamaan P_1 didapat dengan mensubstitusikan $P_1 = (0,0)$ ke matriks (10) maka diperoleh

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 1 - \beta & 0 \\ 0 & \sigma - \epsilon \end{bmatrix},$$

menghasilkan nilai eigen $\lambda_1 = 1 - \beta$ atau $\lambda_2 = \sigma - \epsilon$, sehingga titik keseimbangan P_1 bersifat stabil jika kedua nya $\beta > 1$ dan $\epsilon > \sigma$ dan bersifat tidak stabil jika kedua nya $\beta < 1$ dan $\epsilon < \sigma$.

b. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan P_2

Matrik Jacobi persamaan P_2 didapat dengan mensubstitusikan $P_2 = \left(0, \frac{\sigma - \epsilon}{\mu + \sigma}\right)$ ke matriks (10) maka diperoleh

$$J\left(0, \frac{\sigma - \epsilon}{\mu + \sigma}\right) = \begin{bmatrix} 1 - \alpha\left(\frac{\sigma - \epsilon}{\mu + \sigma}\right) - \beta & 0 \\ \rho\left(\frac{\sigma - \epsilon}{\mu + \sigma}\right) & \epsilon - \sigma \end{bmatrix},$$

menghasilkan nilai eigen $\lambda_1 = 1 - \alpha\left(\frac{\sigma - \epsilon}{\mu + \sigma}\right) - \beta$ atau $\lambda_2 = \epsilon - \sigma$, sehingga titik kesetimbangan P_2 bersifat stabil jika $\beta > 1 - \alpha\left(\frac{\sigma - \epsilon}{\mu + \sigma}\right)$ dan $\sigma > \epsilon$.

c. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan P_3

Matrik Jacobi persamaan P_3 didapat dengan mensubstitusikan $P_3 = (\check{q}, 0)$ ke matriks (10) maka diperoleh

$$J(\check{q}, 0) = \begin{bmatrix} -\check{q}(3\delta\check{q} + 2) - \beta + 1 & -\alpha\check{q} \\ 0 & \rho\check{q} + \sigma - \epsilon \end{bmatrix},$$

menghasilkan nilai eigen $\lambda_1 = -\check{q}(3\delta\check{q} + 2) - \beta + 1$ atau $\lambda_2 = \rho\check{q} + \sigma - \epsilon$, sehingga titik kesetimbangan P_3 bersifat stabil jika $\beta - 1 > -\check{q}(3\delta\check{q} + 2)$ dan $\epsilon > \rho\check{q} + \sigma$.

d. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan P_4

Matrik Jacobi persamaan (6) didapat dengan mensubstitusikan $P_4 = \left(\hat{q}, \frac{\rho\hat{q} - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}\right)$ ke sistem (10) maka diperoleh

$$J\left(\hat{q}, \frac{\rho\hat{q} - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}\right) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix},$$

dengan $b_{11} = 1 - 2\hat{q} - \alpha\left(\frac{\rho\hat{q} - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}\right) - \beta - 3\delta\hat{q}^2$, $b_{12} = -\alpha\hat{q}$, $b_{21} = \rho\left(\frac{\rho\hat{q} - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}\right)$, $b_{22} = \sigma - 2\sigma\left(\frac{\rho\hat{q} - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}\right) + \rho\hat{q} - \epsilon - 2\mu\left(\frac{\rho\hat{q} - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}\right)$.

Persamaan karakteristiknya adalah sebagai berikut

$$\lambda^2 + Q_1\lambda + Q_2 = 0, \quad (11)$$

dengan

$$Q_1 = -b_{11} - b_{22},$$

$$= -\left(1 - 2\hat{q} - \alpha\left(\frac{\rho\hat{q} - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}\right) - \beta - 3\delta\hat{q}^2\right) - \left(\sigma - 2\sigma\left(\frac{\rho\hat{q} - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}\right) + \rho\hat{q} - \epsilon - \right.$$

$$\left. 2\mu\left(\frac{\rho\hat{q} - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}\right)\right),$$

$$Q_2 = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21},$$

$$= \left(1 - 2\hat{q} - \alpha\left(\frac{\rho\hat{q} - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}\right) - \beta - 3\delta\hat{q}^2\right) \left(\sigma - 2\sigma\left(\frac{\rho\hat{q} - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}\right) + \rho\hat{q} - \epsilon - 2\mu\left(\frac{\rho\hat{q} - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}\right)\right) -$$

$$\left(-\alpha\hat{q}\right) \left(\rho\left(\frac{\rho\hat{q} - \epsilon + \sigma}{\mu + \sigma}\right)\right).$$

Nilai eigen pada persamaan (11) menggunakan Kriteria Routh-Hurwitz. Matriks Routh-Hurwitz persamaan (11) adalah

$$H_2 = \begin{bmatrix} Q_1 & 1 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix},$$

Sehingga diperoleh determinan dari persamaan Routh-Hurwitz yaitu

$$\det H_2 = \det \begin{pmatrix} Q_1 & 1 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = Q_1Q_2,$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, nilai eigen pada persamaan (11) bernilai negatif jika hanya jika $Q_1 > 0$ dan $Q_2 > 0$, sehingga titik kesetimbangan P_4 bersifat stabil asimtotik.

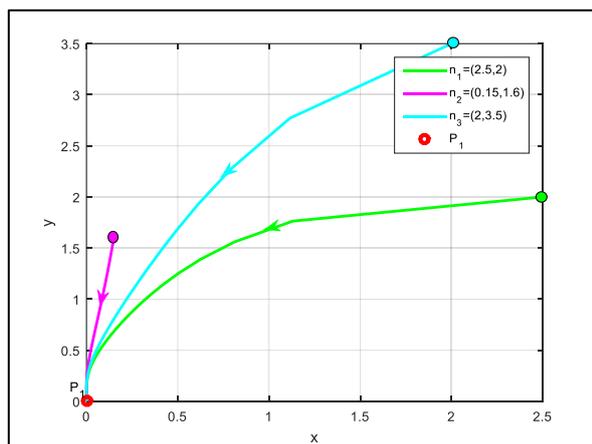
Simulasi Numerik

Simulasi numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat yang mengacu pada hasil analisis kestabilan titik kesetimbangan. Selain itu, simulasi dilakukan dengan menggunakan aplikasi Matlab R2015a. Simulasi numerik dilakukan dengan menggubakan beberapa nilai awal. Beberapa nilai parameter yang digunakan pada simulasi numerik yaitu $\alpha = 0.15$, $\delta = 1.2$, $\epsilon = 0.7$, $\sigma = 0.65$, $\rho = 0.25$, $\mu = 0.2$, dan $\beta = 2$.

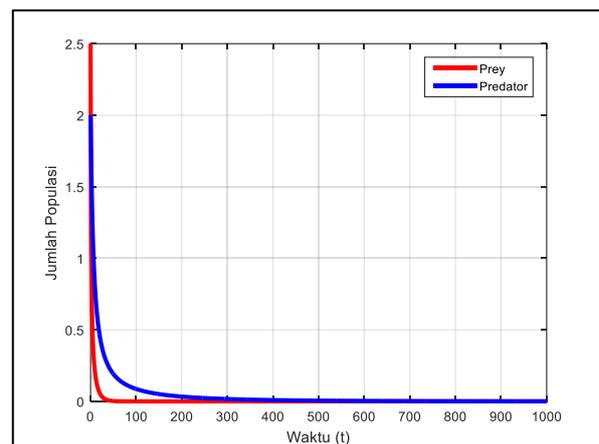
Tabel 1. Nilai parameter untuk simulasi numerik

Parameter	α	δ	ϵ	σ	ρ	μ	β
Nilai	0.15	1.2	0.7	0.65	0.25	0.2	2

Simulasi numerik untuk memperlihatkan kestabilan titik kesetimbangan $P_1 = (0,0)$, dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 1 dan nilai awal yaitu $n_1 = (2.5,2)$, $n_2 = (0.15,1.6)$, dan $n_3 = (2,3.5)$. Nilai parameter tersebut memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan P_1 , yaitu bersifat stabil jika $\beta = 2 > 1$, dan $\epsilon = 0.7 > 0.65 = \sigma$.



Gambar 2. Potret fase ketika populasi predator-prey

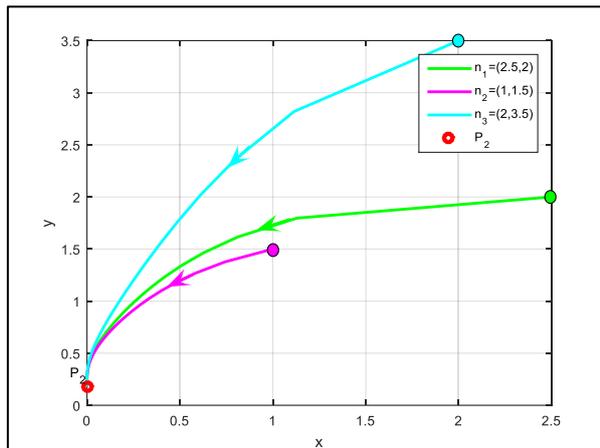


Gambar 3. Grafik predator-prey ketika punah populasi predator dan prey punah

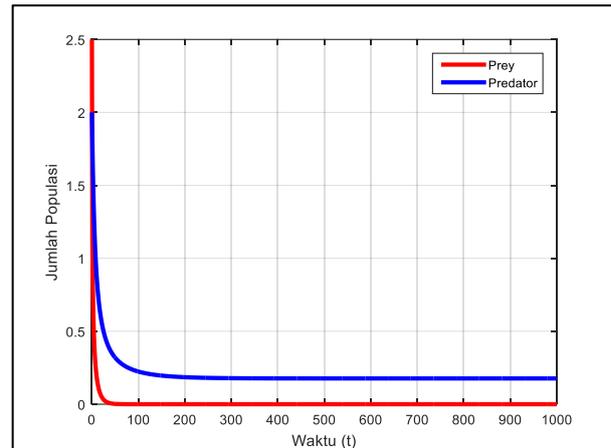
Pada Gambar 2 dan Gambar 3 untuk titik kesetimbangan $P_1 = (0,0)$, menunjukkan bahwa orbit solusi dengan beberapa nilai awal yang berbeda menuju ke kesetimbangan ketika punah populasi predator dan prey punah dan memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan P_1 yaitu bersifat stabil asimtotik.

Simulasi numerik untuk memperlihatkan kestabilan titik kesetimbangan $P_2 = (0, \frac{\sigma - \epsilon}{\mu + \sigma})$, dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 1 dan nilai awal yaitu $n_1 = (2.5,2)$, $n_2 = (1,1.5)$, dan $n_3 = (2,3.5)$, namun agar syarat eksistensi titik kesetimbangan P_2 terpenuhi maka nilai ϵ diubah yaitu $\epsilon = 0.5$. Nilai parameter tersebut memenuhi syarat eksistensi titik kesetimbangan P_2 , yaitu $\sigma = 0.65 > 0.5 = \epsilon$. Nilai parameter tersebut memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan P_2 , yaitu bersifat stabil jika

$$\beta = 2 > 0.9735 = 1 - \alpha \left(\frac{\sigma - \epsilon}{\mu + \sigma} \right), \text{ dan } \sigma = 0.65 > 0.5 = \epsilon.$$



Gambar 4. Potret fase ketika populasi prey punah

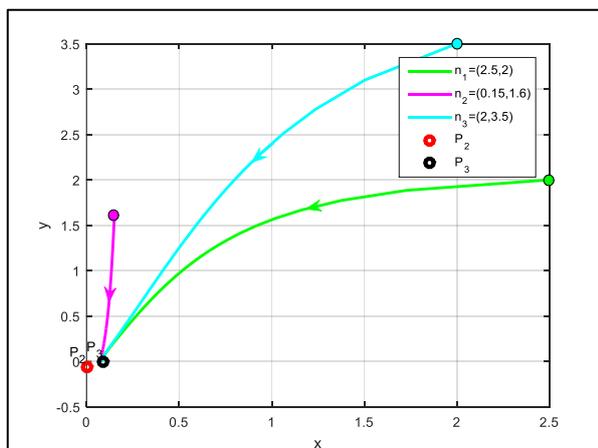


Gambar 5. Grafik predator-prey ketika populasi prey populasi prey punah

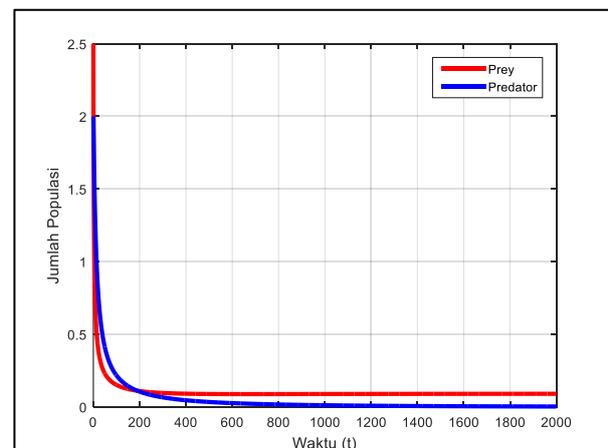
Potret fase pada Gambar 4 untuk titik kesetimbangan $P_2 = \left(0, \frac{\sigma - \epsilon}{\mu + \sigma} \right)$, menunjukkan bahwa orbit solusi dengan beberapa nilai awal yaitu $n_1 = (2.5, 2)$, $n_2 = (1, 1.5)$, dan $n_3 = (2, 3.5)$ ke kesetimbangan $P_2 = (0, 0.1765)$ dan memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan P_2 yaitu bersifat stabil asimtotik. Pada Gambar 5 menunjukkan jumlah populasi predator terlihat mengalami penurunan. Hal ini karena tidak ada nya populasi prey atau ketika populasi prey punah dan juga dikarenakan adanya pemanenan yang berlebihan pada populasi predator serta adanya racun pada lingkungan perairan.

Simulasi numerik untuk memperlihatkan kestabilan titik kesetimbangan $P_3 = (\check{q}, 0)$ dengan menggunakan nilai parameter yang sama pada Tabel 1 dan nilai awal yaitu $n_1 = (2.5, 2)$, $n_2 = (0.15, 1.6)$, dan $n_3 = (2, 3.5)$, namun agar syarat eksistensi titik kesetimbangan P_3 terpenuhi maka nilai β diubah yaitu $\beta = 0.9$. Nilai parameter tersebut memenuhi syarat eksistensi titik kesetimbangan P_3 , yaitu $1/4\delta + 1 = 1.2083 > \beta = 0.9$. Nilai parameter yang diberikan juga memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan P_3 , yaitu

$$\beta - 1 = -0.1 > -\check{q}(3\delta\check{q} + 2) = -0.298, \text{ dan } \epsilon = 0.7 > \rho\check{q} + \sigma = 0.6726.$$



Gambar 6. Potret fase ketika populasi predator punah



Gambar 7. Grafik predator-prey ketika populasi predator punah

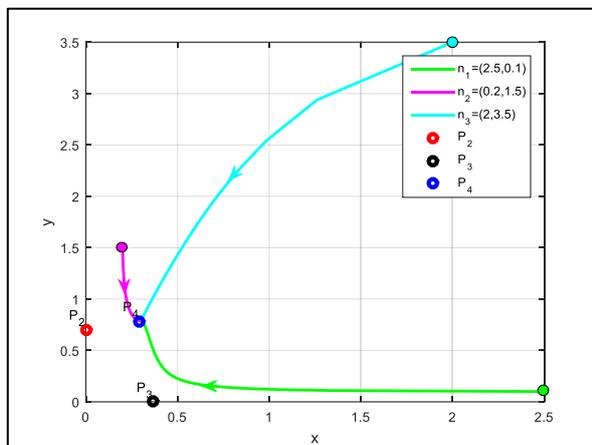
Potret fase pada Gambar 6 untuk titik kesetimbangan $P_3 = (\check{q}, 0)$, menunjukkan bahwa orbit solusi dengan beberapa nilai awal yang berbeda menuju ke kesetimbangan

$P_3 = (0.0902, 0)$ dan memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan P_3 yaitu bersifat stabil asimtotik. Pada Gambar 7 menunjukkan jumlah populasi *prey* terlihat mengalami penurunan. Hal ini terjadi ketika tidak ada nya populasi *predator* atau ketika populasi *predator* punah. Jumlah populasi *prey* terlihat mengalami penurunan dikarenakan adanya pemanenan yang berlebihan pada populasi *prey* dan juga ada nya racun pada lingkungan perairan.

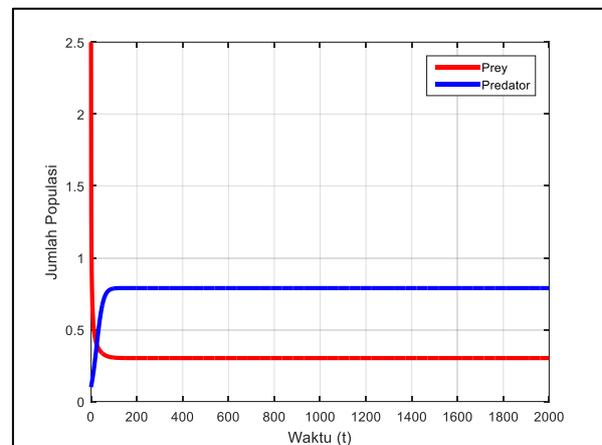
Simulasi numerik untuk memperlihatkan kestabilan titik kesetimbangan $P_4 = \left(\hat{q}, \frac{\rho\hat{q}-\epsilon+\sigma}{\mu+\sigma}\right)$ dengan menggunakan nilai parameter yang sama pada Tabel 1 dan nilai awal yaitu $n_1 = (2.5, 0.1)$, $n_2 = (0.2, 1.5)$, dan $n_3 = (2, 3.5)$, namun agar syarat eksistensi titik kesetimbangan P_4 terpenuhi maka nilai β dan ϵ diubah yaitu $\beta = 0.41$ dan $\epsilon = 0.05$. Nilai parameter tersebut memenuhi syarat eksistensi titik kesetimbangan P_4 , yaitu

$$b^2 = 0.7877 > 4ac = -1.4066.$$

Nilai parameter yang diberikan juga memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan P_4 , yaitu $Q_1 = 1.1428 > 0$ dan $Q_2 = 0.3258 > 0$.



Gambar 8. Potret fase ketika populasi *predator* punah



Gambar 9. Grafik populasi *predator-prey*

Potret fase pada Gambar 8 untuk titik kesetimbangan $P_4 = \left(\hat{q}, \frac{\rho\hat{q}-\epsilon+\sigma}{\mu+\sigma}\right)$, menunjukkan bahwa orbit solusi dengan beberapa nilai awal yang berbeda menuju ke kesetimbangan $P_4 = (0.2911, 0.7856)$ dan memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan P_4 yaitu bersifat stabil asimtotik. Pada Gambar 9 menunjukkan jumlah populasi *prey* terlihat mengalami penurunan dan jumlah populasi *predator* mengalami peningkatan. Jumlah populasi *prey* terlihat mengalami penurunan, hal ini dikarenakan adanya *predator* yang memangsa *prey*, serta pemanenan yang berlebihan pada populasi *prey* dan juga racun pada lingkungan perairan yang mengakibatkan populasi *prey* mengalami penurunan. Sedangkan jumlah populasi *predator* mengalami peningkatan, hal ini dikarenakan adanya populasi *prey*, serta kurangnya pemanenan pada populasi *predator* dan juga racun pada lingkungan perairan yang mengakibatkan populasi *predator* mengalami peningkatan.

PENUTUP

Pada model *predator-prey* perikanan pada lingkungan perairan tercemar diperoleh empat titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan P_1 atau trivial, titik kesetimbangan P_2 ketika populasi *predator* punah, titik kesetimbangan P_3 ketika populasi *prey* punah, dan titik kesetimbangan interior atau P_4 . Titik kesetimbangan P_1 selalu eksis, namun titik kesetimbangan P_2 , P_3 dan P_4 memerlukan syarat eksistensi untuk eksis. Berdasarkan analisis kestabilan pada empat titik kesetimbangan, titik kesetimbangan P_1

atau trivial, titik kesetimbangan P_2 ketika populasi *predator* punah, titik kesetimbangan P_3 ketika populasi *prey* punah, dan titik kesetimbangan interior atau P_4 bersifat stabil asimtotik lokal dengan beberapa syarat kestabilan. Simulasi numerik yang dilakukan menunjukkan hasil yang sesuai dengan analisis.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Hartono, (2007). *Geografi 1 Jelajah Bumi dan Alam Semesta : untuk Kelas X Sekolah Menengah Atas /Madrasah Aliyah*. Jakarta : Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional.
- [2] Boyce, W. E. dan DiPrima, R. C. (2001). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems: Seventh Edition*. John Wiley and Sons, New York.
- [3] Huang Q., Parshotam L., Wang H., Bampfylde C., Lewis M. A. (2013). A model for the impact of contaminants on fish population dynamics. *Journal of Theoretical Biologi* 334:71–79
- [4] Huang Q., Wang H., dan Lewis M. A. (2015). The impact of environmental toxins on predator–prey dynamics. *Journal of Theoretical Biologi* 378:12–30
- [5] Ang, T. K., Safuan, H. M., Sidhu, H. S., Jovanoski, Z., & Towers, I. N. (2019). Impact of Harvesting on a Bioeconomic Predator–Prey Fishery Model Subject to Environmental Toxicant . *Bulletin of Mathematical Biology*, 2748–2767.
- [6] Nagle, R. K., Saff, E. B., dan Snider, A. D. (2012). *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems Sixth Edition*. Inc. USA: Pearson Education.
- [7] Finizio, N. dan G. Ladas, (1982). *An Introduction to Differential Equations with Difference Equation, Fourier Series, and Partial Differential Equations*. Wadsworth Publishing Company. Belmont, California.
- [8] Allen, L. J. (2007). *An Introduction Tomathematical Biology*. Texas Tech University: Department Of Mathematics And Statistics.