

Analisis Pengaruh Kanibalisme pada Model *Predator-Prey* dengan Struktur Usia

Nur Azirah^{1*}, Yuki Novia Nasution¹, Moh Nurul Huda¹

¹Laboratorium Matematika Komputasi Program Studi Matematika Jurusan matematika FMIPA Unniversitas Mulawarman

Dikirim: Mei 2022; Diterima: Juni 2022; Dipublikasi: September 2022

Alamat Email Korespondensi: azirah0311@gmail.com

Abstrak

Pada penelitian ini telah dibahas analisis pengaruh model *predator-prey* dengan struktur usia. Analisis dinamik yang dilakukan meliputi penentuan titik kesetimbangan, syarat eksistensi titik kesetimbangan, analisis kestabilan lokal dan kestabilan global titik kesetimbangan dan simulasi numerik kestabilan titik kesetimbangan. Hasil analisis dinamik menunjukkan bahwa model memiliki empat titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan trivial bersifat tidak stabil, titik kesetimbangan ketika populasi *predator* punah bersifat stabil asimtotik lokal, titik kesetimbangan ketika populasi *prey* punah bersifat stabil asimtotik lokal dan titik kesetimbangan ketika *predator-prey* hidup berdampingan bersifat stabil asimtotik lokal. Kemudian hasil simulasi numerik mendukung hasil analisis dinamik yang dilakukan, yaitu setiap orbit solusi nilai awal menuju ke masing titik kesetimbangan.

Kata kunci:

Analisis kestabilan, kanibalisme, model predator-prey, titik kesetimbangan.

PENDAHULUAN

Ekologi merupakan cabang ilmu biologi yang mempelajari hubungan antara manusia, hewan, tumbuhan dan makhluk hidup lainnya dengan lingkungannya [1]. Makhluk hidup di bumi ini sangat beragam, terdiri dari berbagai spesies yang hidup bersama dan membentuk populasi [2]. Organisme disebut individu, dan populasi adalah kumpulan individu serupa yang berinteraksi pada tempat dan waktu yang sama. Populasi yang berbeda dari spesies yang berbeda yang hidup bersama disebut komunitas. Kelompok yang memiliki karakteristik tertentu dan terdiri dari beberapa komunitas yang berbeda dikenal dengan ekosistem [1].

Ekosistem terdiri dari semua organisme yang hidup dalam komunitas yang sama dan juga semua faktor-faktor abiotik yang berinteraksi dengan organisme tersebut. Salah satu interaksi antar populasi dalam ekosistem adalah predasi, yaitu hubungan *prey* dan *predator*. Hubungan ini sangat erat karena tanpa *prey*, *predator* tidak dapat bertahan hidup karena tidak ada sumber makanan [3].

Predasi adalah bentuk interaksi antara organisme yang memakan organisme lainnya pada suatu tempat tertentu. Secara matematika, suatu bentuk interaksi predasi dimodelkan sebagai model *predator-prey*. Model *predator-prey* adalah model matematika yang mengasumsikan bahwa ada interaksi predasi antara *predator* sebagai organisme pemangsa dan *prey* sebagai organisme yang dimangsa [4].

Peristiwa interaksi *predator-prey* dapat disajikan secara matematis menggunakan model matematika. Model matematika biasanya digunakan untuk menganalisis interaksi antar kelompok. Objek yang diamati adalah jumlah dari dua populasi yang bertambah setiap waktu. Secara matematika ini disebut model *predator-prey* yang diperkenalkan oleh Lotka dan Volterra pada tahun 1926. Interaksi antara *prey* dan *predator* akan mempengaruhi perkembangan kedua populasi tersebut. Model matematika yang digunakan adalah sistem Persamaan diferensial biasa, yang berfungsi untuk mengamati perubahan jumlah individu pada setiap populasi dari waktu ke waktu [5].

Pertemuan antara dua *predator* yang memiliki perbedaan rasa lapar dan perbedaan ukuran dapat menyebabkan peristiwa unik. Peristiwa unik tersebut adalah kanibalisme. Individu yang sangat lapar cenderung lebih agresif dan kanibal [6]. Kanibalisme adalah proses membunuh dan memakan individu dari spesies yang sama [7]. Secara biologis, kanibalisme digunakan sebagai pengendali populasi untuk mencegah perkembangbiakan yang berlebihan [8].

Kajian mengenai model *predator-prey* telah banyak dibahas oleh para peneliti. [9] mengkaji model *predator-prey stage-structured* dengan kanibalisme pada *prey*. [10] mengkaji analisis dinamik model *predator-prey* dengan kanibalisme pada *prey*. [7] mengkaji analisis dinamik model *predator-prey stage-structured* dengan kanibalisme pada *predator*. Berbeda dari penelitian sebelumnya, [11] mengkaji dampak kanibalisme pada dinamika model *predator-prey* dengan mempertimbangkan efek dari tingkat serangan kanibalisme dan manfaat kanibal yang sesuai dengan dinamika model.

Berdasarkan uraian di atas penulis tertarik mengkaji model yang ditulis oleh [11]. Model matematika yang dikaji terdiri dari tiga persamaan, yaitu laju pertumbuhan populasi *predator* dewasa, laju pertumbuhan populasi *predator* muda dan laju pertumbuhan populasi *prey*. Berdasarkan model tersebut dilakukan analisis kestabilan titik kesetimbangan dengan menentukan titik kesetimbangan model dan menganalisis jenis kesetimbangan titik kesetimbangan model. Simulasi numerik dilakukan untuk menunjukkan hasil analisis kestabilan yang telah diperoleh.

LANDASAN TEORI

1. Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah sistem yang dapat diketahui jika kondisi diberikan, kondisi masa depan di masa sekarang atau di masa lalu. Sistem dinamik dalam penerapannya dibagi menjadi dua jenis, yaitu sistem dinamik diskrit dan sistem dinamik kontinu. Sistem dinamik kontinu dinyatakan sebagai Persamaan diferensial biasa, secara umum dapat ditulis [12]

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}_t), \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

2. Sistem Autonomous

Sistem *autonomous* adalah sistem Persamaan diferensial biasa yang berbentuk,

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y, z),$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= G(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= H(x, y, z),\end{aligned}\tag{2}$$

dimana F, G dan H tidak bergantung secara eksplisit pada variabel tak bebas t [13].

Definisi 1. [14] *Titik Kesetimbangan Sistem Autonomous*

Titik $\vec{x}^* = (x^*, y^*, z^*)$ disebut titik kritis sistem autonomous (2) jika memenuhi $F(x^*, y^*, z^*) = 0$, $G(x^*, y^*, z^*) = 0$ dan $H(x^*, y^*, z^*) = 0$. Titik kritis $\vec{x}^* = (x^*, y^*, z^*)$ merupakan solusi dari Persamaan (2) yang bernilai konstan karena $\frac{d\vec{x}}{dt} = 0$. Hal ini disebut keadaan setimbang dan titik kritis adalah titik yang terpenuhi, sehingga titik kritis disebut titik kesetimbangan.

Definisi 2. [14] *Kestabilan Titik Kesetimbangan*

Titik kesetimbangan \vec{x}^* sistem autonomous (2) dikatakan

- a. stabil, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga setiap solusi $\vec{x}(t)$ dari sistem (2.11) dimana $t = 0$ sehingga

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta,$$

dan untuk setiap t positif dan memenuhi

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon, \forall t \geq 0.$$

- b. stabil asimtotik, jika \vec{x}^* stabil dan terdapat $\delta_0 > 0$ sedemikian sehingga jika solusi $x(t)$ memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta_0$$

berlaku

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*$$

- c. tidak stabil, jika tidak memenuhi kondisi stabil.

3. Kriteria Routh-Hurwitz

Nilai eigen matriks Jacobi $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ dapat digunakan untuk menganalisis kestabilan titik kesetimbangan sistem (2). Persamaan karakteristik matriks Jacobi $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ adalah

$$|J - \lambda I| = 0\tag{3}$$

dengan λ merupakan nilai eigen matriks Jacobi J . Bentuk umum Persamaan (3) adalah

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0\tag{4}$$

dengan $a_n \neq 0$. Titik kesetimbangan sistem *autonomous* linier bersifat stabil asimtotik jika semua akar Persamaan karakteristik terdapat bagian real negatif. Pada beberapa kasus, tidak mudah untuk menentukan akar Persamaan dari (4), sehingga dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz dapat diketahui kestabilan titik kesetimbangannya dengan tanpa menentukan akar-akar Persamaan karakteristiknya [15].

Akar Persamaan karakteristik (4) memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika $a_n > 0$ dan

$$H = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix}\tag{5}$$

Determinan matriks ke- k dinotasikan sebagai Δ_k , untuk $k = 1, 2, 3, \dots, n$. jika semua Δ_k bernilai positif, maka semua akar-akar karakteristik dari polynomial $P(\lambda)$ memiliki bagian real negatif [15].

Misalkan diberikan matriks berukuran 3×3 dengan Persamaan karakteristik berderajat tiga

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0. \quad (6)$$

Akar Persamaan (6) memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika

- $\Delta_1 = |a_1| > 0$
- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3 > 0$, karena jika $\Delta_2 > 0$ maka
- $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3 - a_3^2 > 0$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Konstruksi Model *Predator-Prey* dengan Kanibalisme

Model interaksi *predator-prey* terdiri dari populasi *predator* dewasa (X) sebagai pemangsa *predator* muda dan *prey*, populasi *predator* muda (Y) sebagai pemangsa *prey* namun dia juga dimangsa oleh *predator* dewasa dan populasi *prey* (Z) sebagai mangsa.

Model *predator-prey* dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} &= -d_1X + \mu Y + \varepsilon_1XY + cXZ, \\ \frac{dY}{dT} &= B_1X - \mu Y - d_2Y - \beta_1XY, \\ \frac{dZ}{dT} &= (B_2 - \alpha_1Z - \theta X)Z, \end{aligned} \quad (7)$$

dengan d_1 koefisien kematian alami *predator* dewasa, μ koefisien pertumbuhan *predator* muda, ε_1 koefisien penangkapan *predator* dewasa dengan memangsa *predator* muda, c koefisien Penangkapan *predator* dewasa dengan memangsa *prey*, B_1 koefisien kelahiran dari *predator* dewasa, d_2 koefisien kematian alami pada *predator* muda, β_1 koefisien kanibalisme oleh *predator* dewasa, B_2 koefisien pertumbuhan *prey*, α_1 koefisien pertumbuhan *prey* dan θ koefisien predasi oleh *predator* dewasa.

Sistem (7) disederhanakan dengan mengkombinasikan variabel dan parameter baru. Misalkan

$X = \frac{d_1x}{\theta}$, $Y = \frac{d_1^2y}{\theta\mu}$, $Z = \frac{d_1z}{c}$ dan $T = \frac{t}{d_1}$, sehingga diperoleh sistem baru yaitu

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x + y + \varepsilon xy + xz, \\ \frac{dy}{dt} &= b_1x - \sigma y - \beta xy, \\ \frac{dz}{dt} &= (b_2 - \alpha z - x)z, \end{aligned} \quad (8)$$

dengan $\varepsilon = \frac{d_1\varepsilon_1}{\theta\mu}$, $b_1 = \frac{B_1\mu}{d_1^2}$, $\sigma = \mu + d_2$, $\beta = \frac{\beta_1}{\theta}$, $b_2 = \frac{B_2}{d_1}$, $\alpha = \frac{\alpha_1}{c}$ dan syarat awal $x(0) > 0$, $y(0) > 0$, $z(0) > 0$.

2. Titik Keseimbangan Model

Pada sistem (8) diperoleh empat titik keseimbangan yang eksis, yaitu $E_0 = (0, 0, 0)$, $E_1 = (0, 0, \frac{b_2}{\alpha})$, $E_2 = (\hat{x}, \hat{y}, 0) = (\frac{(\sigma - b_1)}{(\varepsilon b_1 - \beta)}, \frac{(\sigma - b_1)}{(\varepsilon \sigma - \beta)}, 0)$ dan $E_3 = (x^*, y^*, z^*) = (\frac{B + \sqrt{D}}{2A}, \frac{b_1x^*}{(\sigma + \beta x^*)}, \frac{(b_2 - x^*)}{\alpha})$, dengan $A = \beta$, $B = -[\alpha\varepsilon b_1 - \sigma - \beta(\alpha - b_2)]$ dan $C = [\alpha(\sigma - b_1) - \sigma b_2]$. Titik keseimbangan E_2 eksis jika $\frac{\beta}{\varepsilon} < b_1 < \sigma$, sedangkan titik keseimbangan E_3 eksis jika $\beta > 0$ dan $\varepsilon > 0$.

3. Kestabilan Titik Keseimbangan

- a. Titik Kesetimbangan $E_0 = (0,0,0)$

Hasil linearisasi di sekitar E_0 menghasilkan matriks Jacobi $J(E_0)$, yaitu

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ b_1 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

dan diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = b_2$, $\lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ dan $\lambda_3 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ dengan $a = 1$, $b = 1 + \sigma$ dan $c = \sigma - b_1$. Oleh karena nilai eigen λ_1 bernilai positif, maka titik kesetimbangan E_0 bersifat tidak stabil.

- b. Titik Kesetimbangan $E_1 = (0,0, \frac{b_2}{\alpha})$

Titik kesetimbangan E_1 menunjukkan bahwa populasi *predator* dewasa dan *predator* muda punah. Matriks Jacobi hasil linearisasi di sekitar E_1 adalah

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -1 + \frac{b_2}{\alpha} & 1 & 0 \\ b_1 & -\sigma & 0 \\ -\frac{b_1}{\alpha} & 0 & -b_2 \end{bmatrix}$$

dan nilai eigen yang diperoleh, yaitu $\lambda_1 = -b_2$, $\lambda_2 = \frac{-e + \sqrt{e^2 - 4df}}{2d}$ dan $\lambda_3 = \frac{-e - \sqrt{e^2 - 4df}}{2f}$ dengan $d = 1$, $e = -(\frac{b_2}{\alpha} - \sigma - 1)$ dan $f = (\sigma - \frac{b_2\sigma}{\alpha} - b_1)$. Titik Kesetimbangan ini bersifat stabil asimtotik lokal jika $\frac{b_2}{\alpha} + \frac{b_1}{\sigma} < 1$.

- c. Titik Kesetimbangan $E_2 = (\hat{x}, \hat{y}, 0) = (\frac{(\sigma - b_1)}{(\varepsilon b_1 - \beta)}, \frac{(\sigma - b_1)}{(\varepsilon \sigma - \beta)}, 0)$

Titik kesetimbangan E_2 menunjukkan bahwa populasi *prey* punah. Matriks Jacobi hasil linearisasi di sekitar E_2 adalah

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} -\frac{\hat{y}}{\hat{x}} & \frac{\hat{x}}{\hat{y}} & \hat{x} \\ \frac{\sigma \hat{y}}{\hat{x}} & -\frac{b_1 \hat{x}}{\hat{y}} & 0 \\ 0 & 0 & b_2 - \frac{\sigma - b_1}{\varepsilon b_1 - \beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix}$$

dan nilai eigen yang diperoleh, yaitu $\lambda_1 = m_{33}$, $\lambda_2 = \frac{-r + \sqrt{r^2 - 4qs}}{2q}$ dan $\lambda_3 = \frac{-r - \sqrt{r^2 - 4qs}}{2q}$ dengan $q = 1$, $r = -m_{11} - m_{22}$ dan $s = m_{11}m_{22} + m_{12}m_{21}$. Titik kesetimbangan ini akan stabil asimtotik lokal jika $\sigma\varepsilon < \beta$ dan $\frac{\sigma + \beta b_2}{1 + \varepsilon b_2} < b_1 < \frac{\beta}{\varepsilon}$.

- d. Titik Kesetimbangan $E_3 = (x^*, y^*, z^*)$

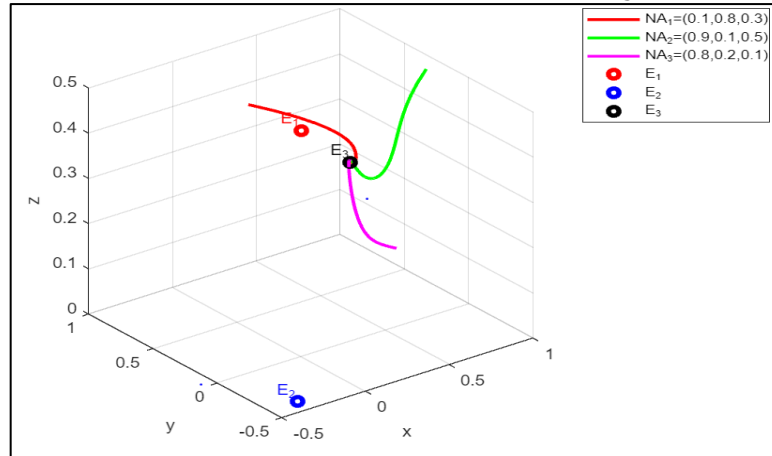
Titik kesetimbangan E_3 menunjukkan bahwa populasi *predator-prey* hidup berdampingan. Matriks Jacobi hasil linearisasi di sekitar E_3 adalah

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} -\frac{y^*}{x^*} & \frac{(1 - z^*)x^*}{y^*} & x^* \\ \frac{\sigma y^*}{x^*} & -\frac{b_1 x^*}{y^*} & 0 \\ -z^* & 0 & -\alpha z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, titik kesetimbangan E_3 bersifat stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika $a_1 a_2 - a_3 > 0$, dengan $a_1 = -(g_{11} + g_{22} + g_{33})$, $a_2 = g_{11}g_{22} + g_{11}g_{33} - g_{12}g_{21} + g_{22}g_{33} - g_{13}g_{31}$ dan $a_3 = -g_{11}g_{22}g_{33} + g_{12}g_{21}g_{33} + g_{13}g_{22}g_{31}$.

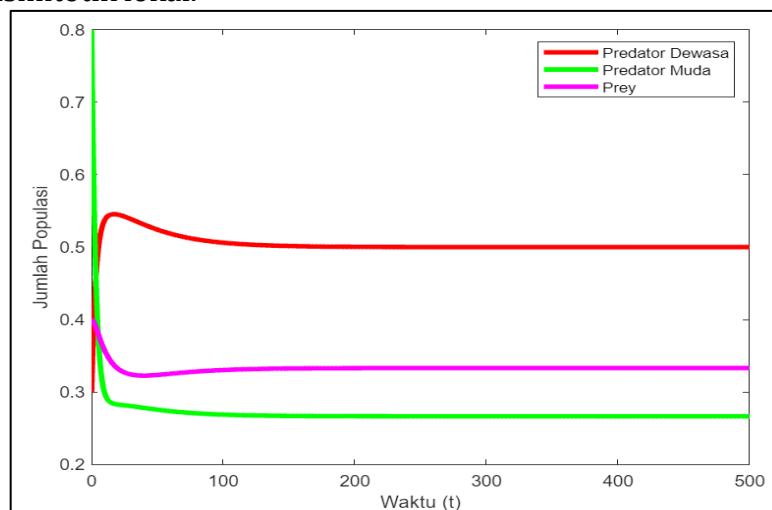
4. Simulasi Numerik

Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dan *software MATLAB*. Simulasi ini bertujuan untuk melengkapi hasil-hasil yang diperoleh secara analisis pada materi sebelumnya. parameter yang digunakan untuk titik kesetimbangan E_1 adalah $b_1 = 2,5$; $b_2 = 1,5$; $\sigma = 4,4$; $\alpha = 4$; $\beta = 5$ dan $\varepsilon = 1,89$ dengan nilai awal $NA_1 = (0,1; 0,8; 0,3)$, $NA_2 = (0,9; 0,1; 0,5)$ dan $NA_3 = (0,8; 0,2; 0,1)$.



Gambar 1. Grafik Sistem (8) yang Menuju Kestabilan Titik Kesetimbangan E_3

Hasil simulasi Gambar 1 menunjukkan bahwa orbit solusi tiga nilai awal yang berbeda menuju titik kesetimbangan E_3 , dengan kata lain titik kesetimbangan $E_3(0,5; 0,27; 0,33)$ bersifat stabil asimtotik lokal.

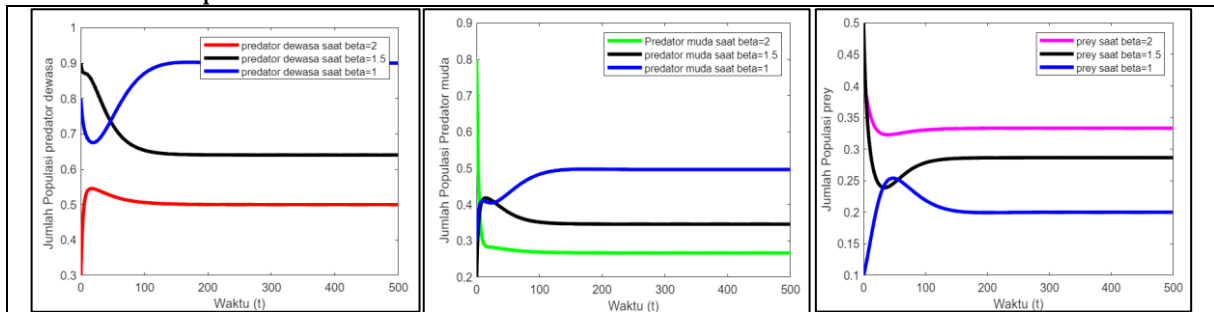


Gambar 2. Grafik *Predator-Prey* hidup berdampingan

Gambar 2 menunjukkan grafik hasil penyelesaian model dan jumlah populasi *predator* dewasa, *predator* muda dan *prey* dengan nilai awal $NA_1 = (0,1; 0,8; 0,3)$. Berdasarkan grafik di atas didapatkan jumlah populasi *prey* yaitu 0,33, jumlah populasi *predator* dewasa yaitu 0,5 dan jumlah populasi *predator* muda yaitu 0,27. Berdasarkan Gambar 1 dan Gambar 2 didapatkan nilai yang sama untuk jumlah populasi *predator* dewasa, *predator* muda dan *prey*.

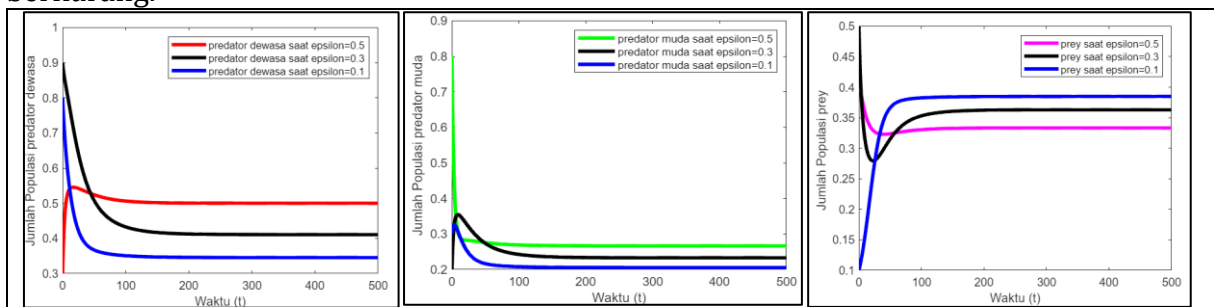
Analisis kanibalisme dilakukan dengan menggunakan nilai input yang berbeda-beda dari salah satu parameter yang mempengaruhi efek kanibalisme pada *predator* sementara parameter yang lain tetap. Parameter yang dipilih adalah β (laju kanibalisme *predator* dewasa) dan ε (laju memangsa *predator* muda). Pengaruh naik turunnya

parameter yang mempengaruhi efek kanibalisme terhadap sub populasi disajikan dalam Gambar 3 sampai Gambar 4.



Gambar 3. Gambar Perubahan Nilai β Terhadap Populasi x, y, z

Gambar 3 menunjukkan pengaruh kanibalisme predator dewasa terhadap jumlah dari setiap populasi. Jika nilai β semakin kecil maka jumlah populasi predator dewasa semakin bertambah begitu pula yang terjadi pada populasi predator muda dan populasi prey sebaliknya, yaitu jika nilai β semakin berkurang maka jumlah populasi prey semakin berkurang.



Gambar 4. Gambar Perubahan Nilai ϵ Terhadap Populasi x, y, z

Gambar 4 menunjukkan pemangsaan terhadap predator muda terhadap jumlah dari setiap populasi. Jika nilai ϵ semakin berkurang maka jumlah populasi predator dewasa semakin berkurang begitu pula yang terjadi dengan populasi predator muda dan populasi prey sebaliknya, yaitu jika nilai ϵ semakin berkurang maka jumlah populasi prey semakin bertambah.

PENUTUP

Model predator-prey dengan struktur usia memiliki empat titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan trivial (ketiga populasi punah). Titik kesetimbangan ketika populasi predator dewasa dan predator muda punah. Titik kesetimbangan ketika populasi prey punah dan titik kesetimbangan ketika predator-prey hidup berdampingan. Titik kesetimbangan trivial dan titik kesetimbangan ketika populasi predator dewasa dan predator muda punah selalu eksis, sedangkan titik kesetimbangan ketika populasi prey punah dan titik kesetimbangan ketika predator-prey hidup berdampingan eksis dengan syarat tertentu. Berdasarkan hasil analisis kestabilan pada titik kesetimbangan, titik kesetimbangan trivial bersifat tidak stabil, titik kesetimbangan ketika populasi predator dewasa dan predator muda punah, titik kesetimbangan ketika populasi prey punah dan titik kesetimbangan ketika predator-prey hidup berdampingan bersifat stabil asimtotik lokal dengan syarat tertentu. Hasil simulasi ketiga populasi mempengaruhi jumlah populasi ketika nilai parameter laju kestabilan predator dewasa dan laju pemangsaan predator muda berubah.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Wijayanti, H., Sri, S., Mardika, W. (2011). Metode Runge Kutta dalam Penyelesaian Model Radang Akut. *Jurnal Program Studi Matematika*, 11(2), 46-52.
- [2] Winarni, dkk. (2020). Analisis Pengaruh Tingkat Kompetensi dan Interaksi antara Prey dan Predator pada Perilaku Model Dinamik Diskrit Lotka-Volterra. *Journal of Mathematics and Mathematics Education*, 2(2), 109-118.
- [3] Taufiq, Irham, dan Agustino D. (2018). Model Predator-Prey dengan Dua Predator dan Satu Prey Terinfeksi. *Journal of Mathematics Education*, 1(1), 8-15.
- [4] Safitri, Oryza dan Mardijah. (2019). Kontrol Optimum pada Model Prey-Predator dengan Pemanenan pada Ikan Prey dan Ikan Predator. *Journal of Mathematics and Its Applications*, 16(1), 39-49.
- [5] Mu'tamar, K., dan Zulkarnain. (2017). Model Predator-Prey dengan Adanya Infeksi dan Pengobatan pada Populasi Mangsa. *Jurnal Sains, Teknologi dan Industri*, 15(1), 1-6.
- [6] Petersen, A., Kristian, T, N., Christian, B, C., dan Soren, T. (2010). The Advantage of Starving: Success in Cannibalistic Encounters Among Wolf Spiders. *Behavioral Ecology*, Vol 21(5), 1112 – 1117.
- [7] Zhang, F., Chen Y., dan Li J. (2018). Dynamical Analysis of a Stagestructured Predator-Prey Model with Cannibalism. *Mathematical Biosciences*, 307, 33-41.
- [8] Jia, Y., Yi, L., dan Jianhua, W. (2016). Effect of Predator Cannibalism and Prey Growth on the Dynamic Behavior for an Predatorstage structured Population Model with Diffusion. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 449(2), 1479 – 1501.
- [9] Zhang, L., dan Zhang, C. (2010). Rich Dynamic of a stage-structured prey-predator model with canibalism and periodic attacking rate. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(12), 4029-4040.
- [10] Basheer, A., Emmanuel, Q., Suman, B., dan Rana, D. P. (2016). Prey cannibalism alters the dynamics of Holling-Tanner-type predator-prey models. *Nonlinear Dynamics*, 85(4), 2549-2567.
- [11] Li, J., Xue, Z., Xiaolin, L., dan Jia,L. (2019). Impact of cannibalism on dynamicsof a structured predator–prey system. *Applied Mathematical Modelling*, 78, 1-9.
- [12] Alligood, K. T., T. D. Sauer., dan J, A. Yorke. (2000). *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. New York: Springer.
- [13] Goode, S. W., dan Annin, S. A. (2015). *Differential Equations and Linear Algebra*. Fourth Edition. California State University. New York: Fullerton.
- [14] Boyce, W.E., dan DiPrima, R.C. (2009). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. United State of America: Ninth Edition. John Willey & Sons, Inc.
- [15] Murray, J. D. (2002). *Mathematical Biology: An Introduction. Third Edition*. New York: Springer-Verlag.