

Pelabelan Titik (a,d) Sisi Anti-Ajaib pada Graf *Ribbon Chain*

Bela Sevtia Yolanda¹, Dea Alvionita Azka^{1,*}

¹ Universitas Sriwijaya

Dikirim: September 2026;

Diterima: September 2026;

Dipublikasi: September 2026

Alamat Email Korespondensi: deaalvionitazka@fkip.unsri.ac.id

Abstrak

Penelitian ini membahas pelabelan titik (a,d) sisi anti-ajaib (edge-antimagic vertex labeling) pada Graf Ribbon Chain (RC_k). Graf RC_k merupakan graf sederhana dengan $p=4k+2$ titik dan $q=8k$ sisi untuk $k \geq 2$. Penelitian ini mengonstruksi fungsi bijektif $f: V(RC_k) \rightarrow \{1, 2, \dots, 4k+2\}$ yang menghasilkan himpunan bobot sisi $\{3, 4, \dots, 8k+2\}$. Dengan demikian, RC_k memiliki pelabelan titik $(3,1)$ sisi anti-ajaib untuk setiap $k \geq 2$. Analisis batas parameter menunjukkan bahwa untuk setiap pelabelan (a,d) pada RC_k harus berlaku $d=1$ dan $a \in \{3,4\}$; sehingga pasangan $(3,1)$ yang dibuktikan dalam penelitian ini merupakan pasangan dengan suku awal minimum yang mungkin. Selain pembuktian analitik, diberikan ilustrasi numerik untuk RC_2 sebagai contoh representasi konseptual topologi jaringan.

Kata Kunci:

graf, pelabelan titik (a,d) sisi anti-ajaib, graf Ribbon Chain, bobot sisi

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan bagian dari matematika diskrit yang mempelajari hubungan antarobjek melalui titik (vertex) dan sisi (edge). Salah satu topik yang berkembang dalam teori graf adalah pelabelan graf, yaitu pemberian label berupa bilangan pada unsur-unsur graf dengan aturan tertentu. Berbagai jenis pelabelan telah dikembangkan untuk mengidentifikasi struktur graf dan menghasilkan karakteristik numerik yang khas.

Pelabelan titik (a,d) sisi anti-ajaib (a,d) -edge-antimagic vertex labeling atau $(a,d) - EAV$ merupakan pelabelan yang hanya menggunakan titik sebagai domain pelabelan. Untuk graf $G = (V, E)$ dengan $|V| = p$ dan $|E| = q$, suatu bijeksi $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}$ disebut pelabelan $(a,d) - EAV$ jika bobot sisi $wf(uv) = f(u) + f(v)$, $uv \in E(G)$, membentuk barisan aritmetika $\{a, a+d, \dots, a+(q-1)d\}$, dengan $a > 0$ dan $d \geq 1$. Konsep ini merupakan salah satu bentuk pelabelan anti-ajaib yang telah dikaji untuk berbagai kelas graf [1 – 3].

Penelitian tentang pelabelan anti-ajaib pada kelas graf tertentu penting karena keberadaan pelabelan sangat dipengaruhi oleh struktur graf. Hasil-hasil terdahulu menunjukkan bahwa konstruksi pelabelan sering kali bergantung pada pola keterhubungan, jumlah titik, jumlah sisi, serta batas nilai bobot sisi [1,2]. Oleh karena itu, kelas graf baru masih memberikan ruang untuk memperoleh konstruksi dan karakterisasi pelabelan yang berbeda.

Dalam penelitian ini dikaji Graf Ribbon Chain (RC_k), yaitu kelas graf yang terdiri atas k blok dengan pola keterhubungan berulang. Struktur ini diperkenalkan dalam penelitian sebagai kelas graf yang akan dianalisis sifat pelabelannya. Tujuan penelitian adalah: (1) menentukan batas parameter (a,d) yang mungkin untuk pelabelan titik sisi anti-ajaib

pada RC_k ; dan (2) mengonstruksi pelabelan yang menunjukkan bahwa RC_k memiliki pelabelan $(3,1) - EAV$ untuk setiap $k \geq 2$. Analisis parameter juga digunakan untuk menjelaskan posisi pasangan $(3,1)$ dibandingkan dengan pasangan parameter lain yang secara umum masih mungkin.

LANDASAN TEORI

Konsep Dasar Graf

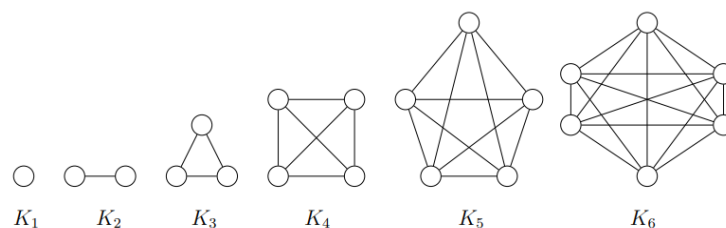
Graf merupakan pasangan himpunan yang dinotasikan sebagai $G = (V, E)$ di mana V adalah himpunan tidak kosong dari simpul (vertex) dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang simpul. Pada hal ini, V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Oleh karena itu, ada kemungkinan sebuah graf tidak memiliki sisi satu pun, tetapi harus memiliki minimal satu simpul. Graf yang hanya memiliki satu simpul disebut graf trivial. Selain itu, graf yang tidak memiliki sisi disebut graf kosong. [6]

Sebuah graf dapat didefinisikan sebagai $G(p, q)$ dengan p adalah jumlah vertex dan q adalah jumlah sisi. Simpul pada graf dapat dinyatakan dengan huruf seperti $a, b, c, \dots, x, y, z$ atau dengan bilangan asli $1, 2, 3, \dots$, atau dengan gabungan keduanya. Sisi yang menghubungkan simpul x dan simpul y dinyatakan sebagai sisi (*edge*) yang dinotasikan sebagai xy atau yx .

Dalam graf dikenal juga istilah bobot yang merepresentasikan nilai pada pelabelan sisi atau titik. Bobot titik adalah jumlah dari semua label sisi yang terhubung ke titik tersebut. Bobot sisi adalah jumlah dari semua label titik yang terhubung ke sisi tersebut. Bobot dalam graf berfungsi untuk memberikan informasi mengenai karakteristik hubungan antar simpul (titik).

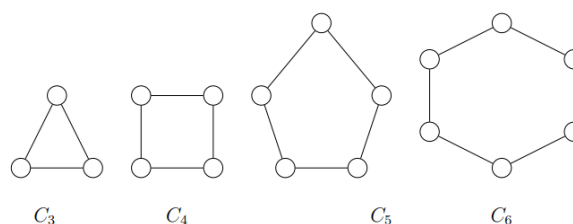
Jenis-Jenis Graf

Graf Lengkap atau Complete adalah graf sederhana yang terdiri atas titik sebanyak n sisi $[4]$.



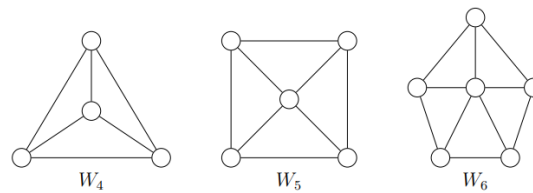
Gambar 1. Graf Lengkap

Graf Siklis atau Cycle adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua dengan titik $[4]$.



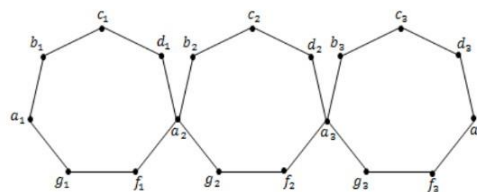
Gambar 2. Graf Siklis

Graf Roda atau Wheels adalah graf sederhana yang terdiri dari n titik yang diperoleh dengan cara menambahkan satu titik pada graf siklis, dan menghubungkan titik baru tersebut dengan semua titik pada graf siklis tersebut [4].



Gambar 3. Graf Roda

Graf Rantai atau Chain adalah sebuah graf yang terdiri dari blok-blok Berikut ini contoh graf rantai heptagon [7].



Gambar 4. Graf Rantai

Graf Ribbon Chain

Graf Ribbon Chain RC_k merupakan graf sederhana yang terdiri atas blok $B_1, B_2, \dots, B_k$. Untuk $1 \leq i \leq k-1$, blok B_i dan B_{i+1} berisikan pada dua titik, yaitu x_i dan z_{2i+1} . Himpunan titik dan sisi dapat dituliskan secara eksplisit sebagai berikut.

$$V(RC_k) = \{B\} \cup \{x_i, y_i : 1 \leq i \leq k\} \cup \{z_j : 1 \leq j \leq 2k+1\}$$

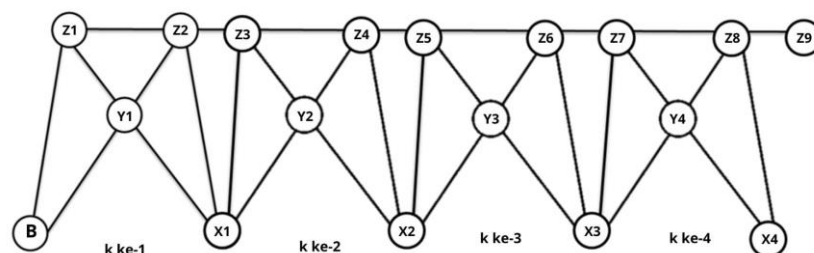
Selain itu,

$$E(RC_k) = \{Bz_1, By_1\} \cup \{z_{2j}z_{2j-1}, z_{2j}z_{2j+1}, y_jz_{2j-1}, y_jz_{2j}, x_jy_j, x_jz_{2j} : 1 \leq j \leq k\} \\ \cup \{x_iy_{i+1}, x_iz_{2i+1} : 1 \leq i \leq k-1\}.$$

Oleh karena itu,

$$|V(RC_k)| = 4k + 2 \text{ dan } |E(RC_k)| = 8k$$

Dengan definisi tersebut, $k \geq 2, p = 4k + 2$, dan $q = 8k$. Bentuk eksplisit himpunan sisi juga menegaskan bahwa dua sisi x_ky_{k+1} dan $x_kz_{(2k+1)}$ tidak termasuk dalam $E(RC_k)$, karena indeks $k+1$ berada di luar definisi titik yang digunakan.

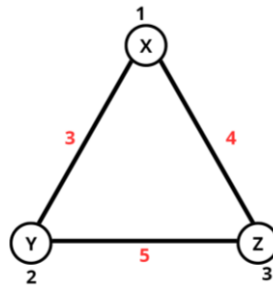
Gambar 5. Graf Ribbon Chain (RC_4)

Pelabelan titik (a, d) sisi anti-ajaib

Pelabelan anti-ajaib pada bagian ini dibatasi pada pelabelan titik. Dengan demikian, label diberikan hanya pada titik graf, sedangkan bobot suatu sisi diperoleh dari jumlah label kedua titik ujungnya. Definisi berikut digunakan dalam pembuktian.

Misalkan $G(V, E)$ adalah graf dengan $|V(G)| = p$ dan $|E(G)| = q$. Suatu bijeksi $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}$ disebut pelabelan titik (a, d) sisi anti-ajaib dari G jika :

$wf(G) = \{wf(uv) : uv \in E(G)\} = \{a, a + d, \dots, a + (q - 1)d\}$, $wf(uv) = f(u) + f(v)$, $a > 0$ dan $d \geq 1$. Graf yang memiliki pelabelan tersebut disebut graf (a, d) -edge-antimagic vertex.



Gambar 6. Pelabelan titik (a, d) sisi anti-ajaib

HASIL DAN PEMBAHASAN

Analisis Parameter (a, d)

Untuk melengkapi karakterisasi parameter, misalkan RC_k memiliki pelabelan (a, d) -EAV. Karena f merupakan bijeksi ke $\{1, 2, \dots, 4k+2\}$, bobot sisi minimum tidak kurang dari 3. Karena RC_k merupakan graf sederhana, dua titik yang bertetangga memiliki label berbeda sehingga bobot sisi maksimum tidak melebihi $(4k+2) + (4k+1) = 8k+3$. Karena $q=8k$, bobot terbesar pada barisan aritmetika harus memenuhi $a + (8k-1)d \leq 8k+3$. Dengan $a \geq 3$ dan $d \geq 1$, diperoleh $d=1$; selanjutnya $a \leq 4$. Jadi hanya pasangan $(3, 1)$ dan $(4, 1)$ yang tidak langsung gugur dari batas umum ini.

Tabel 1. Batas parameter yang diperoleh dari ukuran graf

Parameter	Status	Keterangan
$d \geq 2$	Tidak mungkin	Melanggar $a + (8k-1)d \leq 8k+3$ untuk $k \geq 2$.
$(3, 1)$	Terbukti	Suku awal minimum; dikonstruksi pada Teorema 1.
$(4, 1)$	Belum dikarakterisasi	Satu-satunya pasangan lain yang tidak dikecualikan oleh batas umum.

Teorema 1. Untuk setiap $k \geq 2$, Graf Ribbon Chain RC_k memiliki pelabelan titik $(3, 1)$ sisi anti-ajaib.

Bukti.

Labeli titik graf Ribbon Chain dengan fungsi bijektif f yang didefinisikan sebagai pelabelan $f: V(RC_k) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p\}$; $p \in \mathbb{N}$, maka pelabelan f dapat dituliskan sebagai berikut.

$$f(B) = 1$$

$$f(x_i) = 4i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq k$$

$$f(y_i) = 4i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq k$$

$$f(z_j) = 2j, \text{ untuk } 1 \leq j \leq 2k + 1$$

Dengan definisi bobot sisi $wf(uv) = f(u) + f(v)$, substitusi fungsi f ke setiap kelas sisi menghasilkan pola bobot berikut. Pola ini sekaligus memperlihatkan bahwa tidak terjadi pengulangan bobot.

Tabel 2. Urutan bobot sisi yang dihasilkan oleh konstruksi f

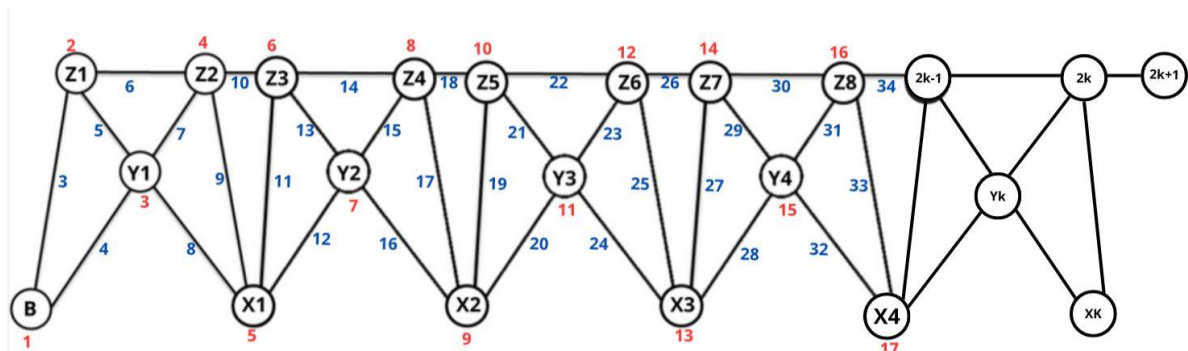
k=1	k=2	k=3	k=4
3	11	19	27
4	12	20	28
5	13	21	29
6	14	22	30
7	15	23	31
8	16	24	32
9	17	25	33
10	18	26	34

Untuk blok terakhir $i = k$, kedua sisi $x_k y_{\{k+1\}}$ dan $x_k z_{\{2k+1\}}$ tidak terdapat pada RC_k . Oleh karena itu, pada bagian terakhir hanya terdapat enam bobot baru, yaitu $8k - 3, 8k - 2, 8k - 1, 8k, 8k + 1$, dan $8k + 2$. Bersama dengan bobot dari bagian-bagian sebelumnya, seluruh bobot sisi tepat membentuk barisan $3, 4, \dots, 8k + 2$.

Karena $|E(RC_k)| = 8k$, himpunan bobot tersebut dapat ditulis sebagai $Wf(RC_k) = \{3, 4, 5, \dots, 8k + 2\} = \{3, 3 + 1, \dots, 3 + (8k - 1)\}$. Jadi f merupakan pelabelan titik $(3, 1)$ sisi anti-ajaib pada RC_k . Terbukti.

Hasil ini juga menjelaskan posisi parameter yang diperoleh. Nilai $d = 1$ merupakan satu-satunya beda yang mungkin berdasarkan batas ukuran graf, sedangkan $a = 3$ merupakan suku awal minimum yang mungkin. Dengan demikian, $(3, 1)$ tidak diklaim sebagai satu-satunya pasangan parameter yang mungkin, tetapi merupakan pasangan dengan suku awal terkecil yang berhasil dikonstruksi secara umum untuk seluruh $k \geq 2$.

Berikut adalah visualisasi pelabelan titik $(3, 1)$ sisi anti-ajaib pada Graf *Ribbon Chain* jika $k \geq 2$.



Gambar 7. Pelabelan titik $(3, 1)$ sisi anti ajaib pada Graf *Ribbon Chain* (RC_k)

Penerapan Pelabelan Titik (a, d) Sisi Anti Ajaib pada Graf *Ribbon Chain*

Sebagai ilustrasi konseptual, Graf *Ribbon Chain* dapat digunakan untuk merepresentasikan topologi jaringan sederhana, dengan setiap titik sebagai perangkat dan setiap sisi sebagai koneksi. Pelabelan titik memberikan identitas numerik pada

perangkat, sedangkan bobot sisi memberikan kode numerik yang diturunkan dari dua endpoint koneksi.

Untuk RC_2 terdapat 10 titik dan 16 sisi. Konstruksi f memberikan $f(B) = 1, f(x_1) = 5, f(x_2) = 9, f(y_1) = 3, f(y_2) = 7$, dan $f(z_j) = 2j$ untuk $1 \leq j \leq 5$. Bobot seluruh 16 sisi kemudian adalah 3,4,5,...,18 tanpa pengulangan. Jika label titik dipandang sebagai identitas perangkat, setiap koneksi memperoleh kode melalui jumlah label kedua perangkat yang terhubung.

Contoh tersebut menunjukkan cara menggunakan sifat anti-ajaib sebagai skema identifikasi numerik pada model jaringan. Namun, penerapan ini bersifat ilustratif dan tidak dimaksudkan untuk menyatakan peningkatan kinerja jaringan, keamanan, atau efisiensi routing. Kajian lanjutan dapat menguji konstruksi ini pada simulasi jaringan dengan mempertimbangkan kebutuhan pengalamatan dan perubahan topologi.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian, Graf Ribbon Chain RC_k dengan $k \geq 2$ memiliki pelabelan titik (3,1) sisi anti-ajaib. Konstruksi $f(B) = 1, f(x_i) = 4i + 1, f(y_i) = 4i - 1$, dan $f(z_j) = 2j$ menghasilkan himpunan bobot sisi $\{3, 4, \dots, 8k + 2\}$. Analisis batas parameter menunjukkan bahwa setiap pelabelan $(a, d) - EAV$ pada RC_k harus memiliki $d = 1$ dan $a \in \{3, 4\}$; karena itu, pasangan (3,1) merupakan pasangan dengan suku awal minimum yang mungkin. Penelitian ini tidak mengklaim keunikan pasangan parameter, karena keberadaan pelabelan (4,1) untuk seluruh $k \geq 2$ belum dikarakterisasi. Sebagai ilustrasi, konstruksi pada RC_2 menunjukkan bagaimana bobot sisi dapat digunakan sebagai identifikasi numerik pada model topologi jaringan. Penelitian selanjutnya dapat mengkaji keberadaan (4,1) - EAV secara umum serta mengembangkan simulasi jaringan yang lebih spesifik.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] M. Bača, Y. Lin, M. Miller, and M. Z. Youssef, "Edge-antimagic graphs," *Discrete Mathematics*, vol. 307, no. 11-12, pp. 1232-1244, 2007. doi:10.1016/j.disc.2005.10.038.
- [2] M. Bača, E. T. Baskoro, M. Miller, J. Ryan, R. Simanjuntak, and K. A. Sugeng, "Survey of edge antimagic labelings of graphs," *Journal of Indonesian Mathematical Society*, vol. 12, no. 1, pp. 113-130, 2006.
- [3] R. Simanjuntak, F. Bertault, and M. Miller, "Two new (a,d)-antimagic graph labelings," in *Proceedings of the 11th Australasian Workshop on Combinatorial Algorithms*, pp. 179-189, 2000.
- [4] F. Daniel and P. N. Taneo, *Teori Graf*. Yogyakarta: Deepublish, 2020.
- [5] R. Munir, *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika, 2003.
- [6] A. Widodo, *Teori Graf*. Malang: Universitas Brawijaya Press, 2016.
- [7] E. N. Prianasari and I. Rosyida, "Nilai ketakteraturan sisi total pada graf rantai heptagon dan graf rantai heptagon dengan dua sisi pendant," *Unnes Journal of Mathematics*, vol. 11, no. 1, pp. 38-43, 2022.

- [8] K. A. A. Jaro, K. Khopipah, and N. Napis, "Matematika diskrit teori graf pada LRT dalam mengatasi kemacetan: Studi literatur," *Pentagon: Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam*, vol. 3, no. 3, pp. 60–71, 2025. doi:10.62383/pentagon.v3i3.726.
- [9] C. Palungan, Pelabelan Jumlah Eksklusif pada Graf Gir. Disertasi, Universitas Hasanuddin, 2023.
- [10] F. D. Anggara, *Studi dan Implementasi Struktur Data Graf*. Bandung: Institut Teknologi Bandung, 2009.