

Dimensi Metrik pada Graf Ubur-ubur

Farhatul Azizah¹, Dea Alvionita Azka^{1,*}

¹ Universitas Sriwijaya, Indonesia

Dikirim: Agustus 2026; Diterima: September 2026;

Dipublikasi: September 2026

Alamat Email Korespondensi: dealvionitazka@fkip.unsri.ac.id

Abstrak

Penelitian ini bertujuan menentukan dimensi metrik graf ubur-ubur, yaitu graf yang dibentuk dari sebuah siklus dan dua lintasan yang ditempelkan pada dua titik siklus yang berdekatan. Graf ubur-ubur yang dikaji, dinotasikan dengan J_n , memiliki siklus C_n dengan $n \geq 3$ dan dua tentakel dengan panjang $L = \lfloor n/2 \rfloor - 1$. Penelitian ini merupakan penelitian matematika teoretis dengan pendekatan deduktif melalui analisis struktur graf dan pembuktian langsung. Hasil penelitian menunjukkan bahwa himpunan yang terdiri atas dua titik ujung tentakel merupakan himpunan pembeda bagi J_n . Representasi metrik titik-titik pada bagian siklus maupun kedua tentakel dapat dituliskan secara eksplisit dan terbukti saling berbeda. Selanjutnya, tidak ada himpunan pembeda yang hanya terdiri atas satu titik, sehingga diperoleh $\dim(J_n) = 2$ untuk setiap $n \geq 3$. Hasil ini menunjukkan bahwa untuk keluarga graf ubur-ubur yang didefinisikan dalam penelitian ini, dimensi metrik tidak berubah ketika orde siklus bertambah. Hasil tersebut memperluas kajian dimensi metrik pada kelas graf unisiklik dengan struktur dua tentakel yang simetris.

Kata Kunci:

Graf, Himpunan Pembeda, Dimensi Metrik, Graf Ubur-ubur.

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika diskrit yang mempelajari struktur yang terdiri atas himpunan titik dan sisi. Kajian graf berkembang tidak hanya pada aspek teoretis, tetapi juga pada berbagai persoalan jaringan, optimasi, transportasi, dan representasi hubungan antarelemen dalam suatu sistem [1],[2]. Salah satu parameter yang digunakan untuk mengkaji struktur jarak dalam graf adalah dimensi metrik. Parameter ini berkaitan dengan kemampuan suatu himpunan titik untuk mengidentifikasi setiap titik lain berdasarkan jaraknya terhadap titik-titik dalam himpunan tersebut.

Untuk graf terhubung G , jika $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ merupakan himpunan titik yang diberi urutan, representasi metrik suatu titik v terhadap W didefinisikan sebagai $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$. Himpunan W disebut himpunan pembeda (resolving set) apabila setiap dua titik berbeda mempunyai representasi metrik yang berbeda. Kardinalitas minimum dari himpunan pembeda disebut dimensi metrik graf G [3] [4]. Konsep tersebut telah digunakan untuk mengkaji berbagai kelas graf, termasuk graf unisiklik dan berbagai keluarga graf yang diperoleh melalui operasi graf [5-10].

Penelitian mengenai dimensi metrik pada graf unisiklik menunjukkan bahwa struktur siklus dan cabang yang melekat pada siklus berperan penting dalam menentukan nilai dimensi metrik [5], [11]. Dalam konteks graf khusus di Indonesia, Azka, Lisaida, dan Susanti memperkenalkan graf n -ubur-ubur sebagai graf yang dibentuk dengan

menambahkan lintasan pada dua titik yang berdekatan pada graf siklus C_n [12]. Penelitian tersebut berfokus pada pelabelan harmonis dan belum membahas dimensi metrik dari keluarga graf tersebut. Oleh karena itu, terdapat ruang kajian untuk menentukan himpunan pembeda dan dimensi metrik pada graf n -ubur-ubur.

Penelitian ini bertujuan menentukan dimensi metrik graf ubur-ubur J_n yang terdiri atas sebuah siklus C_n dan dua tentakel dengan panjang $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$ yang ditempelkan pada dua titik siklus yang berdekatan. Secara khusus, penelitian ini menentukan kandidat basis metrik berupa dua titik ujung tentakel, menghitung representasi metrik setiap kelompok titik terhadap kandidat tersebut, dan membuktikan minimalitas kardinalitasnya. Dengan demikian, penelitian ini memberikan karakterisasi dimensi metrik untuk keluarga graf khusus yang dikaji.

LANDASAN TEORI

Teori Graf

Graf G adalah pasangan terurut $G = (V(G), E(G))$, dengan $V(G)$ merupakan himpunan tak kosong yang elemennya disebut titik (*vertex*) dan $E(G)$ merupakan himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan dua titik berbeda di $V(G)$. Jika $u, v \in V(G)$ dan $uv \in E(G)$, maka u dan v disebut bertetangga [11].

Graf G dikatakan graf terhubung (*connected graph*) jika untuk setiap pasangan titik $u, v \in V(G)$ terdapat suatu lintasan yang menghubungkan u dan v . Sebaliknya, jika terdapat dua titik yang tidak dihubungkan oleh lintasan maka graf G adalah graf tidak terhubung (*disconnect graph*) [12]. Diameter suatu graf G , yang dinotasikan dengan $\text{diam}(G)$ adalah jarak maksimum antara dua titik pada G yaitu $\text{diam}(G) = \max\{d(u, v) | u, v \in V(G)\}$ [13].

Suatu jalan (*walk*) di G adalah suatu barisan berhingga (tak kosong) $W = e_0, v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n$ yang suku-sukunya bergantian antara titik dan sisi. Titik v_0 dan titik v_k berturut-turut disebut titik awal dan titik akhir W . Sedangkan titik-titik $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ disebut titik-titik internal dari W , dan k disebut panjang dari W [14]. Jika semua sisi $e_1, e_2, \dots, e_k$ dalam jalan W berbeda, maka W disebut sebuah jejak (*trail*). Jika semua titik $v_1, v_2, \dots, v_k$ dalam jalan W juga berbeda, maka W disebut sebuah lintasan (*path*). Graf lintasan ialah graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n . Lintasan dari titik u ke titik v dalam graf G adalah urutan titik $u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_k = v$, sedemikian sehingga untuk setiap titik $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$, pasangan $\{v_i, v_{i+1}\}$ merupakan sisi dalam G [15].

Panjang lintasan tersebut adalah k , yaitu banyaknya sisi yang dilewati lintasan [15]. Jika seluruh titik pada lintasan berbeda, maka lintasan tersebut disebut lintasan sederhana [15]. Jarak antara dua titik u dan v dalam G , dilambangkan dengan $d(u, v)$, adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan u dan v . Jika $u = v$, maka $d(u, v) = 0$. Pada graf terhubung, jarak antara dua titik selalu terdefinisi hingga [13].

Siklus (*Cycle*) adalah suatu lintasan dimana titik awalnya sama dengan titik akhir. Siklus dengan panjang n dilambangkan dengan C_n dengan $n \geq 3$. Graf siklus ialah graf yang terdiri dari satu siklus. Pada graf siklus jumlah titiknya minimal 3 [16].

Himpunan Pembeda

Diberikan G graf terhubung dengan $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\} \subseteq V(G)$. Representasi titik $u \in V(G)$ terhadap W didefinisikan sebagai

$$r(u|W) = (d(u, w_1), d(u, w_2), d(u, w_3), \dots, d(u, w_k))$$

Himpunan W disebut himpunan pembeda (*resolving set*) pada G jika untuk setiap $u, v \in V(G)$ dengan $u \neq v$, berlaku $r(u|W) \neq r(v|W)$ [17].

Dimensi Metrik

Himpunan pembeda W dengan kardinalitas minimum disebut basis metrik (*metric basis*) dari G . Dimensi metrik graf G , yang dinotasikan dengan $\dim(G)$ adalah kardinalitas basis metrik, yaitu $\dim(G) = \min\{|W| : W \subseteq V(G), W \text{ merupakan himpunan pembeda}\}$ [18].

Graf Ubur-ubur

Dalam penelitian ini, istilah graf ubur-ubur merujuk secara khusus pada keluarga graf n -ubur-ubur yang diperkenalkan oleh Azka, Lisaida, dan Susanti [19]. Graf ini berbeda dari penggunaan istilah *jellyfish graph* pada beberapa literatur yang merujuk pada keluarga graf lain. Untuk menghindari ambiguitas, seluruh pembahasan berikut menggunakan istilah graf ubur-ubur J_n . Struktur ini menghasilkan bentuk graf yang menyerupai ubur-ubur, yaitu kepala berbentuk lingkaran dan dua tentakel yang menjulur ke bawah.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian matematika teoretis yang menggunakan pendekatan deduktif. Objek penelitian adalah graf ubur-ubur J_n yang dibangun dari graf siklus C_n dan dua lintasan yang ditempelkan pada dua simpul berdekatan pada C_n . Tahapan penelitian meliputi: (1) mendefinisikan graf J_n beserta himpunan titik dan sisinya; (2) menentukan struktur dan panjang masing-masing tentakel; (3) menentukan kandidat himpunan pembeda; (4) menghitung representasi metrik setiap kelompok titik terhadap kandidat himpunan pembeda; (5) memeriksa apakah setiap pasangan titik berbeda mempunyai representasi metrik yang berbeda; dan (6) menentukan kardinalitas minimum himpunan pembeda melalui pembuktian langsung. Dengan demikian, hasil penelitian diperoleh melalui analisis struktur graf dan pembuktian teorema secara deduktif.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi Graf Ubur-Ubur.

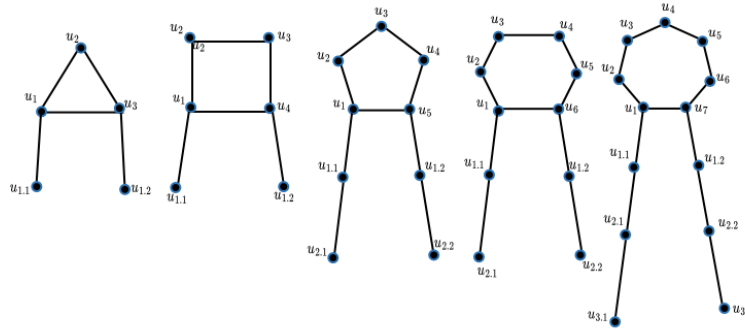
Misalkan $n \geq 3$ dan tetapkan $L = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$. Graf ubur-ubur J_n diperoleh dari graf siklus C_n dengan menempelkan satu salinan graf lintasan P_L pada titik u_1 dan satu salinan P_L pada titik u_n , dengan $u_1 u_n \in E(C_n)$. Titik u_1 dan u_n disebut titik penghubung, sedangkan dua lintasan tersebut masing-masing disebut tentakel kiri dan tentakel kanan. Titik yang tidak terletak pada C_n dan berada paling jauh dari titik penghubung disebut titik ujung tentakel.

$$V(J_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \cup \{u_{1,1}, u_{2,1}, \dots, u_{L,1}\} \cup \{u_{1,2}, u_{2,2}, \dots, u_{L,2}\}.$$

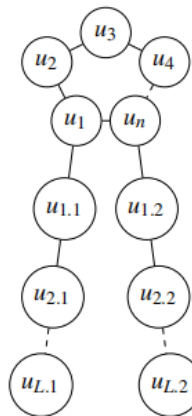
Dengan demikian, $u_1, u_2, \dots, u_n$ merupakan titik pada kepala atau siklus C_n . Titik $u_{j,1}$, $1 \leq j \leq L$, merupakan titik ke- j pada tentakel kiri dan $u_{j,2}$, $1 \leq j \leq L$, merupakan titik ke- j pada tentakel kanan. Dua titik ujung tentakel adalah $u_{L,1}$ dan $u_{L,2}$.

$$S = \{u_{L,1}, u_{L,2}\}.$$

Gambar 1 memperlihatkan beberapa contoh graf ubur-ubur untuk $n = 3, 4, 5, 6, 7$, sedangkan Gambar 2 memperlihatkan notasi umum yang digunakan dalam pembuktian.



Gambar 1. Contoh Graf Ubur-ubur untuk beberapa nilai n



Gambar 2. Graf ubur-ubur

Teorema. Untuk setiap graf ubur ubur J_n dengan $n \geq 3$, berlaku $\dim(J_n) = 2$.

Bukti.

Bukti dilakukan dalam dua tahap. Pertama, ditunjukkan bahwa $S = \{u_{L,1}, u_{L,2}\}$ merupakan himpunan pembeda. Kedua, ditunjukkan bahwa tidak ada himpunan pembeda yang hanya memiliki satu titik.

1. S merupakan himpunan pembeda

Perhatikan terlebih dahulu titik-titik pada kepala J_n , yaitu titik-titik pada C_n . Untuk setiap titik u_i pada C_n berlaku

$$r(u_i|S) = (L + d_{C_n}(u_i, u_1), L + d_{C_n}(u_i, u_n)).$$

Hal ini karena setiap lintasan terpendek dari u_i menuju $u_{L,1}$ harus melalui u_1 dan kemudian menempuh L sisi pada tentakel kiri. Secara analog, lintasan terpendek dari u_i menuju $u_{L,2}$ melalui u_n dan kemudian menempuh L sisi pada tentakel kanan.

Kasus 1: n genap.

Misalkan $n = 2m$. Karena $L = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$, diperoleh $L = m - 1$. Untuk titik-titik pada C_n , representasi metrik terhadap S dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} r(u_1|S) &= (m - 1, m), \\ r(u_i|S) &= (m + i - 2, m + i - 1), \quad 2 \leq i \leq m, \\ r(u_i|S) &= (3m - i, 3m - i - 1), \quad m + 1 \leq i \leq 2m. \end{aligned}$$

Pada kelompok pertama, kedua koordinat bertambah satu secara bersamaan ketika indeks i bertambah. Pada kelompok kedua, kedua koordinat berkurang satu secara bersamaan. Selain itu, koordinat pertama dan kedua pada kedua kelompok berada pada urutan yang berbeda. Dengan demikian, tidak terdapat dua titik berbeda pada C_n yang mempunyai representasi metrik sama.

Kasus 2: n ganjil.

Misalkan $n = 2m + 1$. Karena $L = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$, diperoleh $L = m$. Representasi titik-titik pada C_n adalah

$$\begin{aligned} r(u_1|S) &= (m, m + 1), \\ r(u_i|S) &= (m + i - 1, m + i), \quad 2 \leq i \leq m, \\ r(u_{m+1}|S) &= (2m, 2m), \\ r(u_i|S) &= (3m + 2 - i, 3m + 1 - i), \quad m + 2 \leq i \leq 2m + 1. \end{aligned}$$

Pada kasus ini terdapat satu titik tengah u_{m+1} dengan dua koordinat sama. Titik tersebut tetap unik karena tidak ada titik lain pada C_n yang mempunyai kedua koordinat $2m$. Urutan koordinat pada bagian sebelum dan sesudah titik tengah juga menunjukkan bahwa seluruh titik pada C_n mempunyai representasi metrik yang berbeda.

Selanjutnya, pertimbangkan titik-titik pada kedua tentakel. Untuk titik ke- j pada tentakel kiri, dengan $1 \leq j \leq L$, jarak ke $U_{L,1}$ adalah $L - j$, sedangkan jarak ke $U_{L,2}$ diperoleh dengan melalui u_1 , sisi $u_1 u_n$, dan kemudian tentakel kanan. Oleh karena itu

$$r(u_{j,1}|S) = (L + j, L + j + 1), 1 \leq j \leq L.$$

Dengan cara yang sama, untuk titik ke- j pada tentakel kanan diperoleh

$$r(u_{j,2}|S) = (L + j + 1, L - j), 1 \leq j \leq L.$$

Untuk titik-titik pada satu tentakel, salah satu koordinat berkurang satu dan koordinat lainnya bertambah satu ketika j bertambah, sehingga seluruh representasinya berbeda. Representasi titik pada tentakel kiri dan tentakel kanan juga tidak mungkin sama karena untuk titik tentakel kiri koordinat pertama lebih kecil daripada L , sedangkan untuk titik tentakel kanan koordinat kedua lebih kecil daripada L .

Selain itu, setiap titik pada C_n memiliki kedua koordinat sekurang-kurangnya L , sedangkan titik pada tentakel kiri memiliki koordinat pertama paling besar $L - 1$ dan titik pada tentakel kanan memiliki koordinat kedua paling besar $L - 1$. Oleh karena itu, tidak ada representasi titik tentakel yang sama dengan representasi titik pada C_n . Dengan demikian, semua titik di $V(J_n)$ memiliki representasi metrik yang berbeda terhadap S . Jadi, S merupakan himpunan pembeda bagi J_n dan

$$|S| = 2.$$

Akibatnya, $\dim(J_n) \leq 2$

2. Minimalitas himpunan pembeda

Untuk menunjukkan bahwa dua titik merupakan jumlah minimum, perlu dibuktikan bahwa tidak ada himpunan pembeda berkardinalitas satu. Ambil sembarang titik $w \in V(J_n)$ dan misalkan $W = \{w\}$. Jika w berada pada C_n , dua tetangga w pada C_n mempunyai jarak yang sama, yaitu 1, terhadap w . Karena kedua titik tersebut berbeda, W bukan himpunan pembeda.

Jika $w = u_{j,1}$ berada pada tentakel kiri, titik u_2 dan u_n sama-sama berjarak $j + 1$ dari w melalui u_1 . Jadi

$$d(w, u_2) = d(w, u_n) = j + 1.$$

Jika $w = u_{j,2}$ berada pada tentakel kanan, titik u_1 dan u_{n-1} sama-sama berjarak $j + 1$ dari w melalui u_n , sehingga

$$d(w, u_1) = d(w, u_{n-1}) = j + 1.$$

Dalam semua kemungkinan posisi w , selalu terdapat sedikitnya dua titik berbeda yang mempunyai jarak sama terhadap w . Dengan demikian, W bukan himpunan pembeda. Jadi $\dim(J_n) \geq 2$. Bersama dengan batas atas $\dim(J_n) \geq 2$, diperoleh

$$\dim(J_n) \geq 2.$$

Teorema terbukti.

Hasil pembuktian menunjukkan bahwa dua titik ujung tentakel dapat menjadi basis metrik untuk seluruh keluarga J_n yang didefinisikan dalam penelitian ini. Peran kedua titik tersebut berasal dari posisi keduanya pada dua cabang yang melekat pada titik siklus yang berdekatan. Pada bagian siklus, pasangan jarak terhadap kedua ujung tentakel membentuk pola yang bergerak secara monoton dari satu sisi siklus ke sisi lainnya. Pada tentakel, salah satu koordinat bergerak turun sedangkan koordinat lainnya bergerak naik. Kombinasi kedua pola tersebut menghasilkan representasi yang unik bagi setiap titik.

Hasil ini sejalan dengan prinsip dasar dimensi metrik bahwa suatu basis harus membedakan setiap pasangan titik melalui representasi jarak [3], [4]. Hasil tersebut juga relevan dengan kajian pada graf unisiklik, karena J_n merupakan graf dengan tepat satu siklus dan dua struktur lintasan yang melekat pada siklus. Penelitian mengenai graf unisiklik menunjukkan bahwa struktur cabang merupakan komponen penting dalam analisis dimensi metrik [5], [11]. Pada keluarga J_n yang dikaji di sini, konfigurasi dua tentakel yang simetris membuat dua titik ujung tentakel cukup untuk menghasilkan resolusi penuh.

Dengan demikian, bertambahnya orde siklus tidak mengubah dimensi metrik J_n selama aturan konstruksi graf, yaitu dua tentakel dengan panjang $L = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$ yang ditempelkan pada dua titik siklus berdekatan, tetap dipertahankan. Kesimpulan ini tidak serta-merta berlaku untuk semua graf yang disebut sebagai graf ubur-ubur dalam literatur. Perubahan panjang tentakel, jumlah tentakel, atau pola pelekatan dapat mengubah struktur representasi metrik dan perlu dianalisis secara terpisah.

PENUTUP

Berdasarkan analisis dan pembuktian yang telah dilakukan, diperoleh bahwa dimensi metrik graf ubur-ubur J_n yang dibangun dari siklus C_n dan dua tentakel dengan panjang $L = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$ adalah $\dim(J_n) = 2$, untuk setiap $n \geq 3$.

Himpunan $S = \{U_{L,1}, U_{L,2}\}$, yaitu dua titik ujung tentakel, merupakan basis metrik karena mampu membedakan seluruh titik pada J_n . Batas bawah diperoleh dengan menunjukkan bahwa setiap himpunan yang hanya memiliki satu titik gagal membedakan sedikitnya satu pasangan titik. Dengan demikian, dua titik merupakan kardinalitas minimum himpunan pembeda.

Hasil ini berlaku khusus untuk konstruksi graf yang didefinisikan dalam penelitian ini. Penelitian selanjutnya dapat mengkaji dimensi metrik ketika jumlah tentakel, panjang tentakel, atau posisi titik pelekatan pada siklus diubah.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] K. P. Meena, "An Introduction to Graph Theory and its Applications," *Cent. Asian J. Math. Theory Comput. Sci.*, vol. 02, no. 12, pp. 87–100, 2021.
- [2] A. Majeed and I. Rauf, "Graph Theory : A Comprehensive Survey about Graph Theory Applications in Computer Science and Social Networks," *Inventions*, vol. 5, no. 1, p. 10, 2020, doi: <https://doi.org/10.3390/inventions5010010>.
- [3] A. P. Peranginangin, "Analysis of Graph Theory in Transport Network Optimisation : A Mathematical Approach and Its Applications," *J. Educ.*, vol. 10, no. 4, pp. 1431–1439, 2025, doi: <https://doi.org/10.31949/educatio.v10i4.10219>.
- [4] M. Korivand, K. Khashyarmanesh, and M. Tavakoli, "Metric Dimension Threshold of Graphs," *Hindawi*, vol. 2022, p. 6, 2022, doi: [10.1155/2022/1838719](https://doi.org/10.1155/2022/1838719).
- [5] M. A. Jothi and K. Sankar, "On the metric dimension of bipartite graphs," *AKCE Int. J. Graphs Comb.*, vol. 20, no. 3, pp. 287–290, 2023, doi: [10.1080/09728600.2023.2223248](https://doi.org/10.1080/09728600.2023.2223248).
- [6] D. A. Azka, D. Junia, E. Palupi, and A. Sutjijana, "Dimensi Metrik Lokal dari Hasil Perkalian Kuat Graf Bintang," *J. Fourier*, vol. 11, no. 2, pp. 49–58, 2022, doi: [10.14421/fourier.2022.112.49-58](https://doi.org/10.14421/fourier.2022.112.49-58).
- [7] E. D. Wulancar and T. A. Kusmayadi, "Dimensi Metrik Lokal pada Graf Musical dan Graf Stacked Prism," *J. Math. Math. Educ. Vol.8*, vol. 8, no. 1, pp. 1–8, 2018.
- [8] Amrullah, H. S, K. Sarjana, and L. Hayati, "Dimensi Metrik Graf Kincir $K_1 + nK_3$," *Mandalika Math. Educ. J.*, vol. 6, no. 2, pp. 813–821, 2024, doi: [http://dx.doi.org/10.29303/jm.v6i2.8269](https://doi.org/10.29303/jm.v6i2.8269).
- [9] S. E. R and B. Rahadjeng, "Dimensi Metrik pada Graf Lintasan, Graf Komplit, Graf Sikel, Graf Bintang, dan Graf Bipartif," *MATHunesa J. Ilm. Mat.*, vol. 3, 2014.
- [10] N. A. Sutardji, L. Susilowati, and U. D. Purwati, "Dimensi Metrik Kuat Lokal Graf Hasil

Operasi Kali Kartesian,” *Contemp. Math. Appl.*, vol. 1, no. 2, pp. 64–73, 2019.

- [11] M. Natalina, B. Silitonga, and K. A. Sugeng, “Local Antimagic Vertex Coloring of Gear Graph,” *Proc. Int. Conf. Math. Math. Educ.*, vol. 96, no. Figure 1, pp. 71–75, 2022, doi: <https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.015>.
- [12] F. C. Puri, Wamiliana, M. Usman, Amanto, M. Ansori, and Y. Antoni, “The Formula to Count The Number of Vertices Labeled Order Six Connected Graphs with Maximum Thirty Edges without Loops,” *J. Phys. Conf. Ser.*, 2021, doi: 10.1088/1742-6596/1751/1/012023.
- [13] M. K. A. Kaabar, “Radio and Radial Radio Numbers of Certain Sunflower Extended Graphs,” *Hindawi*, p. 9, 2022, doi: 10.1155/2022/9229409.
- [14] A. Czygrinow, M. Hanćkowiak, A. Rumiński, and M. Witkowski, “Distributed approximation for f-matching,” *Theor. Comput. Sci.*, vol. 1014, p. 114760, 2024, doi: <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2024.114760>.
- [15] J. Prieto-cubides and H. R. Gylterud, “On planarity of graphs in homotopy type theory,” *Math. Struct. Comput. Sci.*, vol. 34, pp. 281–321, 2024, doi: 10.1017/S0960129524000100.
- [16] V. H. Fernandes and T. Paulista, “On the monoid of partial isometries of a cycle graph,” *Turkish J. Math.*, vol. 47, no. 6, pp. 1746–1760, 2023, doi: 10.55730/1300-0098.3460.
- [17] L. Yulianti, D. Welyyanti, Yanita, M. R. Fajri, and S. W. Saputro, “On the metric dimension of Buckminster-fullerene-net Graph,” *Indones. J. Comb.*, vol. 7, no. December 2022, pp. 63–72, 2023, doi: <http://dx.doi.org/10.19184/ijc.2023.7.2.2>.
- [18] S. Almotairi, O. Alharbi, Z. Alzaid, B. Almutairi, and B. Mohamed, “The Secure Metric Dimension of the Globe Graph and the Flag Graph,” *Hindawi*, vol. 2024, p. 6, 2024, doi: 10.1155/2024/3084976.
- [19] D. A. Azka, R. Lisaida, and Y. Susanti, “Pelabelan Harmonis pada Graf Kincir Tiga dan Graf n-Ubur-Ubur,” *Semin. Mat. dan Pendidik. Mat. UNY*, pp. 15–20, 2017.