

Representasi Integral Fraksional Fungsi Secan Hiperbolik dan Cosecan Hiperbolik

Syifaul Janan^{1,*}, Didi Harlianto¹, Andro Kurniawan²

¹ Program Studi Teknik Mesin, Universitas Pembangunan Nasional Veteran Jakarta

² Program Studi Matematika, Institut Teknologi Batam

Dikirim: Januari 2026; Diterima: Februari 2026; Dipublikasi: Maret 2026

Alamat Email Korespondensi: syifaul.janan@upnvj.ac.id

Abstrak

Penelitian ini mengkaji representasi integral fraksional Riemann–Liouville pada fungsi secan hiperbolik dan cosecan hiperbolik menggunakan pendekatan deret Maclaurin. Kebaruan penelitian ini terletak pada perolehan bentuk eksplisit integral fraksional kedua fungsi tersebut serta analisis peran singularitas terhadap validitas representasi analitis. Hasil analisis menunjukkan bahwa fungsi secan hiperbolik dapat direpresentasikan secara analitis melalui deret pangkat yang konvergen pada domain $|t| < \pi/2$ sehingga integral fraksionalnya konsisten dengan integral klasik. Sebaliknya, fungsi cosecan hiperbolik memiliki singularitas di titik asal yang membatasi representasi analitisnya hanya pada suku non-singular. Implikasi matematis dari hasil ini menunjukkan adanya keterbatasan pendekatan deret untuk fungsi bersingular. Simulasi numerik menggunakan Matlab mendukung hasil teoritis dan memperlihatkan kesesuaian perilaku integral fraksional pada kedua fungsi tersebut.

Kata Kunci:

deret Maclaurin, fungsi cosecan hiperbolik, fungsi secan hiperbolik, integral fraksional, singularitas

PENDAHULUAN

Integral merupakan konsep fundamental dalam matematika dengan aplikasi yang luas, meliputi perhitungan luas, volume, dan panjang busur, serta penerapan dalam fisika untuk analisis gerak dan energi, teknik untuk perhitungan tegangan dan deformasi material, serta ekonomi untuk pemodelan sistem keuangan [14]. Dalam praktiknya, integral klasik dengan orde bilangan bulat sering kali tidak cukup untuk menggambarkan sistem yang memiliki sifat memori atau efek non-lokal, seperti dalam pemodelan difusi anomali, viskoelastisitas, dan sistem dinamik kompleks [11]. Keterbatasan inilah yang mendorong berkembangnya konsep integral fraksional sebagai perluasan alami dari kalkulus konvensional.

Kajian mengenai kalkulus fraksional telah berkembang pesat sejak formulasi awal oleh Riemann dan Liouville pada abad ke-19 [10]. Definisi integral fraksional Riemann–Liouville menjadi yang paling banyak digunakan karena konsistensinya dengan integral klasik serta fleksibilitasnya dalam menangani orde non-integer integer [9, 12]. Dalam konteks fungsi analitik, integral fraksional telah dikaji pada berbagai kelas fungsi hiperbolik. Janan [5, 6] mengkaji integral fraksional pada fungsi sinus hiperbolik dan cosinus hiperbolik dengan pendekatan ekspansi deret Maclaurin, menunjukkan bahwa representasi integral fraksional dapat dinyatakan sebagai deret konvergen dengan perilaku limit yang konsisten dengan integral klasik.

Namun, tidak semua fungsi hiperbolik memiliki representasi analitik yang sederhana. Penelitian Janan dan Kurniawan [7] terhadap fungsi tangen hiperbolik dan cotangen hiperbolik menunjukkan bahwa kedua fungsi tersebut tidak dapat dikembangkan secara langsung ke dalam deret Maclaurin karena berbentuk rasio dari fungsi hiperbolik dasar. Hal ini menunjukkan adanya keterbatasan dalam pendekatan analitik yang masih terbuka untuk dikaji lebih lanjut, khususnya pada fungsi-fungsi hiperbolik resiprokal lainnya.

Penelitian ini berfokus pada kajian representasi integral fraksional Riemann–Liouville dari fungsi secan hiperbolik ($\operatorname{sech} t$) dan cosecan hiperbolik ($\operatorname{csch} t$). Pemilihan kedua fungsi ini didasarkan pada beberapa pertimbangan matematis, yaitu keduanya merupakan fungsi resiprokal dari cosinus hiperbolik dan sinus hiperbolik yang telah banyak dikaji sebelumnya [5, 6], sehingga dapat melengkapi rangkaian penelitian terkait fungsi hiperbolik dasar. Selain itu, fungsi secan hiperbolik memiliki karakteristik analitis sebagai fungsi genap yang tidak memiliki singularitas di titik asal, sedangkan fungsi cosecan hiperbolik memiliki singularitas berupa kutub sederhana di $t = 0$, yang menimbulkan tantangan tersendiri dalam representasi analitis [1]. Kedua fungsi tersebut banyak digunakan dalam berbagai aplikasi fisika matematis, termasuk solusi persamaan diferensial parsial dan pemodelan fenomena dispersif.

Berdasarkan celah penelitian yang telah diidentifikasi, rumusan masalah dalam penelitian ini meliputi bagaimana representasi integral fraksional Riemann–Liouville dari fungsi secan hiperbolik dalam bentuk deret tak hingga, bagaimana pengaruh singularitas pada fungsi cosecan hiperbolik terhadap validitas representasi integral fraksionalnya, dan bagaimana perilaku integral fraksional kedua fungsi tersebut pada rentang orde $0 < \alpha \leq 1$. Pembatasan orde fraksional pada interval tersebut dipilih dengan pertimbangan bahwa interval ini mencakup transisi dari orde nol (identitas) menuju integral klasik ($\alpha = 1$) yang penting untuk memahami kontinuitas operator integral fraksional dan dalam praktik, orde fraksional pada rentang tersebut paling sering dijumpai dalam berbagai aplikasi fisika dan teknik, seperti pemodelan difusi sub-difusif dan sistem viskoelastik [9].

Penelitian ini bertujuan untuk memperoleh representasi integral fraksional secara analitis melalui pengembangan deret Maclaurin pada rentang orde $0 < \alpha \leq 1$. Untuk mendukung analisis teoretis, dilakukan simulasi numerik dan visualisasi grafik menggunakan MATLAB [3]. Kebaruan penelitian ini terletak pada penyediaan formula eksplisit untuk integral fraksional fungsi secan dan cosecan hiperbolik yang belum banyak tersedia dalam literatur, serta pada analisis sistematis mengenai peran singularitas dalam membatasi validitas pendekatan deret.

LANDASAN TEORI

Pada bagian ini disajikan beberapa definisi dan teorema yang menjadi dasar teoritis dalam analisis integral fraksional fungsi secan hiperbolik dan cosecan hiperbolik.

Definisi 1. [2] Fungsi gamma, dilambangkan dengan $\Gamma(v)$, didefinisikan sebagai:

$$\Gamma(v) = \int_0^{\infty} t^{v-1} e^{-t} dt, \quad v > 0 \quad (1)$$

Fungsi gamma memenuhi sifat $\Gamma(v + 1) = v!$ untuk setiap bilangan bulat positif v .

Definisi 2. [9] Integral fraksional Riemann–Liouville berorde $\alpha > 0$ dari suatu fungsi $f(x)$ didefinisikan sebagai:

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \alpha > 0 \quad (2)$$

Teorema 3. [13] *Jika fungsi $f(x)$ memiliki turunan hingga orde tak hingga di sekitar $x = 0$, maka fungsi tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk deret Maclaurin sebagai:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad (3)$$

dengan $f^{(n)}$ adalah turunan ke- n dari f dan $n!$ adalah faktorial n .

Teorema 4. [12] *Jika $f(x) = x^n$, dengan $n \geq 0$, maka integral fraksional Riemann-Liouville fungsi pangkat diberikan oleh:*

$$I^\alpha x^n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)} x^{\alpha+n} \quad (4)$$

Berdasarkan definisi dan teorema di atas, integral fraksional Riemann-Liouville bersifat linear dan dapat diterapkan pada setiap suku dalam ekspansi deret Maclaurin. Oleh karena itu, dalam penelitian ini fungsi secan hiperbolik dan cosecan hiperbolik terlebih dahulu direpresentasikan dalam bentuk deret pangkat. Selanjutnya, integral fraksional dihitung dengan menerapkan Teorema 4 pada masing-masing suku deret, sehingga diperoleh representasi integral fraksional dalam bentuk jumlahan tak hingga yang melibatkan fungsi gamma.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini disajikan representasi integral fraksional Riemann-Liouville dari fungsi secan hiperbolik dan cosecan hiperbolik melalui pendekatan ekspansi deret Maclaurin. Analisis dilakukan secara analitis untuk memperoleh bentuk eksplisit dari integral fraksional, diikuti dengan simulasi numerik dan visualisasi grafik menggunakan MATLAB untuk memvalidasi hasil teoritis.

a. Integral Fraksional Fungsi Secan Hiperbolik

Fungsi secan hiperbolik didefinisikan sebagai kebalikan dari fungsi cosinus hiperbolik, yaitu:

$$\operatorname{sech} t = \frac{1}{\cosh t} \quad (5)$$

Untuk memperoleh representasi integral fraksional, fungsi secan hiperbolik terlebih dahulu diekspresikan dalam bentuk deret Maclaurin. Mengingat bahwa cosinus hiperbolik memiliki ekspansi [14]:

$$\cosh t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad (6)$$

maka fungsi secan hiperbolik dapat ditulis sebagai invers dari deret (6). Pembagian deret ini memerlukan teknik inversi deret yang dilakukan secara simbolik menggunakan *software* Matlab. Ekspansi deret Maclaurin untuk fungsi secan hiperbolik adalah:

$$\operatorname{sech} t = 1 - \frac{1}{2} t^2 + \frac{5}{24} t^4 - \frac{61}{720} t^6 + \frac{277}{8064} t^8 - \dots \quad (7)$$

Eksansi ini konvergen untuk $|t| < \frac{\pi}{2}$, yang merupakan radius konvergensi dari fungsi secan hiperbolik. Dengan menerapkan persamaan (2) untuk integral fraksional Riemann-Liouville, diperoleh:

$$I^\alpha \operatorname{sech} t = I^\alpha \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{24}t^4 - \frac{61}{720}t^6 + \frac{277}{8064}t^8 - \dots \right) \quad (8)$$

Berdasarkan sifat linearitas integral fraksional, operator I^α dapat diterapkan pada setiap suku secara terpisah. Dengan menggunakan persamaan (4), yaitu rumus integral fraksional untuk fungsi pangkat, setiap suku dapat dihitung sehingga diperoleh:

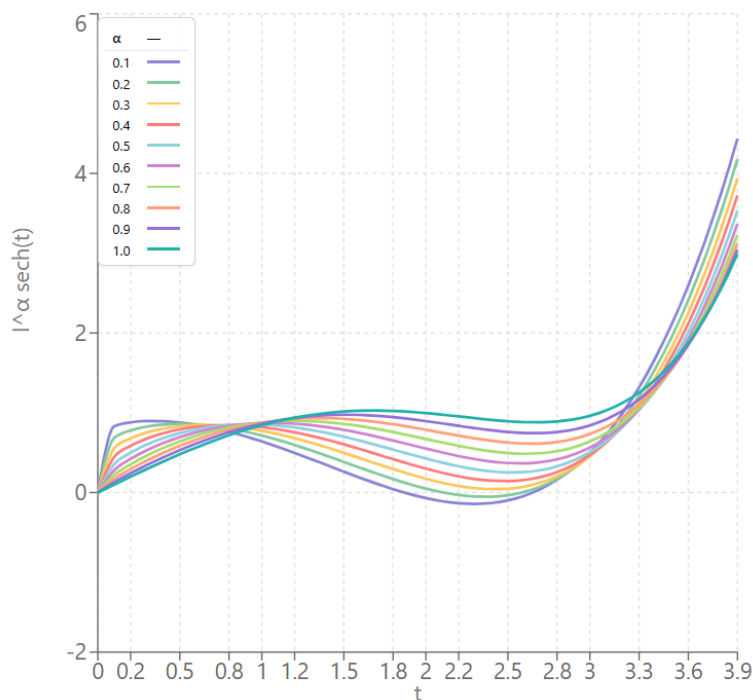
$$I^\alpha \operatorname{sech} t = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha - \frac{1}{2} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\alpha+3)} t^{\alpha+2} + \frac{5}{24} \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(\alpha+5)} t^{\alpha+4} - \frac{61}{720} \frac{\Gamma(7)}{\Gamma(\alpha+7)} t^{\alpha+6} + \frac{277}{8064} \frac{\Gamma(9)}{\Gamma(\alpha+9)} t^{\alpha+8} - \dots \quad (9)$$

Menggunakan sifat fungsi gamma $\Gamma(n) = (n-1)!$ untuk bilangan bulat positif n , persamaan (9) dapat disederhanakan menjadi:

$$I^\alpha \operatorname{sech} t = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} + \frac{5}{4} \frac{t^{\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+5)} - \frac{61}{360} \frac{t^{\alpha+6}}{\Gamma(\alpha+7)} + \frac{277}{4032} \frac{t^{\alpha+8}}{\Gamma(\alpha+9)} - \dots \quad (10)$$

Persamaan (10) menunjukkan bahwa integral fraksional dari fungsi secan hiperbolik dapat dinyatakan sebagai deret tak hingga yang melibatkan fungsi gamma. Keberadaan $\Gamma(\alpha+n)$ pada penyebut memastikan konvergensi deret untuk nilai $\alpha > 0$ dan t dalam radius konvergensi. Secara khusus, ketika $\alpha = 1$, representasi ini konvergen ke integral klasik dari fungsi secan hiperbolik, yang konsisten dengan hasil yang diharapkan.

Untuk memvalidasi hasil analitis, dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan Matlab. Gambar 1 menunjukkan grafik integral fraksional $I^\alpha \operatorname{sech} t$ untuk orde $0 < \alpha \leq 1$ pada interval $0 < t < 4$.



Gambar 1. Grafik Integral Fraksional dari $f(t) = I^\alpha \operatorname{sech} t$

Dari visualisasi terlihat bahwa perilaku integral fraksional bersifat kontinu terhadap perubahan orde α dan kurva untuk $\alpha = 1$ merepresentasikan integral klasik. Hasil ini mengonfirmasi bahwa pendekatan deret Maclaurin memberikan aproksimasi yang baik untuk integral fraksional fungsi secan hiperbolik pada domain yang ditinjau.

b. Integral Fraksional Fungsi Cosecan Hiperbolik

Fungsi cosecan hiperbolik didefinisikan sebagai kebalikan dari fungsi sinus hiperbolik:

$$\operatorname{csch} t = \frac{1}{\sinh t} \quad (11)$$

Berbeda dengan fungsi secan hiperbolik, fungsi cosecan hiperbolik memiliki singularitas kutub sederhana di $t = 0$ karena $\sinh(0) = 0$. Hal ini menyebabkan ekspansi deret Maclaurin memuat suku dengan pangkat negatif. Ekspansi deret dari sinus hiperbolik adalah [14]:

$$\sinh t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (12)$$

Dengan melakukan inversi deret menggunakan Matlab, diperoleh ekspansi Laurent (perluasan deret Taylor yang mengizinkan pangkat negatif) untuk fungsi cosecan hiperbolik [4]:

$$\operatorname{csch} t = \frac{1}{t} - \frac{1}{6}t + \frac{7}{360}t^3 - \frac{31}{15120}t^5 + \frac{127}{604800}t^7 - \dots \quad (13)$$

Keberadaan suku $\frac{1}{t}$ merupakan karakteristik intrinsik dari fungsi cosecan hiperbolik yang mencerminkan perilaku asimptotik $\operatorname{csch} t \approx \frac{1}{t}$ ketika $t \rightarrow 0^+$. Suku singular ini menimbulkan tantangan khusus dalam perhitungan integral fraksional, karena integral fraksional Riemann-Liouville untuk fungsi dengan pangkat negatif $I^\alpha t^{-1}$ tidak terdefinisi menurut persamaan (2). Oleh karena itu, integral fraksional dari fungsi cosecan hiperbolik hanya dapat dihitung dari suku-suku dengan pangkat non-negatif dalam ekspansi deretnya.

Tidak menyertakan suku berpangkat negatif menunjukkan bahwa representasi integral fraksional yang diperoleh hanya bersifat sebagai aproksimasi parsial. Pendekatan ini belum sepenuhnya menangkap perilaku singular fungsi di sekitar $t = 0$. Oleh karena itu, hasil yang diperoleh hanya valid untuk nilai t yang tidak terlalu dekat dengan nol, sementara tingkat keakuratannya akan menurun seiring t mendekati titik singularitas. Dengan demikian:

$$I^\alpha \operatorname{csch} t \approx I^\alpha \left(-\frac{1}{6}t + \frac{7}{360}t^3 - \frac{31}{15120}t^5 + \frac{127}{604800}t^7 - \dots \right) \quad (14)$$

Penerapan operator integral fraksional pada setiap suku menggunakan persamaan (4) memberikan:

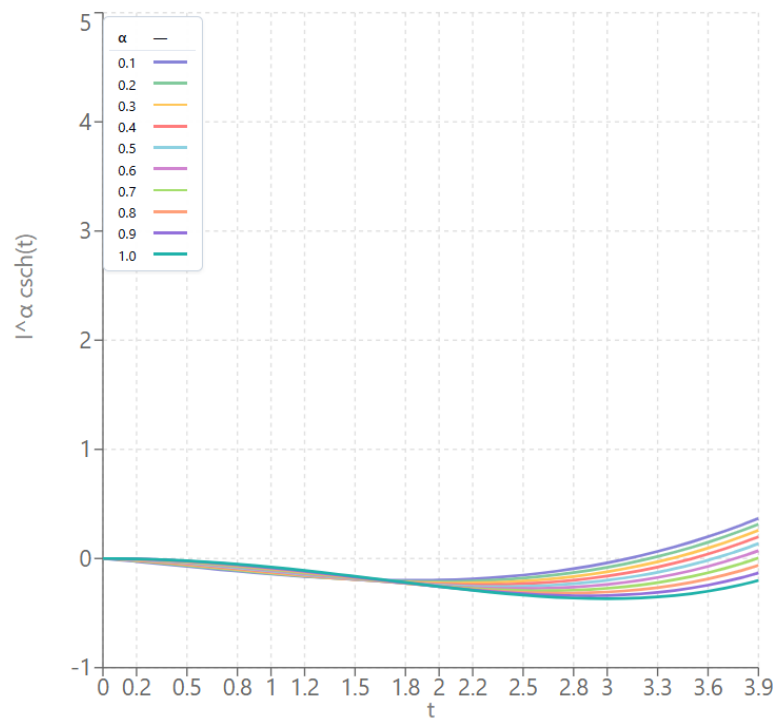
$$I^\alpha \operatorname{csch} t \approx -\frac{1}{6}I^\alpha t + \frac{7}{360}I^\alpha t^3 - \frac{31}{15120}I^\alpha t^5 + \frac{127}{604800}I^\alpha t^7 - \dots \quad (15)$$

Setelah penyederhanaan menggunakan sifat fungsi gamma, persamaan (15) menjadi:

$$I^\alpha \operatorname{csch} t \approx -\frac{1}{6} \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{7}{60} \frac{t^{\alpha+3}}{\Gamma(\alpha+4)} - \frac{31}{2520} \frac{t^{\alpha+5}}{\Gamma(\alpha+6)} + \frac{127}{75600} \frac{t^{\alpha+7}}{\Gamma(\alpha+8)} - \dots \quad (16)$$

Persamaan (16) valid untuk $t > 0$ dan tidak mencakup kontribusi dari suku singular $\frac{1}{t}$. Hal ini menunjukkan keterbatasan pendekatan analitis melalui ekspansi deret Maclaurin untuk fungsi yang memiliki singularitas, sebagaimana telah diidentifikasi dalam konteks fungsi tangen dan cotangen hiperbolik [8].

Simulasi numerik dilakukan dengan menghitung nilai integral fraksional menggunakan aproksimasi deret hingga beberapa suku pertama. Gambar 2 menampilkan grafik integral fraksional $I^\alpha \operatorname{csch} t$ untuk orde $0 < \alpha \leq 1$ pada interval $0 < t < 4$. Batas bawah $t = 0.1$ dipilih untuk menghindari singularitas di $t = 0$.



Gambar 2. Grafik Integral Fraksional dari $f(t) = I^\alpha \operatorname{csch} t$

Gambar 2 menunjukkan bahwa meskipun terdapat singularitas di titik asal, representasi integral fraksional melalui suku-suku non-singular masih memberikan aproksimasi yang berguna untuk t yang tidak terlalu dekat dengan nol. Perilaku kurva untuk berbagai nilai α menunjukkan pola yang konsisten dengan teori, di mana kurva untuk $\alpha = 1$ merepresentasikan integral klasik.

Perbedaan mendasar antara fungsi secan hiperbolik dan cosecan hiperbolik dalam konteks integral fraksional terletak pada keberadaan singularitas. Fungsi secan hiperbolik memiliki representasi yang sepenuhnya analitis melalui deret pangkat biasa, sedangkan fungsi cosecan hiperbolik memerlukan penanganan khusus karena keberadaan suku singular, yang membatasi domain validitas representasi analitisnya. Temuan ini sejalan dengan observasi pada fungsi tangen dan cotangen hiperbolik yang

juga menunjukkan keterbatasan serupa dalam representasi analitis integral fraksionalnya.

PENUTUP

Penelitian ini berhasil memperoleh representasi analitis integral fraksional Riemann–Liouville untuk fungsi secan hiperbolik dan cosecan hiperbolik. Kontribusi utama penelitian ini meliputi: (1) perumusan formula eksplisit integral fraksional fungsi secan hiperbolik dalam bentuk deret konvergen pada $|t| < \pi/2$ yang konsisten dengan integral klasik ketika $\alpha \rightarrow 1$; (2) identifikasi pengaruh singularitas terhadap representasi integral fraksional fungsi cosecan hiperbolik, di mana suku singular $1/t$ tidak dapat ditangani secara analitis menggunakan definisi Riemann–Liouville standar; serta (3) validasi numerik menggunakan Matlab yang mengonfirmasi konsistensi teoretis pada rentang orde $0 < \alpha \leq 1$.

Temuan penelitian menunjukkan bahwa pendekatan deret Maclaurin efektif untuk fungsi tanpa singularitas, seperti secan hiperbolik, namun memiliki keterbatasan mendasar pada fungsi dengan singularitas kutub, seperti cosecan hiperbolik. Keterbatasan ini membuka peluang penelitian lanjutan, antara lain: (1) pengembangan metode alternatif untuk menangani singularitas dalam integral fraksional, seperti regularisasi atau pendekatan distribusi; (2) eksplorasi penerapan representasi ini dalam pemodelan fenomena fisika yang melibatkan efek memori; serta (3) perluasan kajian pada fungsi hiperbolik kompleks dan fungsi khusus lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Abramowitz, M., & Stegun, I. A. (1972). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. national bureau of standards applied mathematics series 55. tenth printing.
- [2] Artin, E. (2015). *The gamma function*. Courier Dover Publications.
- [3] Higham, D. J., & Higham, N. J. (2016). *MATLAB guide*. SIAM.
- [4] Isida, M. (1973). Method of Laurent series expansion for internal crack problems. In *Methods of analysis and solutions of crack problems: Recent developments in fracture mechanics Theory and methods of solving crack problems* (pp. 56–130). Springer.
- [5] Janan, S. (2025). INTEGRAL FRAKSIONAL DARI FUNGSI HIPERBOLIK. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 13(2), 37–42.
- [6] Janan, S., & Janan, T. (2024). Fractional Derivative of Hyperbolic Function. *Jurnal Matematika, Statistika Dan Komputasi*, 21(1), 267–284.
- [7] Janan, S., & Kurniawan, A. (2026). ANALISIS INTEGRAL FRAKSIONAL FUNGSI HIPERBOLIK: KASUS TANGEN DAN COTANGEN: Fractional Integral Analysis of Hyperbolic Function: The Case of Tangent and Cotangent. *Al-Aqlu: Jurnal Matematika, Teknik Dan Sains*, 4(1), 63–68.
- [8] Johansyah, M. D., Nahar, J., Supriatna, A. K., & Supian, S. (2017). Kajian dasar integral dan turunan fraksional riemann-liouville. *Prosiding Industrial Research Workshop and National Seminar*, 8, 204–209.
- [9] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations* (Vol. 204). elsevier.
- [10] Miller, K. S., & Ross, B. (1993). An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. (No Title).
- [11] Oldham, K., & Spanier, J. (1974). *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order* (Vol. 111). Elsevier.

- [12] Podlubny, I., Dorcak, L., & Kostial, I. (1999). On fractional derivatives, fractional-order dynamic system and PID-controllers. *Proc. of the 36th 1997 IEEE Conference on Decision and Control*, 4985–5990.
- [13] Stewart, J., Clegg, D., & Watson, S. (2021). *Calculus: early transcendentals*. Cengage.
- [14] Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., Heil, C., & Behn, A. (2014). *Thomas' calculus: early transcendentals* (Vol. 15). Pearson Boston.