

Indeks Harmonik, Hyper-Wiener, Dan Randic Dari Graf Pangkat Pada Grup Dihedral

Hanna Syafitri¹, I Gede Adhitya Wisnu Wardhana¹, Abdurahim^{1,*}, Muhammad Rijal Alfian¹, Bulqis Nebulla Syechah¹

¹Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Mataram

Dikirim: April 2025;

Diterima: September 2025;

Dipublikasi: September 2025

Alamat Email Korespondensi: abdurahim@staff.unram.ac.id

Abstrak

Grup G disebut Grup Dihedral dengan order $2n$, dinotasikan D_{2n} , untuk bilangan asli n yang lebih besar dari 3 merupakan grup yang dibangun oleh dua element berbeda yaitu a dan b . Graf Pangkat dari grup dihedral D_{2n} adalah graf yang semua simpulnya merupakan semua element dari D_{2n} . Lebih jauh, dua simpul berbeda, a dan b , dikatakan bertetangga jika dan hanya jika $a^x = b$ atau $b^y = a$ dengan x dan y bilangan bulat positif. Pada artikel ini akan dikaji beberapa indeks topologi dari graf pangkat untuk grup dihedral, yaitu indeks Randic, Harmonik, dan Hyper-Wiener. Hasil penelitian ini berupa rumus umum dari indeks topologi dari graf pangkat grup dihedral.

Kata Kunci:

grup dihedral, graf pangkat, Randic, Harmonik, Hyper-Wiener

PENDAHULUAN

Teori Graf adalah salah satu konsep matematika yang saat ini sedang mengalami pertumbuhan yang cukup pesat. Teori graf, diperkenalkan pada tahun 1736 oleh matematikawan Swiss bernama Leonard Euler dalam upaya untuk menyelesaikan permasalahan tentang jembatan Konigsberg [1]. Pengaplikasian graf sudah banyak digunakan dalam berbagai konteks, misalnya dalam bidang kimia. Dalam bidang kimia, konsep teori graf digunakan untuk menggambarkan struktur molekul, dengan menginisialisasikan himpunan simpul sebagai atomnya dan himpunan sisi sebagai ikatan antara atom-atom tersebut.

Teori graf juga sering diterapkan dalam bidang matematika. Beberapa jenis graf yang sering digunakan meliputi graf pangkat, graf irisan, graf koprima, graf non-koprima, dan berbagai jenis graf lainnya. Graf-graf ini sering digunakan untuk merepresentasikan grup, sehingga dalam penelitian teori graf sering dikombinasikan dengan teori grup. Salah satu jenis grup yang menarik untuk dibahas bentuk representasinya adalah grup dihedral. Grup dihedral D_{2n} merupakan grup simetri dari poligon beraturan yang terdiri dari unsur rotasi dan unsur refleksi [2]. Berbagai jenis graf telah dihasilkan sebagai representasi dari grup, salah satunya adalah graf pangkat.

Penelitian tentang representasi graf pada suatu grup telah banyak dilakukan. Beberapa diantaranya yaitu pada penelitian oleh [3] yang meneliti tentang representasi dari graf pangkat pada grup bilangan bulat modulo yang berorde prima, graf prima

koprime dari grup bilangan bulat modulo [4], [5]. Selanjutnya penelitian lain yang dilakukan oleh [6] pada penelitiannya tentang graf irisan dari grup dihedral D_{2n} dan *numerical invariants*-nya. Penelitian serupa yang membahas grup dihedral D_{2n} telah dilakukan oleh [7] terkait dengan jenis graf yang dibentuk oleh graf pangkat dari grup dihedral D_{2n} serta menentukan derajat, radius, dan diameter graf pangkat dari grup dihedral D_{2n} .

Lebih lanjut, dalam ilmu matematika penerapan teori graf digunakan untuk menentukan indeks topologi. Indeks topologi adalah metrik yang digunakan untuk mengukur karakteristik graf seperti jarak, kerapatan, atau sifat-sifat khusus lainnya [8]. Beberapa indeks topologi yang dikenal meliputi indeks Harmonik[9], indeks Randic[10], dan indeks Hyper-Wiener[11]. Penelitian mengenai indeks topologi telah dilakukan oleh [8] tentang indeks Hyper-Wiener dan indeks Padmakar-Ivan dari graf koprime pada grup dihedral. Penelitian lainnya tentang beberapa indeks topologi dari graf pangkat pada grup dihedral yaitu oleh [12] yang membahas indeks Zagreb Pertama, index Wiener, dan indeks Gutman dari graf pangkat pada grup dihedral. Indeks topologi serupa juga telah dikaji pada graf koprime untuk grup dihedral dengan order pangkat prima [13].

Berdasarkan uraian di atas, indeks topologi dari suatu graf pada grup merupakan pembahasan yang menarik untuk dikaji. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk melakukan penelitian tentang indeks topologi dari graf pangkat pada grup dihedral. Adapun indeks topologi yang digunakan yaitu indeks Harmonik, Hyper-Wiener, dan Randic dari graf pangkat pada grup dihedral D_{2n} .

LANDASAN TEORI

Grup G disebut Grup Dihedral dengan order $2n$ untuk bilangan asli $n \geq 3$ merupakan grup yang dibangun oleh dua element berbeda yaitu a dan b . Lebih jauh, grup G dinotasikan sebagai

$$G = \langle a, b \mid a^n = e, b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1} \rangle.$$

Selanjutnya, grup dihedral dinotasikan D_{2n} . Anggota grup D_{2n} dapat dituliskan sebagai berikut

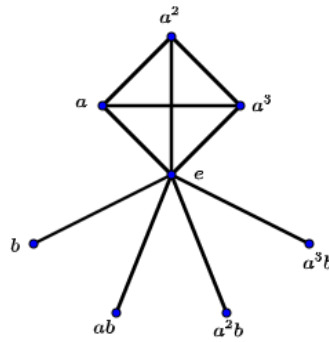
$$D_{2n} = \{e, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, a^3b, \dots, a^{n-1}b\}.$$

Graf Pangkat dari grup dihedral D_{2n} adalah graf yang semua simpulnya merupakan semua element dari D_{2n} . Dua simpul berbeda, a dan b , dikatakan bertetangga jika dan hanya jika $a^x = b$ atau $b^y = a$ dengan x dan y bilangan bulat positif [14].

Contoh 2.1 Misalkan diberikan grup dihedral D_{2n} dengan $n = 2^2 = 4$ yaitu $D_{2 \cdot 2^2} = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$. Pangkat dari masing-masing elemen di $D_{2 \cdot 2^2}$ disajikan sebagai berikut.

Pangkat	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
1	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
2	e	a^2	e	a^2	e	e	e	e
3	e	a^3	a^2	a	b	ab	a^2b	a^3b
4	e	e	e	e	e	e	e	e

Oleh karena itu, diperoleh graf $D_{2 \cdot 2^2}$

Gambar 1. Graf Lengkap pada Grup Dihedral $D_{2.2^2}$

Indeks harmonik merupakan salah satu ukuran dalam teori graf yang digunakan untuk menggambarkan sifat keterhubungan antar simpul berdasarkan derajatnya. Indeks ini didefinisikan sebagai jumlah kontribusi dari setiap sisi, yang nilainya dipengaruhi oleh derajat simpul-simpul yang dihubungkannya.

Definisi 2.2. [15] *Indeks Harmonik dari graf D_{2n} , dinotasikan $H(D_{2n})$, didefinisikan sebagai*

$$H(\mathcal{P}(D_{2n})) = \sum_{uv \in E(D_{2n})} \frac{2}{\deg(u) + \deg(v)}$$

dengan $\deg(u)$ dan $\deg(v)$ merupakan derajat simpul u dan v .

Berikut perhitungan nilai indeks Harmonik untuk graf $D_{2.2^2}$. Perhatikan Gambar 3.1

$$\begin{aligned} H(\mathcal{P}(D_{2.2^2})) &= \sum_{uv \in E(\mathcal{P}(D_{2.2^2}))} \frac{2}{\deg(u) + \deg(v)} \\ &= \frac{2}{\deg(e) + \deg(a)} + \frac{2}{\deg(e) + \deg(a^2)} + \frac{2}{\deg(e) + \deg(a^3)} \\ &\quad + \frac{2}{\deg(e) + \deg(b)} + \frac{2}{\deg(e) + \deg(ab)} + \frac{2}{\deg(e) + \deg(a^2b)} \\ &\quad + \frac{2}{\deg(e) + \deg(a^3b)} + \frac{2}{\deg(a) + \deg(a^2)} + \frac{2}{\deg(a) + \deg(a^3)} \\ &= \frac{2}{7+3} + \frac{2}{7+3} + \frac{2}{7+3} + \frac{2}{7+1} + \frac{2}{7+1} + \frac{2}{7+1} + \frac{2}{7+1} + \frac{2}{3+3} + \frac{2}{3+3} \\ &\quad + \frac{2}{3+3} \\ &= \frac{6}{10} + \frac{8}{8} + \frac{6}{6} \\ H(\mathcal{P}(D_{2.2^2})) &= \frac{13}{5} \end{aligned}$$

Jadi, nilai indeks Harmonik dari graf pangkat $D_{2.2^2}$ adalah $\frac{13}{5}$.

Indeks ini didefinisikan sebagai jumlah jarak terpendek antara semua pasangan simpul dalam sebuah graf. Dengan demikian, indeks Wiener dapat memberikan gambaran tentang struktur dan keterhubungan graf secara keseluruhan.

Definisi 2.3. [16] *Indeks Hyper-Wiener dari graf D_{2n} , dinotasikan $WW(D_{2n})$, didefinisikan sebagai*

$$WW(D_{2n}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{u,v \in V(D_{2n})} d(u,v) + d^2(u,v) \right)$$

dengan $d(u,v)$ merupakan jarak simpul u dan v .

Nilai indeks Hyper-Wiener untuk graf $D_{2.2^2}$ adalah 64. Perhatikan,

$$\begin{aligned} WW(\mathcal{P}(D_{2.2^2})) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{u,v \in V(D_{2n})} d(u,v) + d^2(u,v) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((d(e,a) + d^2(e,a)) + (d(e,a^2) + d^2(e,a^2)) \right. \\ &\quad + (d(e,a^3) + d^2(e,a^3)) + (d(e,b) + d^2(e,b)) + (d(e,ab) + d^2(e,ab)) \\ &\quad + (d(e,a^2b) + d^2(e,a^2b)) + (d(e,a^3b) + d^2(e,a^3b)) \\ &\quad + (d(a,a^2) + d^2(a,a^2)) + (d(a,a^3) + d^2(a,a^3)) + (d(a,b) + d^2(a,b)) \\ &\quad + (d(a,ab) + d^2(a,ab)) + (d(a,a^2b) + d^2(a,a^2b)) \\ &\quad + (d(a,a^3b) + d^2(a,a^3b)) + (d(a^2,a^3) + d^2(a^2,a^3)) \\ &\quad + (d(a^2,b) + d^2(a^2,b)) + (d(a^2,ab) + d^2(a^2,ab)) \\ &\quad + (d(a^2,a^2b) + d^2(a^2,a^2b)) + (d(a^2,a^3b) + d^2(a^2,a^3b)) \\ &\quad + (d(a^3,b) + d^2(a^3,b)) + (d(a^3,ab) + d^2(a^3,ab)) \\ &\quad + (d(a^3,a^2b) + d^2(a^3,a^2b)) + (d(a^3,a^3b) + d^2(a^3,a^3b)) \\ &\quad + (d(b,ab) + d^2(b,ab)) + (d(b,a^2b) + d^2(b,a^2b)) \\ &\quad + (d(b,a^3b) + d^2(b,a^3b)) + (d(ab,a^2b) + d^2(ab,a^2b)) \\ &\quad \left. + (d(ab,a^3b) + d^2(ab,a^3b)) + (d(a^2b,a^3b) + d^2(a^2b,a^3b)) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((1+1^2) + (1+1^2) + (1+1^2) + (1+1^2) + (1+1^2) + (1+1^2) \right. \\ &\quad + (1+1^2) + (1+1^2) + (1+1^2) + (2+2^2) + (2+2^2) + (2+2^2) \\ &\quad + (2+2^2) + (1+1^2) + (2+2^2) + (2+2^2) + (2+2^2) + (2+2^2) \\ &\quad + (2+2^2) + (2+2^2) + (2+2^2) + (2+2^2) + (2+2^2) + (2+2^2) \\ &\quad \left. + (2+2^2) + (2+2^2) + (2+2^2) + (2+2^2) \right) \\ H(\mathcal{P}(D_{2.2^2})) &= 64 \end{aligned}$$

Jadi, nilai indeks Harmonik dari graf pangkat $D_{2.2^2}$ adalah $\frac{13}{5}$.

Indeks Randic dari graf D_{2n} merupakan jumlahan dari akar perkalian derajat dua simpul berbeda.

Definisi 2.4. [17] Indeks Randic dari graf D_{2n} , dinotasikan $R(D_{2n})$ didefinisikan sebagai

$$R(\mathcal{P}(D_{2n})) = \sum_{uv \in E(D_{2n})} (\deg(u) \deg(v))^{-\frac{1}{2}}$$

Perhatikan contoh perhitungan indkes Randic pada graf $\mathcal{P}(D_{2.2^2})$

$$R(\mathcal{P}(D_{2.2^2})) = \sum_{uv \in E(D_{2.2^2})} (\deg(u) \deg(v))^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&= (\deg(e) \deg(a))^{-\frac{1}{2}} + (\deg(e) \deg(a^2))^{-\frac{1}{2}} + (\deg(e) \deg(a^3))^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad + (\deg(e) \deg(b))^{-\frac{1}{2}} + (\deg(e) \deg(ab))^{-\frac{1}{2}} + (\deg(e) \deg(a^2b))^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad + (\deg(e) \deg(a^3b))^{-\frac{1}{2}} + (\deg(a) \deg(a^2))^{-\frac{1}{2}} + (\deg(a) \deg(a^3))^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad + (\deg(a^2) \deg(a^3))^{-\frac{1}{2}} \\
&= (7 \cdot 3)^{-\frac{1}{2}} + (7 \cdot 3)^{-\frac{1}{2}} + (7 \cdot 3)^{-\frac{1}{2}} + (7 \cdot 1)^{-\frac{1}{2}} + (7 \cdot 1)^{-\frac{1}{2}} + (7 \cdot 1)^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad + (7 \cdot 1)^{-\frac{1}{2}} + (3 \cdot 3)^{-\frac{1}{2}} + (3 \cdot 3)^{-\frac{1}{2}} + (3 \cdot 3)^{-\frac{1}{2}} \\
R(\mathcal{P}(D_{2,2^2})) &= 3 \cdot 21^{-\frac{1}{2}} + 4 \cdot 7^{-\frac{1}{2}} + 3 \cdot (3^2)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Jadi, nilai indeks Randic dari graf $\mathcal{P}(D_{2,2^2})$ adalah $3 \cdot 21^{-\frac{1}{2}} + 4 \cdot 7^{-\frac{1}{2}} + 3 \cdot (3^2)^{-\frac{1}{2}}$

Teorema 2.5. [12] *Jika $n = p^m$ dengan p bilangan prima dan suatu m bilangan asli, maka graf pangkat dari grup dihedral D_{2n} memuat K_n dan $K_{1,n}$ sebagai subgraf dengan $V(K_n) \cap V(K_{1,n}) = \{e\}$*

Teorema 2.6. [12] *Derajat simpul graf pangkat dari grup dihedral adalah*

- $\deg(e) = 2n - 1$
- $\deg(a^i) = n - 1$ untuk setiap $i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq n - 1$
- $\deg(a^j b) = 1$ untuk setiap $j \in \mathbb{Z}, 0 \leq i \leq n - 1$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan tinjauan literatur yang dilakukan, beberapa teorema terkait dengan indeks Harmonic, Hyper-Wiener, dan Randic dari graf pangkat pada grup dihedral diperoleh.

Teorema 3.1. *Misalkan $\mathcal{P}(D_{2n})$ merupakan graf pangkat pada grup dihedral dengan $n \geq 3$. Indeks Harmonik dari $\mathcal{P}(D_{2n})$ adalah*

$$H(\mathcal{P}(D_{2n})) = \frac{3n^2 + 2n - 4}{6n - 4}.$$

Bukti. Misalkan $\mathcal{P}(D_{2n})$ merupakan graf pangkat pada grup dihedral dengan $n \geq 3$. Berdasarkan Teorema 2.5, simpul pada graf pangkat dari grup $\mathcal{P}(D_{2n})$ dapat dipartisi menjadi 3 bagian:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \{a, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}\} \\
V_2 &= \{b, ab, a^2b, a^3b, \dots, a^{n-1}b\} \\
V_3 &= \{e\}
\end{aligned}$$

Oleh karena itu, pembuktian indeks Harmonik pada graf pangkat dari grup dihedral akan dibagi menjadi 5 kasus

Kasus 1. Untuk setiap $u_1, v_1 \in V_1$ dengan $u_1 \neq v_1$

Berdasarkan Teorema 2.6 diketahui bahwa $\deg(u) = \deg(v) = n - 1$ dan $|V_1| = n - 1$ serta berdasarkan Teorema 2.5 didapat bahwa graf yang terbentuk dari himpunan simpul V_1 adalah graf lengkap. Karena terdapat $n - 1$ simpul dan diambil dua simpul berbeda, maka didapat banyaknya kombinasi dua simpul berbeda sama dengan C_2^{n-1} sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{u_1 v_1 \in E} \frac{2}{\deg(u_1) + \deg(v_1)} &= C_2^{n-1} \left(\frac{2}{(n-1) + (n-1)} \right) \\
&= \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} \right) \left(\frac{2}{2n-2} \right)
\end{aligned}$$

$$\sum_{u_1 v_1 \in E} \frac{2}{\deg(u) + \deg(v)} = \frac{n-2}{2}$$

Kasus 2 Untuk setiap $u_1 \in V_1$ dan $v_3 \in V_3$

Berdasarkan Teorema 2.6 diketahui bahwa $\deg(u_1) = n-1$, $\deg(v_3) = 2n-1$ dengan $|V_1| = n-1$ dan $|V_3| = 1$. Selanjutnya berdasarkan definisi indeks Harmonik, maka jumlah pasangan simpul dari himpunan V_1 dan V_3 sebanyak $(n-1)(1)$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{u_1 v_3 \in E} \frac{2}{\deg(u_1) + \deg(v_3)} &= (n-1)(1) \left(\frac{2}{(n-1) + (2n-1)} \right) \\ &= (n-1) \left(\frac{2}{(3n-2)} \right) \\ \sum_{u_1 v_3 \in E} \frac{2}{\deg(u_1) + \deg(v_3)} &= \frac{2n-2}{3n-2} \end{aligned}$$

Kasus 3 Untuk setiap $u_2 \in V_2$ dan $v_3 \in V_3$

Berdasarkan Teorema 2.6 diketahui bahwa $\deg(u_2) = 1$, $\deg(v_3) = n$ dengan $|V_2| = n$ dan $|V_3| = 1$. Selanjutnya berdasarkan definisi indeks Harmonik, maka jumlah pasangan simpul dari himpunan V_2 dan V_3 sebanyak $(n)(1)$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{u_2 v_3 \in E} \frac{2}{\deg(u) + \deg(v)} &= (n)(1) \left(\frac{2}{1 + (2n-1)} \right) \\ &= (n) \left(\frac{2}{2n} \right) \\ \sum_{u_2 v_3 \in E} \frac{2}{\deg(u) + \deg(v)} &= 1 \end{aligned}$$

Oleh karena itu, dengan menjumlahkan ketiga kasus tersebut, diperoleh indeks Harmonik dari $\mathcal{P}(D_{2n})$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} H(\mathcal{P}(D_{2n})) &= \sum_{uv \in E(D_{2n})} \frac{2}{\deg(u) + \deg(v)} \\ &= \frac{n-2}{2} + \frac{2n-2}{3n-2} + 1 \\ H(\mathcal{P}(D_{2n})) &= \frac{3n^2 + 2n - 4}{6n - 4} \end{aligned}$$

Sehingga, diperoleh rumus umum indeks Harmonik dari graf pangkat pada grup dihedral D_{2n} yaitu $\frac{3n^2 + 2n - 4}{6n - 4}$.

Teorema 3.2 Misalkan $\mathcal{P}(D_{2n})$ dengan $n = p^m$ untuk bilangan prima p dan bilangan asli m serta $n \geq 3$ merupakan graf pangkat pada grup dihedral dengan $n \geq 3$. Indeks Randic dari $\mathcal{P}(D_{2n})$ adalah

$$R(\mathcal{P}(D_{2n})) = \frac{(n-2)}{2} + \frac{(n-1)^{\frac{1}{2}}}{(2n-1)^{\frac{1}{2}}} + n(2n-1)^{-\frac{1}{2}}$$

Bukti. Pada pembuktian indeks Randic dari graf pangkat grup dihedral akan dibagi menjadi 3 kasus. Menggunakan asumsi yang sama dengan Teorema 2.1, maka diperoleh

Kasus 1 Untuk setiap $u, v \in V_1$ dimana $u \neq v$

$$\sum_{u, v \in V_1} (\deg(u) \deg(v))^{-\frac{1}{2}} = C_2^{n-1} ((n-1)(n-1))^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{2! (n-3)!} (n-1)^{-1}$$

$$\sum_{u,v \in V_1} (\deg(u) \deg(v))^{-\frac{1}{2}} = \frac{n-2}{2}$$

Kasus 2 Untuk setiap $u \in V_1$ dan $v \in V_3$

$$\sum_{u \in V_1, v \in V_3} (\deg(u) \deg(v))^{-\frac{1}{2}} = (n-1)(1)((n-1)(2n-1))^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (n-1)^{\frac{1}{2}} (2n-1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{u \in V_1, v \in V_3} (\deg(u) \deg(v))^{-\frac{1}{2}} = \frac{(n-1)^{\frac{1}{2}}}{(2n-1)^{\frac{1}{2}}}$$

Kasus 3 Untuk setiap $u \in V_2$ dan $v \in V_3$

$$\sum_{u \in V_2, v \in V_3} (\deg(u) \deg(v))^{-\frac{1}{2}} = (n)(1)((1)(2n-1))^{-\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{u \in V_2, v \in V_3} (\deg(u) \deg(v))^{-\frac{1}{2}} = n(2n-1)^{-\frac{1}{2}}$$

Oleh karena itu, dengan menjumlahkan ketiga kasus tersebut, diperoleh indeks Randic dari $\mathcal{P}(D_{2n})$ sebagai berikut

$$R(\mathcal{P}(D_{2n})) = \sum_{u,v \in \mathcal{P}(D_{2n})} (\deg(u) \deg(v))^{-\frac{1}{2}}$$

$$R(\mathcal{P}(D_{2n})) = \frac{n-2}{2} + \frac{(n-1)^{\frac{1}{2}}}{(2n-1)^{\frac{1}{2}}} + n(2n-1)^{-\frac{1}{2}}$$

Sehingga, diperoleh rumus umum indeks Randic dari graf pangkat pada grup dihedral

$$D_{2n} \text{ yaitu } \frac{(n-2)}{2} + \frac{(n-1)^{\frac{1}{2}}}{(2n-1)^{\frac{1}{2}}} + n(2n-1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Teorema 3.3 Misalkan $\mathcal{P}(D_{2n})$ merupakan graf pangkat pada grup dihedral dengan $n \geq 3$. Indeks Hyper-Wiener dari $\mathcal{P}(D_{2n})$ adalah

$$WW(\mathcal{P}(D_{2n})) = 5n^2 - 4n$$

Bukti. Pada pembuktian indeks Harmonik dari graf pangkat grup dihedral akan dibagi menjadi 5 kasus. Menggunakan asumsi yang sama dengan Teorema 3.1, maka diperoleh

Kasus 1. Untuk setiap $u, v \in V_1$ dengan $u \neq v$

$$\frac{1}{2} \sum_{u,v \in V_1} (d(u,v) + d(u,v)^2) = \frac{1}{2} C_2^{n-1} (1 + 1^2)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{(n-1)!}{2! (n-3)!} (2) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{2(n-3)!} (2) \right)$$

$$= \frac{1}{2} (n-1)(n-2)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{u,v \in V_1} (d(u,v) + d(u,v)^2) = \frac{1}{2} n^2 - \frac{3}{2} n + 1$$

Kasus 2. Untuk setiap $u, v \in V_2$ dengan $u \neq v$

Karena semua anggota V_2 hanya bertetangga dengan e (anggota V_3) sehingga terbentuk graf bintang, maka jarak dua simpul berbeda adalah 2, $d(u, v) = 2$ untuk setiap $u, v \in V_2$. Dengan alasan yang sama pada bukti Teorema 3.1 (Kasus 2) maka banyaknya dua simpul yang terhubung adalah C_2^n . Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{u, v \in V_2} (d(u, v) + d(u, v)^2) &= \frac{1}{2} C_2^n (2 + 2^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{n!}{2(n-2)!} (6) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} (6) \right) \\ &= \frac{1}{2} (3n(n-1)) \\ \frac{1}{2} \sum_{u, v \in V_2} (d(u, v) + d(u, v)^2) &= \frac{3}{2} n^2 - \frac{3}{2} n \end{aligned}$$

Kasus 3. Untuk setiap $u \in V_1$ dan $v \in V_3$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{u \in V_1, v \in V_3} (d(u, v) + d(u, v)^2) &= \frac{1}{2} (n-1)(1)(1+1^2) \\ &= \frac{1}{2} (n-1)(2) \\ \frac{1}{2} \sum_{u \in V_1, v \in V_3} (d(u, v) + d(u, v)^2) &= n-1 \end{aligned}$$

Kasus 4. Untuk setiap $u \in V_2$ dan $v \in V_3$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{u \in V_1, v \in V_3} (d(u, v) + d(u, v)^2) &= \frac{1}{2} (n)(1)(1+1^2) \\ &= \frac{1}{2} (n)(2) \\ \frac{1}{2} \sum_{u \in V_1, v \in V_3} (d(u, v) + d(u, v)^2) &= n \end{aligned}$$

Kasus 5. Untuk setiap $u \in V_1$ dan $v \in V_2$

Karena V_1 dan V_2 bertetangga dengan e (anggota V_3) akan tetapi setiap simpul pada V_1 dan V_2 tidak bertetangga, maka jarak dua simpul berbeda untuk setiap $u \in V_1$ dan $v \in V_2$ adalah 2, $d(u, v) = 2$. Dengan alasan yang sama pada bukti Teorema 3.1 (Kasus 5) maka banyaknya dua simpul yang terhubung adalah $(n-1)(n)$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{u \in V_1, v \in V_2} (d(u, v) + d(u, v)^2) &= \frac{1}{2} (n-1)(n)(2+2^2) \\ &= \frac{1}{2} (n-1)(n)(6) \\ \frac{1}{2} \sum_{u \in V_1, v \in V_2} (d(u, v) + d(u, v)^2) &= 3n^2 - 3n \end{aligned}$$

Maka berdasarkan kelima kasus tersebut dan Teorema 3.2, diperoleh indeks Hyper-Wiener dari $\mathcal{P}(D_{2n})$ sebagai berikut

$$WW(\mathcal{P}(D_{2n})) = \frac{1}{2} \sum_{u, v \in \mathcal{P}(D_{2n})} (d(u, v) + d(u, v)^2)$$

$$= \left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 1\right) + \left(\frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n\right) + (n-1) + (n) + (3n^2 - 3n)$$

$$WW(\mathcal{P}(D_{2n})) = 5n^2 - 4n$$

Sehingga, diperoleh rumus umum indeks Hyper-Wiener dari graf pangkat pada grup dihedral D_{2n} yaitu $5n^2 - 4n$.

KESIMPULAN

Dari paparan pada *section* pembahasan, diperoleh bahwa rumus umum dari indeks Harmonik, Hyper Wiener, dan Randic dari graf pangkat pada grup dihedral berturut-turut adalah $H(\mathcal{P}(D_{2n})) = \frac{3n^2+2n-4}{6n-4}$, $R(\mathcal{P}(D_{2n})) = \frac{(n-2)}{2} + \frac{(n-1)^{\frac{1}{2}}}{(2n-1)^{\frac{1}{2}}} + n(2n-1)^{-\frac{1}{2}}$, dan $WW(\mathcal{P}(D_{2n})) = 5n^2 - 4n$.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] D. B. West and others, *Introduction to graph theory*, vol. 2. Prentice hall Upper Saddle River, 2001.
- [2] D. S. Dummit and R. M. Foote, *Abstract algebra*, vol. 3. Wiley Hoboken, 2004.
- [3] B. N. Syechah, E. Y. Asmarani, A. G. Syarifudin, D. P. Anggraeni, and I. G. A. W. W. Wardhana, "Representasi Graf Pangkat Pada Grup Bilangan Bulat Modulo Berorde BilanganPrima," *Evolusi: Journal of Mathematics and Sciences*, vol. 6, no. 2, pp. 99–104, 2022, doi: <https://doi.org/10.51673/evolusi.v6i2.1304>.
- [4] A. Abdurahim, J. Qudsi, S. Muawanah, and S. Salwa, "Indeks Harmonik, Randic, dan Gutman dari Graf Koprime Prima untuk Grup Bilangan Bulat Modulo," *Jurnal Diferensial*, vol. 7, no. 1, pp. 38–46, 2025, doi: <https://ejurnal.undana.ac.id/index.php/ID/article/view/18227>.
- [5] A. Abdurahim *et al.*, "Indeks Topologi Padmakar Ivan dan Szeged pada Graf Koprime Prima dari Grup Bilangan Bulat Modulo," *Square: Journal of Mathematics and Mathematics Education*, vol. 6, no. 2, pp. 139–149, 2024, doi: <https://doi.org/10.21580/square.2024.6.2.22836>.
- [6] D. S. Ramdani, I. G. A. W. Wardhana, and Z. Y. Awanis, "The intersection graph representation of a dihedral group with prime order and its numerical invariants," *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, vol. 16, no. 3, pp. 1013–1020, 2022, doi: <https://doi.org/10.30598/barekengvol16iss3pp1013-1020>.
- [7] E. Y. Asmarani, A. G. Syarifudin, I. G. A. W. Wardhana, and N. W. Switrayni, "The power graph of a dihedral group," *Eigen Mathematics Journal*, pp. 80–85, 2021, doi: <https://doi.org/10.29303/emj.v4i2.117>.
- [8] B. Z. Yatin, M. R. Gayatri, I. G. A. W. Wardhana, and B. D. A. Prayanti, "Indeks Hyper-Wiener Dan Indeks Padmakar-Ivan Dari Graf Koprime Dari Grup Dihedral," *Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika*, vol. 07, no. 02, pp. 138–147, 2023, doi: <https://doi.org/10.26740/jram.v7n2.p138-147>.

- [9] L. Zhong, "The harmonic index for graphs," *Applied mathematics letters*, vol. 25, no. 3, pp. 561–566, 2012.
- [10] C. Delorme, O. Favaron, and D. Rautenbach, "On the Randić index," *Discrete Mathematics*, vol. 257, no. 1, pp. 29–38, 2002.
- [11] I. Gutman, "Relation between hyper-Wiener and Wiener index," *Chemical physics letters*, vol. 364, no. 3–4, pp. 352–356, 2002.
- [12] E. Y. Asmarani, S. T. Lestari, D. Purnamasari, A. G. Syarifudin, S. Salwa, and I. G. A. W. Wardhana, "The First Zagreb Index, The Wiener Index, and The Gutman Index of The Power of Dihedral Group," *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, vol. 7, no. 4, pp. 513–520, 2023, doi: <http://dx.doi.org/10.18860/ca.v7i4.16991>.
- [13] M. R. Gayatri, R. Fadhillah, S. T. Lestari, L. F. Pratiwi, A. Abdurahim, and I. G. A. W. Wardhana, "Topology Index of the Coprime Graph for Dihedral Group of Prime Power Order," *Jurnal Diferensial*, vol. 5, no. 2, pp. 126–134, 2023, doi: 10.35508/jd.v5i2.12462.
- [14] T. T. Chelvam and M. Sattanathan, "Power graph of finite abelian groups," *Algebra and Discrete Mathematics*, vol. 16, no. 1, pp. 33–41, 2018.
- [15] L. Zhong, "The harmonic index for graphs," *Applied mathematics letters*, vol. 25, no. 3, pp. 561–566, 2012, doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.aml.2011.09.059>.
- [16] D. J. Klein, I. Lukovits, and I. Gutman, "On the definition of the hyper-Wiener index for cycle-containing structures," *Journal of chemical information and computer sciences*, vol. 35, no. 1, pp. 50–52, 1995, doi: <https://doi.org/10.1021/ci00023a007>.
- [17] M. Randic, "Characterization of molecular branching," *Journal of the American Chemical Society*, vol. 97, no. 23, pp. 6609–6615, 1975, doi: <https://doi.org/10.1021/ja00856a001>.