BASIS Jurnal ilmiah matematika
Volume 4 No 1 (2025) 33-47
http://jurnal.fmipa.unmul.ac.id/index.php/Basis

Analisis Potensi Pencemaran Air Sungai Mahakam Menggunakan Model Regresi Weibull (Studi Kasus: Data *Dissolved Oxygen* Air Sungai Mahakam Tahun 2022)

Rahmawati[1*], Suyitno[2], Ika Purnamasari[3]

[1] *Universitas Mulawarman*
[2] *Laboratorium Statistika Terapan FMIPA Universitas Mulawarman*
[3] *Laboratorium Statistika Ekonomi dan Bisnis FMIPA Universitas Mulawarman*

Dikirim: Oktober 2024; Diterima: Maret 2025; Dipublikasi: Maret 2025

Alamat Email Korespondesi: rahmawatisumarno9@gmail.com

Abstrak
Model regresi Weibull (RW) adalah distribusi Weibull yang dipengaruhi langsung oleh kovariat atau peubah bebas. Berdasarkan fungsi-fungsi yang saling berkaitan pada distribusi Weibull, model RW terdiri dari model regresi *survival* Weibull, model regresi distribusi kumulatif Weibull, model regresi *hazard* Weibull, dan model regresi *mean* Weibull. Model RW memiliki keunggulan dalam analisis survival dan keandalan, seperti fleksibilitas model, interpretasi parameter yang mudah, kemampuan menangani data tersensor, serta aplikasinya yang luas dalam bidang kesehatan, lingkungan, ekonomi, dan teknik. Tujuan penelitian ini adalah mendapatkan informasi potensi pencemaran air Sungai Mahakam, dan faktor-faktor yang memengaruhinya melalui pemodelan RW pada data *Dissolved Oxygen* (DO) tahun 2022. Data penelitian adalah data sekunder dari Dinas Lingkungan Hidup Provinsi Kalimantan Timur tahun 2022. Metode pendugaan parameter pada penelitian ini adalah metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Pengujian distribusi data pada penelitian ini adalah menggunakan uji Kolmogorov-Smirnov untuk mengetahui apakah data yang digunakan mengikuti distribusi Weibull. Kesimpulan penelitian adalah mendapatkan informasi potensi pencemaran air Sungai Mahakam, yaitu peluang air sungai tidak tercemar sebesar 0,6252, peluang air sungai tercemar sebesar 0,3747, laju pencemaran air sungai sebesar 0,2057 lokasi/*ppm* atau 2 lokasi per 10 *ppm*, dan rata-rata DO air sungai sebesar 5,6348 *ppm*, kurang dari 6 *mg/l* karena rata-rata DO di bawah standar kualitas air. Faktor-faktor yang berpengaruh terhadap potensi pencemaran air Sungai Mahakam tahun 2022 adalah suhu, konsentrasi nitrat, dan TSS.

Kata Kunci:
DO, MLE, Model regresi Weibull, Potensi pencemaran air Sungai Mahakam.

PENDAHULUAN

Distribusi Weibull diperkenalkan oleh Ernst Hjalmar Waloddi Weibull seorang Fisikawan Swedia pada tahun 1939. Distribusi Weibull adalah distribusi variabel kontinu dalam teori probabilitas yang ada pada statistika. Distribusi Weibull standar memuat tiga parameter, yakni parameter skala, lokasi, dan bentuk. Adapun bentuk khusus distribusi

Weibull adalah distribusi Weibull versi skala-bentuk (*scale-shape version*) yakni, distribusi Weibull yang memuat dua parameter, yaitu parameter skala dan bentuk [1].

Distribusi Weibull umumnya digunakan dalam pengujian distribusi data dan penaksiran parameter. Namun, dalam berbagai bidang, data respon sering dipengaruhi oleh faktor eksternal atau kovariat, sehingga diperlukan pengembangan model regresi Weibull (RW). Model RW adalah distribusi Weibull yang memuat kovariat atau peubah bebas, dengan parameter skala yang dinyatakan sebagai fungsi regresi dari kovariat [2]. Berdasarkan fungsi-fungsi yang saling berkaitan pada distribusi Weibull, maka model-model RW meliputi model regresi distribusi kumulatif Weibull, model regresi *survival* Weibull, model regresi *hazard* Weibull dan model regresi *mean* Weibull [3]. Model RW memiliki keunggulan dalam analisis survival dan keandalan, seperti fleksibilitas model, interpretasi parameter yang mudah, kemampuan menangani data tersensor, serta aplikasinya yang luas dalam bidang kesehatan, lingkungan, ekonomi, dan teknik [4], [5].

Penelitian ini menerapkan RW pada data kontinu non negatif, yaitu data *Dissolved Oxygen* (DO) untuk memprediksi kejadian pencemaran dan menginformasikan strategi pengelolaan yang lebih efektif agar mencegah terjadinya pencemaran air Sungai Mahakam. Sungai Mahakam merupakan sumber air bersih, habitat ekosistem perairan, sarana transportasi, serta pengendali banjir bagi masyarakat Kalimantan Timur. Namun, berbagai Aktivitas di sepanjang Daerah Aliran Sungai (DAS) Mahakam, seperti industri, pertambangan, dan pemukiman tersebut berpotensi mencemari air sungai. [6]. Pencemaran ini berdampak negatif bagi manusia dan organisme air, sehingga diperlukan langkah pencegahan.

Cara yang dapat dilakukan untuk mencegah terjadinya pencemaran air Sungai Mahakam adalah dengan memberikan informasi kepada masyarakat dan pemerintah mengenai faktor-faktor yang mempengaruhi pencemaran. Informasi atau berbagai faktor yang mempunyai pengaruh terhadap potensi pencemaran air Sungai Mahakam dapat dianalisis melalui pemodelan RW pada data DO. DO adalah jumlah miligram oksigen yang terlarut dalam air sebagai sumber oksigen bagi ekosistem perairan [7]. DO diukur dalam mg/l atau ppm, merupakan indikator utama kualitas air. Standar kualitas air pada DO adalah 6 $mg/$l, jika DO kurang dari 6 mg/l mengindikasikan air Sungai Mahakam tercemar dan jika DO lebih dari 6 mg/l mengindikasikan air Sungai Mahakam tidak tercemar [8]. Kehadiran zat pencemar pada aliran sungai menyebabkan nilai DO menurun. Faktor utama yang mempengaruhi DO adalah suhu, konsentrasi nitrat, dan *Total Suspended Solid* (TSS).

Merujuk masalah yang sudah dijelaskan tersebut, maka penelitian ini mengkaji tentang model RW pada data DO air Sungai Mahakam tahun 2022. Melalui pemodelan RW pada data DO, penelitian ini bertujuan untuk mengidentifikasi faktor-faktor pencemaran dan memberikan rekomendasi strategi pengelolaan yang lebih efektif.

LANDASAN TEORI

1. Distribusi Weibull

Distribusi Weibull dengan tiga parameter mempunyai fungsi kepadatan peluang (FKP) sebagai berikut [2]

$$F(y) = \frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{y-\delta}{\lambda}\right)^{\gamma-1} exp\left[-\left(\frac{y-\delta}{\lambda}\right)^{\gamma}\right]. \tag{1}$$

Bentuk khusus dari distribusi Weibull dengan tiga parameter, adalah distribusi Weibull versi skala-bentuk dengan FKP, yaitu

$$f(y) = \frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma-1} exp\left[-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma}\right]. \tag{2}$$

Fungsi *survival* distribusi Weibull versi skala-bentuk adalah

$$S(y) = P(Y > y) = exp\left[-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma}\right]. \tag{3}$$

dan fungsi distribusi kumulatif adalah

$$F(y) = P(Y \leq y) = 1 - \text{S(y)} = 1 - exp\left[-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma}\right]. \tag{4}$$

Berdasarkan persamaan (2), dan (3) diperoleh fungsi *hazard*, yaitu

$$h(y) = \frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\gamma-1} = \gamma\lambda^{-\gamma}y^{\gamma-1}. \tag{5}$$

Momen ke r distribusi Weibull versi skala-bentuk dengan FKP yang diberikan oleh persamaan (2) bisa dinyatakan dalam bentuk yang umum, yakni

$$E(Y^r) = \lambda^r\Gamma_r, \tag{6}$$

dengan Γ adalah fungsi Gamma dan Γ_r, didefinisikan oleh

$$\Gamma_r = \Gamma\left(\frac{r}{\gamma} + 1\right). \tag{7}$$

Mean (ekspektasi) dari variabel acak Y [9] bisa didapatkan berdasarkan persamaan (6) dan (7), yaitu

$$\mu_Y = E(Y) = \lambda\Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right). \tag{8}$$

2. Pendugaan Parameter Distribusi Weibull

Metode pendugaan parameter distribusi Weibull dalam riset ini, yaitu metode MLE (*Maximum Likelihood Estimation*). Metode MLE merupakan metode pendugaan parameter dengan memaksimumkan fungsi *likelihood.* Merujuk FKP yang diberikan persamaan (2), maka fungsi *likelihood* [10] didefinisikan oleh

$$L(\boldsymbol{\theta}_1) = \prod_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{\theta}_1, y_i) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{y_i}{\lambda}\right)^{\gamma-1} exp\left[-\frac{y_i}{\lambda}\right]^{\gamma}\right), \tag{9}$$

dengan $\boldsymbol{\theta}_1 = [\lambda \quad \gamma]^T$. Fungsi *log-likelihood* berdasarkan fungsi *likelihood* (9), adalah

$$\begin{aligned}\ell(\boldsymbol{\theta}_1) &= \ln[L(\boldsymbol{\theta}_1|\boldsymbol{y}_i)] = \sum_{i=1}^{n}(\ln f(\boldsymbol{\theta}_1|\boldsymbol{y}_i)) \\ &= \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}}\left[\mathbf{ln}(\boldsymbol{\gamma}) - \mathbf{ln}(\boldsymbol{\lambda}) + (\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{1})[\mathbf{ln}\,\boldsymbol{y_i} - \mathbf{ln}\,\boldsymbol{\lambda}] - \left(\frac{\boldsymbol{y_i}}{\boldsymbol{\lambda}}\right)^{\boldsymbol{\gamma}}\right].\end{aligned} \tag{10}$$

Estimator $\boldsymbol{\theta}_1$ yang berperan memaksimumkan fungsi *likelihood* didapatkan dari turunan pertama fungsi *log-likelihood* (9) terhadap semua parameter dan disamakan dengan nol, yaitu

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}_1|y)}{\partial\boldsymbol{\theta}_1} = \mathbf{0}, \tag{11}$$

dengan $\mathbf{0}$ adalah vektor nol berdimensi 2 dan persamaan (11) dinamakan persamaan *likelihood*. Ruas kiri dari persamaan (11) adalah vektor gradien berdimensi 2, yaitu

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_1) = \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial\boldsymbol{\theta}_1} = \begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial\lambda} & \frac{\partial}{\partial\gamma}\end{bmatrix}^T. \tag{12}$$

Berdasarkan ekspresi fungsi *log-likelihood* yang diberikan persamaan (10), maka
Berdasarkan ekspresi fungsi *log-likelihood* yang diberikan persamaan (10), maka
persamaan *likelihood* (11) adalah sistem persamaan nonlinier sehingga solusi eksak dari

persamaan *likelihood* untuk memperoleh pendugaan ML (*maximum likelihood*) tidak bisa dilaksanakan secara analitis. Adapun metode alternatif yang dapat dipakai untuk menyelesaikan persamaan *likelihood* agar memperoleh estimator ML $\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1\right)$ yaitu metode iteratif Newton-Raphson. Algoritma iterasi Newton-Raphson diperlukan perhitungan vektor gradien dan matriks Hesse (Hessian *matrix*). Bentuk umum matriks Hesse sebagai berikut

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial \lambda \partial \gamma} \\ \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial \lambda \partial \gamma} & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial \gamma^2} \end{bmatrix}_{2\times 2}. \quad (13)$$

Merujuk hasil dari perhitungan vektor gradien (12) dan matriks Hessian (13), algoritma iterasi Newton-Raphson [11] untuk memperoleh $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1$, yaitu

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(q+1)} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(q+1)} - \left[\mathbf{H}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(q)}\right)\right]^{-1} \mathbf{g}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(q)}\right), q_1 = 0,1,2, \ldots \quad (14)$$

Proses iterasi diawali dengan proses menentukan harga awal $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(0)} = [\hat{\lambda}^{(0)} \quad \hat{\gamma}^{(0)}]$ dan iterasi dihentikan pada iterasi ke-$q+1$ jika dipenuhi kondisi konvergen, yaitu jika $\left\|\boldsymbol{\theta}_1^{(q+1)} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1^{(q)}\right\| < \varepsilon$, dengan ε adalah bilangan riil positif yang cukup kecil misalnya 10^{-12}. Secara umum berdasarkan hasil pendugaan parameter diperoleh estimator fungsi distribusi, yaitu $\hat{F}(y)$.

3. Pengujian Distribusi Data

Metode yang digunakan untuk menguji distribusi data, yakni uji K-S (Kolmogorov-Smirnov). Berikut merupakan hipotesis pengujian distribusi data

$H_0: F(y) = \hat{F}(y)$

(Data mengikuti sebuah distribusi dengan fungsi distribusi kumulatif, yakni $\hat{F}(y)$)

$H_1: F(y) \neq \hat{F}(y)$

(Data tidak mengikuti sebuah distribusi dengan fungsi distribusi kumulatif, yakni $\hat{F}(y)$)

Statistik uji adalah

$$D = max\{D_F, D_S\}, \quad (15)$$

dengan

$$\begin{aligned} D_F &= max_{1<i<n}\left|\hat{F}(y_i) - F^*(y_i)\right| \\ D_S &= max_{1<i<n}\left|\hat{S}(y_i) - S^*(y_i)\right|, \end{aligned} \quad (16)$$

dan

$$\begin{aligned} F^*(y_i) &= \frac{banyak\ data\ variabel\ Y\ yang\ \leq y_i}{n} \\ S^*(y_i) &= \frac{banyak\ data\ variabel\ Y\ yang\ > y_i}{n}. \end{aligned} \quad (17)$$

$\hat{S}(y)$ dan $\hat{F}(y)$ pada persamaan (16) masing-masing merupakan nilai fungsi *survival* dan fungsi distribusi kumulatif yang didapatkan dari pendugaan parameter distribusi Weibull dengan fungsi distribusi kumulatif yang diberikan oleh persamaan (8). $F^*(y)$ adalah fungsi distribusi kumulatif empiris dan $S^*(y)$ adalah fungsi *survival* empiris berdasarkan data sampel. Pengambilan keputusan pada pengujian ini adalah menolak H_0 pada taraf signifikansi α, jika $D > D_{(\alpha,n)}$ [12], dengan $D_{(\alpha;n)}$ adalah nilai kritis yang diperoleh dari tabel pengujian K-S.

4. Model Regresi Weibull (RW)

Model RW dikonstruksi dari distribusi Weibull dengan parameter skala (λ) yang dinyatakan dalam persamaan berikut

$$\ln\lambda(\boldsymbol{\beta},\mathbf{x}) = \boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x} = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_p X_p$$
$$\text{atau} \tag{18}$$
$$\lambda(\boldsymbol{\beta},\mathbf{x}) = exp[\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}],$$

dengan $\boldsymbol{\beta}^T = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_P]$ merupakan vektor parameter regresi berdimensi $p+1$ dan $\mathbf{x} = [X_0 \quad X_1 \quad \cdots \quad X_P]^T$ adalah vektor kovariat atau variabel bebas dengan $X_0 = 1$. Model-model RW dapat diperoleh dari fungsi-fungsi yang saling berhubungan pada distribusi Weibull yang diberikan pada persamaan (3), (4), (5) dan (8) dengan parameter skala (λ) dinyatakan dalam fungsi parameter regresi seperti diberikan oleh persamaan (18). Pensubstitusian persamaan (18) ke persamaan (3) diperoleh model umum regresi *survival* Weibull [13], yaitu

$$S(y,\boldsymbol{\theta},\mathbf{x}) = exp\big[-y^\gamma exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}]\big], \tag{19}$$

dengan $\boldsymbol{\theta} = [\gamma \quad \boldsymbol{\beta}^T]^T = [\gamma \quad \beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_P]^T$. Model regresi distribusi kumulatif Weibull diperoleh berdasarkan persamaan (4) dan (19), yaitu

$$F(y,\boldsymbol{\theta},\mathbf{x}) = 1 - S(y,\boldsymbol{\theta},\mathbf{x}) = 1 - exp\big[-y^\gamma exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}]\big]. \tag{20}$$

Model regresi *hazard* Weibull diperoleh berdasarkan persamaan (5) dan (18), yaitu

$$h(y,\boldsymbol{\theta},\mathbf{x}) = \gamma y^{\gamma-1} exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}]. \tag{21}$$

Model regresi *mean* variabel acak Y diperoleh dengan mensubstitusikan persamaan (18) ke persamaan (8), yaitu

$$\mu_Y(\boldsymbol{\theta},\mathbf{x}) = \Gamma\left(\frac{1}{\gamma}+1\right) exp[\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}]. \tag{22}$$

Berdasarkan persamaan (4), (19) dan (21) diperoleh FKP yang dipengaruhi oleh parameter regresi, yaitu

$$f(y,\boldsymbol{\theta},\mathbf{x}) = \gamma y^{\gamma-1} exp\big[-\gamma[\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}]\big] exp\big[-y^\gamma exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}]\big]. \tag{23}$$

5. Pendugaan Parameter Model Regresi Weibull

Pada Landasan Teori diterangkan beberapa konsep dasar dalam bidang terkait judul makalah, yang benar-benar digunakan dalam bagian Pembahasan. Pada saat digunakan pertama kali, istilah dalam bahasa Inggris ditulis miring (italic). Pada metode penelitian bagian ini berisi tentang ringkasan metode penelitian, meliputi jenis penelitian, setting penelitian, subjek penelitian (populasi dan sampel), teknik pengumpulan data, keabsahan data serta teknik analisis data. Pendugaan parameter model RW dalam riset ini memakai metode MLE. Misalkan diberikan n data sampel $(y_i, \mathbf{x}_i, \delta_i), i = 1,2,\ldots,n$ yang saling bebas dan berdistribusi indentik, yakni $y_i \sim W(\gamma, \lambda(\mathbf{x}_i))$ dengan $\lambda(\mathbf{x}_i)$ diberikan oleh persamaan (18). δ_i adalah status klasifikasi individu ke-i, didefinisikan [14] oleh

$$\delta_i = \begin{cases} 1, \text{jika } y_i < y^* \\ 0, \text{jika } y_i \geq y^* \end{cases}$$

dengan y^* adalah suatu konstanta rill positif yang diketahui. Berdasarkan model RW diketahui bahwa, $P(Y = y_i|\delta_i = 1) = f(y_i, \mathbf{x}_i)$ dan $P(Y = y_i|\delta_i = 0) = S(y_i, \mathbf{x}_i)$ dengan $S(y_i, \mathbf{x}_i)$ dan $f(y_i, \mathbf{x}_i)$ berturut-turut diberikan oleh persamaan (19) dan (23). Berdasarkan persamaan (19) dan (23), fungsi *likelihood* didefinisikan oleh

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} [f(y_i,\boldsymbol{\theta},\mathbf{x}_i)]^{\delta_i} [S(y_i,\boldsymbol{\theta},\mathbf{x}_i)]^{1-\delta_i}. \tag{24}$$

Berdasarkan persamaan (19), dan (23), persamaan (24) dapat disederhanakan menjadi

$$L(\boldsymbol{\theta})=\prod_{i=1}^{n}\left[h(y_{i,}\mathbf{x}_i)\right]^{\delta_i}S(y_{i,}\mathbf{x}_i)=\prod_{i=1}^{n}(\gamma y^{\gamma-1}exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i])^{\delta_i}\,exp\left[-y_i^{\gamma}exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i]\right], \tag{25}$$

dengan $\mathbf{x}_i=[1\quad x_{i1}\quad \cdots\quad x_{ip}]^T$. Penggunaan logaritma natural pada kedua ruas persamaan (25) didapatkan *fungsi log-likelihood*, yakni

$$\ell(\boldsymbol{\theta})=\ln(L(\boldsymbol{\theta}))=\sum_{i=1}^{n}\left[\delta_i[\ln\gamma+(\gamma-1)\ln y_i-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i]-y_i^{\gamma}exp[-\gamma\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}_i]\right] \tag{26}$$

Estimator ML model RW diperoleh dengan menyelesaikan persamaan *likelihood* yang diberikan oleh

$$\frac{\partial\ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}=\mathbf{0}, \tag{27}$$

dimana $\mathbf{0}$ merupakan vektor nol berdimensi $p+2$. Sementara itu, ruas kanan persamaan (27) merupakan vektor gradien berdimensi $p+2$. Bentuk umum vektor gradien (27) adalah

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})=\frac{\partial\ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial\ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\gamma} & \frac{\partial\ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta_0} & \frac{\partial\ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta_1} & \cdots & \frac{\partial\ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta_p}\end{bmatrix}^T. \tag{28}$$

Berdasarkan ekspresi fungsi *log-likelihood* yang diberikan oleh persamaan (26), maka persamaan *likelihood* (27) adalah sistem persamaan nonlinier, dengan demikian solusi eksak persamaan (27) untuk mendapatkan estimator ML yang *closed form* tidak dapat ditemukan secara analitis. Metode alternatif dalam penyelesaian persamaan (25) untuk mendapatkan hampiran estimator ML ($\hat{\boldsymbol{\theta}}$) adalah metode iteratif Newton-Raphson. Adapun penentuan estimator ML model RW menggunakan metode iteratif Newton-Raphson membutuhkan perhitungan vektor gradien (28) dan matriks Hesse. Berikut merupakan bentuk umum dari matriks Hesse

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2\ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\gamma^2} & \frac{\partial^2\ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\gamma\partial\boldsymbol{\beta}^T}\\ \frac{\partial^2\ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\gamma} & \frac{\partial^2\ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}^T}\end{bmatrix}_{(p+2)\times(p+2)}, \tag{29}$$

dan

$$\frac{\partial^2\ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}^T}_{(p+1)\times(p+1)}=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2\ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta_0^2} & \frac{\partial^2\ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta_0\partial\beta_1} & \cdots & \frac{\partial^2\ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta_0\partial\beta_p}\\ \frac{\partial^2\ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta_1\partial\beta_0} & \frac{\partial^2\ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta_0^2} & \cdots & \frac{\partial^2\ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta_0\partial\beta_1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2\ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta_p\partial\beta_0} & \frac{\partial^2\ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta_p\partial\beta_1} & \cdots & \frac{\partial^2\ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\beta_p^2}\end{bmatrix}. \tag{30}$$

Merujuk hasil dari perhitungan berbagai komponen vektor gradien $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$ yang diberikan oleh persamaan (28) dan berbagai elemen matriks Hesse $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$ yang diberikan oleh persamaan (29), maka iterasi Newton-Raphson bisa dijalankan untuk memperoleh estimator ML parameter model RW $(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ dengan algoritma [11], yaitu

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q+1)}=\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q)}-\left[\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q+1)})\right]^{-1}\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q)}),\ q=0,1,2,\ldots \tag{31}$$

Proses iterasi Newton-Raphson diawali dengan menentukan nilai taksiran awal (*initial value*) $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)} = \left[\hat{\gamma}^{(0)} \quad \hat{\beta}_0^{(0)} \quad \hat{\beta}_1^{(0)} \quad \cdots \quad \hat{\beta}_P^{(0)}\right]^T$ dan proses iterasi dihentikan pada iterasi ke-$q+1$ bila terpenuhi kondisi konvergen, yakni $\left\|\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q)}\right\| \leq \varepsilon$ dimana $\|.\|$ adalah *norm* atau jarak dua vektor, dan ε adalah bilangan *real* positif yang sangat kecil misal 10^{-12} [11].

Berdasarkan matriks Hesse yang diberikan oleh persamaan (35) dapat diperoleh matriks informasi Fisher [14], yaitu

$$\mathrm{I}_f(\boldsymbol{\theta}) = -E\left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}^T}\right) = -E\big(\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})\big). \tag{32}$$

Diketahui bahwa $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ adalah estimator ML dari $\boldsymbol{\theta}$, sehingga persamaan (38) menjadi

$$\mathrm{I}_f\big(\hat{\boldsymbol{\theta}}\big) = -\mathbf{H}\left(\big(\hat{\boldsymbol{\theta}}\big)\right), \tag{33}$$

dan estimator dari matriks varian kovarian $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ adalah

$$\widehat{cov}\big(\hat{\boldsymbol{\theta}}\big) = \left[\mathrm{I}_f\big(\hat{\boldsymbol{\theta}}\big)\right]^{-1}. \tag{34}$$

6. Pengujian Parameter Model Regresi Weibull Secara Serentak

Pengujian parameter model RW secara serentak digunakan untuk mengkonfirmasi apakah parameter yang ditaksir memberikan model RW yang layak (*fit*). Hipotesis pengujian parameter secara serentak adalah

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_p = 0$ (Model RW tidak layak (tidak *fit*))

H_1: Minimal ada satu $\beta_k \neq 0, k = 1,2,\ldots,p$ (Model RW layak (*fit*))

Statistik uji diberikan oleh

$$G = 2\left(\ell\big(\hat{\boldsymbol{\theta}}\big) - \ell\big(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\big)\right), \tag{35}$$

dengan $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left[\hat{\gamma} \quad \hat{\beta}_0 \quad \hat{\beta}_1 \quad \cdots \quad \hat{\beta}_P\right]$ dan $\ell\big(\hat{\boldsymbol{\theta}}\big)$ merupakan nilai maksimum fungsi *log-likelihood* pada persamaan (26), yakni

$$\ell\big(\hat{\boldsymbol{\theta}}\big) = \sum_{i=1}^{n}\left[\delta_i\left[\ln\hat{\gamma} + (\hat{\gamma}-1)\ln y_i - \hat{\gamma}\hat{\boldsymbol{\beta}}^T\mathbf{x}_i\right] - y_i^{\gamma} exp\left[-\hat{\gamma}\hat{\boldsymbol{\beta}}^T\mathbf{x}_i\right]\right]. \tag{36}$$

Himpunan estimator di bawah hipotesis nol adalah $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 = [\hat{\gamma}_{00} \quad \hat{\beta}_{00}]$ dan nilai maksimum fungsi *log-likelihood* di bawah model hipotesis nol [15] adalah $\ell\big(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\big)$, yakni

$$\ell\big(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\big) = \sum_{i=1}^{n}\left[\delta_i\left[\ln\hat{\gamma}_{00} + (\gamma_{00}-1)\ln y_i - \hat{\gamma}_{00}\hat{\beta}_{00}\right] - y_i^{\gamma} exp\left[-\hat{\gamma}_{00}\hat{\beta}_{00}\right]\right]. \tag{37}$$

Di bawah hipotesis nol, statistik uji $G \sim \chi_p^2$, dan statistik uji G yang diberikan oleh persamaan (41) dapat dihampiri oleh

$$G \approx \hat{\mathbf{B}}^T\left[\mathbf{I}^{22}\hat{\boldsymbol{\theta}}\right]^{-1}\hat{\mathbf{B}}, \tag{38}$$

dengan $\hat{\mathbf{B}} = \left[\hat{\beta}_1 \quad \hat{\beta}_2 \quad \cdots \quad \hat{\beta}_p\right]^T$ dan $\left[\mathbf{I}^{22}\big(\hat{\boldsymbol{\theta}}\big)\right]^{-1}$ diperoleh dari invers matriks informasi Fisher, yaitu $\left[\mathbf{I}\big(\hat{\boldsymbol{\theta}}\big)\right]^{-1}$ dengan menghapuskan baris ke-1 dan ke-2 serta kolom ke-1 dan ke-2 [10], [3]. Daerah kritis pada uji ini adalah menolak H_0 pada taraf signifikansi α jika $G > \chi^2_{(\alpha,p)}$ atau jika $P_{value} < \alpha$, dengan

$$P_{value} = P(G_v > G) = 1 - F(G), \tag{39}$$

dengan G adalah nilai statistik uji yang diberikan oleh persamaan (41) dan F adalah fungsi distribusi kumulatif dari distribusi χ_p^2 [16], [14].

7. Pengujian Parameter Model Regresi Weibull Secara Parsial

Pengujian parameter model RW secara parsial digunakan untuk melihat apakah sebuah kovariat secara parsial memengaruhi model RW. Adapun hipotesis pengujian parameter secara parsial untuk β_k dengan k tertentu $k = 0,1,2,\ldots,p$, yakni sebagai berikut

$H_0: \beta_k = 0$ (Variabel kovariat X_k tidak memengaruhi model RW)
$H_1: \beta_k \neq 0$ (Variabel kovariat X_k memengaruhi model RW)

Statistik uji yang digunakan adalah

$$Z = \frac{\hat{\hat{\beta}}_k}{\sqrt{var(\hat{\beta}_k)}}, \tag{40}$$

dengan $Z \sim N(0,1)$ untuk $n \to \infty$. $var(\hat{\beta}_k)$ adalah elemen diagonal utama ke-$(k+1)$ dari $[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1}$ yang diberikan oleh persamaan (34). Daerah kritis pada uji ini adalah menolak H_0 pada taraf signifikansi α jika $|Z| > Z_{1-\alpha/2}$ atau jika $P_{value} < \alpha$, dengan

$$P_{value} = 2\big(1 - F(|Z|)\big), \tag{41}$$

dengan $Z \sim N(0,1)$, Z adalah nilai statistik yang diberikan oleh persamaan (40), dan F adalah fungsi distribusi kumulatif distribusi normal baku [17], [18].

8. Pendeteksian Multikoliniearitas

Kasus multikolinieritas antar kovariat dapat diketahui dengan memakai nilai VIF (*Variance Inflation Factor*). Apabila nilai VIF > 10 mengindikasikan munculnya kasus multikolinieritas. Nilai VIF untuk kovariat ke-k dihitung menggunakan rumus berikut

$$VIF_k = \frac{1}{1 - R_k^2}, k = 1,2,\ldots,V, \tag{42}$$

dengan R_k^2 adalah koefisien determinasi dari kovariat ke-k yang diregresikan terhadap kovariat lainnya [19].

9. Interpretasi Model Regresi Weibull

Interpretasi model RW dapat diperoleh berdasarkan nilai rasio pada kovariat yang berpengaruh. Nilai rasio regresi *survival* berdasarkan kovariat X_k kontinu [12], [20] adalah

$$\begin{aligned} R_s(X_k) &= \frac{S(y, \mathbf{x}|X_k + 1)}{S(y, \mathbf{x})} \\ &= \frac{exp\left[-y_i^{\hat{\gamma}} exp\left[-\hat{\gamma}\left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \cdots + \hat{\beta}_k(X_k + 1) + \cdots + \hat{\beta}_p X_p\right)\right]\right]}{exp\left[-y_i^{\hat{\gamma}} exp\left[-\hat{\gamma}\left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \cdots + \hat{\beta}_k X_k + \cdots + \hat{\beta}_p X_p\right)\right]\right]}. \end{aligned} \tag{43}$$

Berikut merupakan nilai rasio dari distribusi kumulatif Weibull untuk data kontinu

$$R_F(X_k) = \frac{F(y, \mathbf{x}|X_k + 1)}{F(y, \mathbf{x})} = \frac{1 - S(y, \mathbf{x}|X_k + 1)}{1 - S(y, \mathbf{x})}. \tag{44}$$

Berikut merupakan nilai rasio dari regresi *hazard* Weibull untuk data kontinu

$$R_h(X_k) = \frac{h(y, \mathbf{x}|X_k + 1)}{h(y, \mathbf{x})} = exp\left[-\hat{\gamma}\hat{\beta}_k\right]. \tag{45}$$

Berikut merupakan nilai rasio dari regresi *mean* Weibull untuk data kontinu

$$R_\mu(X_k) = \frac{\mu_y(\mathbf{x}|X_k + 1)}{\mu_y(x)} = exp\left[\hat{\beta}_k\right]. \tag{46}$$

10. Ukuran Kriteria Pemilihan Model Terbaik

Salah satu kriteria pemilihan model terbaik adalah berdasarkan kriteria nilai *Akaike Information Criterion* (AIC). Nilai AIC dihitung berdasarkan rumus

$$AIC = -2\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + 2K, \tag{47}$$

dengan $\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ merupakan nilai maksimum fungsi *log-likelihood* (42). Sementara itu, K adalah jumlah parameter pada model yang terbentuk [12]. Semakin kecil nilai AIC semakin baik model yang diperoleh.

METODE PENELITIAN

Data penelitian adalah data sekunder dari Dinas Lingkungan Hidup Provinsi Kalimantan Timur tahun 20222. Data penelitian terdiri dari variabel respon (Y) adalah DO air Sungai Mahakam dan kovariat terdiri dari suhu (X_1), derajat keasaman atau pH (X_2), Konsentrasi amonia (X_3), Konsentrasi Nitrat (X_4), Total Suspended Solid (X_5) dan Total Dissolved Solid (X_6). Data berasal dari hasil pengamatan di 33 titik lokasi DAS Mahakam Provinsi Kalimantan Timur. Adapun tahapan analisis data pada penelitian ini, yaitu :

1. Melakukan analisis statistika deskriptif.
2. Menaksir parameter distribusi versi skala-bentuk.
3. Melakukan pengujian data mengunakan uji Kolmogorov-Smirnov untuk mengetahui apakah data DO berdistribusi Weibull.
4. Pendeteksian multikolinieritas antar kovariat berdasarkan nilai VIF.
5. Melakukan penaksiran parameter model regresi Weibull.
6. Melakukan pengujian hipotesis secara serentak dan parsial.
7. Menghitung nilai AIC model regresi Weibull.
8. Interpretasi model berdasarkan nilai rasio regresi *survival* , nilai rasio regresi distribusi kumulatif, nilai rasio regresi *hazard*, dan nilai regresi *mean*.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Statistika Deskriptif

Deskripsi data penelitian disajikan dalam statistik deskriptif, dimana meliputi nilai minimum, nilai maksimum, *mean* (rata-rata), dan simpangan baku. Adapun statistika deskriptif data dalam riset ini disajikan dalam Tabel 1.

Tabel 1. Statistik Deskriptif

Variabel	Rata-rata	Maksimum	Minimum	Simpangan Baku
Y	5,12120	7	3,60000	0,93433
X_1	27,87900	32	25	1,47390
X_2	7,07700	7,83000	6,35000	0,32103
X_3	0,34455	5	0,01000	0,92998
X_4	0,31688	1,60000	0,02000	0,42781
X_5	172,83000	1,60000	4,50000	343,04000
X_6	59,756000	184	12	47,01100

Berdasarkan statistika deskriptif pada Tabel 1, Y adalah data DO, X_1 adalah suhu, X_2 adalah pH atau derajat keasaman, X_3 adalah konsentrasi amonia, X_4 adalah konsentrasi nitrat, X_5 adalah *Total Suspended Solid* (TSS), dan X_6 adalah *Total Dissolved Solid* (TDS). Berdasarkan Tabel 1, rata-rata DO air, yakni 5,1212 mg/l dan kurang dari 6 mg/l, interpretasinya adalah air Sungai Mahakam terindikasi kualitasnya kurang bagus, karena rata-rata DO di bawah angka baku mutu air golongan 1 sebagai bahan baku air bersih.

2. Pendugaan Parameter Distribusi Weibull

Pendugaan parameter distribusi Weibull pada data DO memakai metode MLE dan selanjutnya diselesaikan dengan memakai metode iteratif Newton-Raphson. Adapun hasil pendugaan parameter distribusi Weibull disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Parameter Distribusi Weibull

Parameter	Estimator
Skala (λ)	4,6694
Bentuk (γ)	6,7000

Merujuk Tabel 2 yang menyajikan hasil pendugaan parameter distribusi Weibull, maka diketahui bahwa estimator fungsi *survival* dan fungsi distribusi kumulatif berturut-turut adalah

$$\hat{S}(y) = exp\left[-\left(\frac{y}{4,6694}\right)^{6,7000}\right] \quad \text{dan} \quad \hat{F}(y) = 1 - exp\left[-\left(\frac{y}{4,6694}\right)^{6,7000}\right]. \tag{48}$$

3. Pengujian Distribusi Data

Pengujian distribusi data DO memakai uji K-S (Kolmogorov-Smirnov). Tujuan dilakukan pengujian ini, yakni untuk melihat apakah data DO diambil dari populasi DO yang berdistribusi Weibull dengan fungsi distribusi kumulatif diberikan oleh persamaan (48). Berikut merupakan hipotesis dari pengujian distribusi adalah

$H_0: F(y) = \hat{F}(y)$
(Data DO mengikuti distribusi Weibull dengan fungsi distribusi kumulatif $\hat{F}(y)$ yang diberikan oleh persamaan (54))

$H_1: F(y) \neq \hat{F}(y)$
(Data DO tidak mengikuti distribusi Weibull dengan fungsi distribusi kumulatif $\hat{F}(y)$ yang diberikan oleh persamaan (54))

Hasil perhitungan pengujian distribusi data dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3. Pengujian Distribusi Weibull Data *Dissolved Oxygen*

Statistik Uji D	$D_{(18;0,05)}$	Keputusan
0,2331	0,3090	Gagal menolak H_0

Merujuk Tabel 3 yang menyajikan hasil dari perhitungan statistik uji, maka uji hipotesis diputuskan gagal menolak H_0 pada taraf signifikansi 0,05, hal ini ditunjukkan oleh hasil perhitungan statistik uji $D = 0,2331 < D_{(0,05;18)} = 0,3090$. Kesimpulan pengujian adalah data DO mengikuti berdistribusi Weibull dengan fungsi distribusi diberikan oleh persamaan (48).

4. Pendeteksian Multikolinearitas

Pendeteksian multikolinearitas yang dilakukan penelitian ini berdasarkan nilai VIF. Berdasarkan hasil perhitungan nilai VIF pada semua kovariat pada Tabel 1, diketahui nilai VIF seluruh kovariat, yakni kurang dari 10, dengan demikian dapat diambil kesimpulan bahwa antar kovariat tidak terjadi multikolinearitas.

5. Pemilihan Model Regresi Weibull Terbaik

Kriteria pemilihan model terbaik, yakni model RW yang *fit* atau layak, model dengan nilai AIC paling kecil, dan semua kovariat dalam model berpengaruh. Berdasarkan pemodelan RW pada semua kombinasi 6 kovariat pada Tabel 1 dapat menghasilkan model sebanyak $2^6 - 1 = 63$. Berdasarkan kriteria pemilihan model terbaik didapatkan model terbaik adalah model RW dengan 3 kovariat, yakni suhu(X_1) konsentrasi nitrat (X_4) dan TSS(X_5). Model RW terbaik memberikan nilai AIC terkecil, yaitu sebesar 82,2403 dan semua kovariat dalam model berpengaruh.

6. Pendugaan Parameter Model Regresi Weibull Terbaik

Pendugaan parameter model RW terbaik memakai metode MLE dan selanjutnya diselesaikan dengan memakai metode Iteratif Newton-Raphson. Adapun hasil pendugaan parameter dapat dilihat pada Tabel 4.

Tabel 4. Pendugaan Parameter Model RW

Parameter	Estimator
γ	5,9131
β_0	4,3964
β_1	-0,0891
β_4	-0,2478
β_5	-0,0003

Berdasarkan Tabel 4 yang menyajikan hasil pendugaan parameter model RW yang merujuk pada persamaan (19), maka didapatkan model regresi *survival* Weibull, yakni

$$\hat{S}(y,\mathbf{x}) = \exp(-y^{5,9131}\exp(-25,9963 + 0,5268X_1 + 1,4652X_4 + 0,0017X_5)). \quad (49)$$

Model regresi distribusi kumulatif Weibull berdasarkan persamaan (20) adalah

$$\hat{F}(y,\mathbf{x}) = 1 - \hat{S}(y,\mathbf{x}) \quad (50)$$
$$\hat{F}(y,\mathbf{x}) = 1 - \exp(-y^{5,9131}\exp(-25,9963 + 0,5268X_1 + 1,4652X_4 + 0,0017X_5)).$$

Model regresi *hazard* Weibull yang berlandaskan persamaan (21), yakni

$$\hat{h}(y,\mathbf{x}) = 5,9131y^{4,9131}\exp(-25,9963 + 0,5268X_1 + 1,4652X_4 + 0,0017X_5, \quad (51)$$

dan model regresi *mean* Weibull yang berlandaskan persamaan (22), yakni

$$\hat{\mu}(y,\mathbf{x}) = 0,9269\exp(4,3964 - 0,0891X_1 - 0,2478X_4 - 0,0003X_5). \quad (52)$$

Model regresi *survival* pada persamaan (49) adalah model peluang air Sungai Mahakam tidak tercemar, model regresi distribusi kumulatif pada persamaan (50) adalah model peluang air Sungai Mahakam tercemar, model regresi *hazard* pada persamaan (51) adalah model laju (*rate*) pencemaran air Sungai Mahakam, dan model regresi *mean* pada persamaan (52) adalah model rata-rata DO air Sungai Mahakam.

7. Pengujian Hipotesis Parameter Model RW Terbaik Secara Serentak

Hipotesis pengujian parameter secara serentak adalah

$H_0: \beta_1 = \beta_4 = \beta_5 = 0$ (Model RW tidak layak (tidak *fit*))

$H_1: Minimal\ terdapat\ satu\ \beta_k \neq 0, k = 1{,}4{,}5$ (Model RW layak (*fit*))

Tabel 5 menguraikan hasil uji hipotesis secara serentak.

Tabel 5. Hasil Pengujian Hipotesis Parameter Model RW Secara Serentak

Statistik uji (G)	$\chi^2_{(0{,}05;3)}$	P_{value}	Keputusan
26,7005	7,8147	$6{,}8029 \times 10^{-6}$	Menolak H_0

Merujuk Tabel 5 yang menunjukkan hasil pengujian parameter RW secara serentak, maka diputuskan menolak H_0 pada taraf uji $\alpha = 0{,}05$. Hal ini dikonfirmasi dari hasil perhitungan statistik uji $G = 26{,}2607 > \chi^2_{(0{,}05;3)} = 7{,}8147$ dan $P_{value} = 6{,}8029 \times 10^{-6} < \alpha = 0{,}05$. Kesimpulan pengujian parameter secara serentak adalah model RW layak (*fit*) atau kovariat suhu, konsentrasi nitrat, dan TSS berpengaruh pada model RW.

8. Pengujian Hipotesis Parameter Model RW Terbaik Secara Parsial

Hipotesis pengujian parameter secara parsial untuk parameter β_k dengan $k = 0{,}1{,}4{,}5$ adalah

$H_0: \beta_k = 0$ (Variabel kovariat X_k tidak berpengaruh terhadap model RW)

$H_1: \beta_k \neq 0$ (Variabel kovariat X_k berpengaruh terhadap model RW)

Berikut merupakan hasil uji hipotesis RW secara parsial.

Tabel 6. Hasil Pengujian Hipotesis Parameter Model RW Secara Parsial

Kovariat	β	Penaksir	SE	|Z|	P_{value}	Keputusan
-	β_0	4,3964	0,8608	5,1075	$3{,}2641 \times 10^{-7}$	Menolak H_0
X_1	β_1	-0,0891	0,0300	2,9666	0,0030	Menolak H_0
X_4	β_4	-0,2478	0,0739	3,3518	0,0008	Menolak H_0
X_5	β_5	-0,0003	0,0001	2,7881	0,0053	Menolak H_0

Berdasarkan Tabel 6 yang menyajikan hasil pengujian empat parameter model RW secara parsial, maka diputuskan menolak H_0 pada taraf uji $\alpha = 0{,}05$. Hal ini ditunjukkan oleh nilai |Z| ketiga kovariat dan intersep tersebut masing-masing lebih dari $Z_{1-\alpha/2} = Z_{0{,}975} = 1{,}96$ dan P_{value} ketiga kovariat dan intersep tersebut masing-masing kurang dari 0,05. Kesimpulan pengujian hipotesis ini adalah secara individual kovariat suhu X_1, konsentrasi nitrat X_4, dan TSS X_5 berpengaruh pada model RW, dan intersep $(\hat{\beta}_0)$ signifikan berbeda dengan nol.

Pengaplikasian model-model RW yang diberikan oleh persamaan (55), (56), (57) dan (58) pada data sampel tahun 2022 diperoleh informasi potensi pencemaran air Sungai Mahakam berdasarkan data DO tahun 2022 disajikan pada Tabel 7.

Tabel 7. Informasi Pencemaran Air Sungai Mahakam Pada Data DO

$\hat{S}(y)$	$\hat{F}(y)$	$\hat{h}(y)$	$\hat{\mu}(y)$
0,6252	0,3747	0,2057	5,6348

Informasi potensi pencemaran air Sungai Mahakam berdasarkan Tabel 7 adalah peluang air sungai Mahakam tidak tercemar sebesar 0,6252, peluang air sungai Mahakam tercemar sebesar 0,3747, laju pencemaran air sungai Mahakam sebesar 0,2057 lokasi/*ppm* atau 2 lokasi per 10 *ppm*, dan rata-rata DO air sungai Mahakam sebesar 5,6348 *ppm*.

9. Interpretasi Model Regresi Weibull

Interpretasi Model RW bertujuan untuk memberi makna dan mengetahui apakah model RW yang diperoleh mengalami perubahan (kenaikan atau penurunan) setelah kenaikan nilai kovariat tertentu. Hasil perhitungan nilai rasio RW dapat dilihat pada Tabel 8.

Tabel 8. Nilai Rasio RW

Model Regresi	Rasio RW Setelah Kenaikan Satu Satuan Kovariat		
	X_1	X_4	X_5
Rasio regresi *survival*	0,5507	0,0571	0,9986
Rasio regresi distribusi kumulatif	1,3297	1,6919	1,0009
Rasio regresi *hazard*	1,6938	4,3292	1,1702
Rasio regesi *mean*	0,9147	0,7804	0,9233

Berdasarkan Tabel 8, nilai rasio regresi *survival*, regresi distribusi kumulatif, regresi *hazard*, dan regresi *mean* berdasarkan peningkatan suhu air 1° berturut-turut sebesar 0,5507, 1,3297, 1,6938, dan 0,9147. Interpretasinya adalah setiap kenaikan satu derajat suhu akan menurunkan peluang air Sungai Mahakam tidak tercemar menjadi 0,5507 kali; akan meningkatkan peluang air Sungai Mahakam tercemar menjadi 1,3297 kali; akan meningkatkan laju pencemaran air Sungai Mahakam menjadi 1,6938 kali; dan akan menurunkan DO air Sungai Mahakam menjadi 0,9147 kali.

Nilai rasio regresi *survival*, regresi distribusi kumulatif, regresi *hazard*, dan regresi *mean* berdasarkan peningkatan konsentrasi nitrat 1 *mg/l* berturut-turut sebesar 0,0571, 1,6919, 4,3292, dan 0,7804. Interpretasinya adalah setiap kenaikan satu *mg/l* konsentrasi nitrat akan menurunkan peluang air Sungai Mahakam tidak tercemar menjadi 0,0571 kali; akan meningkatkan peluang air Sungai Mahakam tercemar menjadi 1,6919 kali; akan meningkatkan laju pencemaran air Sungai Mahakam menjadi 4,3292 kali; dan akan menurunkan DO air Sungai Mahakam menjadi 0,7804 kali.

Nilai rasio regresi *survival*, regresi distribusi kumulatif, regresi *hazard*, dan regresi *mean* berdasarkan peningkatan TSS 1 *mg/l* berturut-turut sebesar 0,9986, 1,0009, 1,1702, dan 0,9233. Interpretasinya adalah setiap kenaikan satu *mg/l* TSS akan menurunkan peluang air Sungai Mahakam tidak tercemar menjadi 0,9986; akan meningkatkan peluang air Sungai Mahakam tercemar menjadi 1,0009 kali; akan meningkatkan laju pencemaran air Sungai Mahakam menjadi 1,1702 kali; dan akan menurunkan DO air Sungai Mahakam menjadi 0,9233 kali.

PENUTUP

Berdasarkan hasil pemodelan Regresi Weibull pada data DO air Sungai Mahakam tahun 2022 diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Model regresi *survival* Weibull adalah model peluang air Sungai Mahakam tidak tercemar, model regresi distribusi kumulatif Weibull adalah model peluang air Sungai Mahakam tercemar, model regresi *hazard* Weibull adalah model laju (*rate*) pencemaran air Sungai Mahakam, dan model regresi *mean* Weibull adalah model rata-rata DO air Sungai Mahakam.

2. Faktor-faktor yang berpengaruh terhadap potensi pencemaran air Sungai Mahakam adalah suhu, konsentrasi nitrat, dan TSS.
3. Informasi potensi pencemaran air Sungai Mahakam berdasarkan pemodelan RW pada data DO tahun 2022 adalah peluang air Sungai Mahakam tidak tercemar sebesar 0,6252, peluang air Sungai Mahakam tercemar sebesar 0,3747, laju pencemaran air Sungai Mahakam sebesar 0,2057 lokasi/*ppm* atau 2 lokasi per 10 *ppm* dan rata-rata DO air Sungai Mahakam sebesar 5,6348 *ppm*.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Sudarman, A. R., Suyitno, S., & Siringoringo, M. (2023). Pemodelan Regresi Weibull Pada Data Kontinu Yang Diklasifikasikan (Studi kasus: Data Indikator Pencemaran Air Dissolved Oxygen Pada DAS Mahakam Kalimantan Timur Tahun 2020). *Jurnal Eksponensial.* https://doi.org/10.30872/eksponensial.v14i1.993

[2] Chairina, P., Suyitno, & Siringoringo, M. (2020). Univariate Weibull Regression Models on Water Pollution Indicator of Dissolved Oxygen In Watersheds of East Borneo Tropical Rainforest Environment. *Jurnal EksponensialL*, 11(1), 19–28

[3] Panduwinata, H. D., Suyitno, S., & Huda, M. N. (2022). Model Regresi Weibull Pada Data Kontinu yang Diklasifikasikan. *Jurnal Eksponensial.* https://doi.org/10.30872/eksponensial.v13i2.1051

[4] Indira Puteri Kinasih (2021). *Distribusi Weibull Konsep Dasar dan Aplikasiannya*. Mataram: Sanabil

[5] Mega Gustiani, Suyitno, & Nasution, Y. N. (2019). Pengaplikasian Model Regresi Weibull Univariat Pada Data Waktu (Tersensor Kanan) Rawat Inap Pasien Dbd Di Rs Dirgahayu Samarinda. Prosiding Seminar Nasional Matematika, Statistika, Dan Aplikasinya 2019, 1(5), 158–163

[6] Nur Annisa, N. A., Hakim, A., & Setyowati, R. D. N. (2022). Analisis Status Mutu Air Sungai Mahakam Kota Samarinda Menggunakan Metode Indeks Pencemaran. *Jurnal Serambi Engineering*. https://doi.org/10.32672/jse.v7i4.5106

[7] Madyawan, D., Hendrawan, I. G., & Suteja, Y. (2020). Pemodelan Oksigen Terlarut (Dissolved Oxygen/DO) di Perairan Teluk Benoa. *Journal of Marine and Aquatic Sciences*, 6(2), 270. https://doi.org/10.24843/jmas.2020.v06.i02.p15

[8] Pemerintah Republik Indonesia. (2021). Peraturan Pemerintah Nomor 22 Tahun 2021 tentang Pedoman Perlindungan dan Pengelolaan Lingkungan Hidup. *Sekretariat Negara Republik Indonesia*, *1*(078487A), 483. http://www.jdih.setjen.kemendagri.go.id/

[9] Suyitno, & Sari, N. W. W. (2019). Parameter estimation of mixed geographically weighted weibull regression model. *Journal of Physics: Conference Series*, 1277(1). https:// doi.org/10.1088/1742-6596/1277/1/012046

[10] Suyitno, S. (2017). Penaksiran Parameter dan Pengujian Hipotesis Model Regresi Weibull Univariat. *Jurnal Eksponensial*, 8(2), 179. https://doi.org/10.30872/eksponensial.v8i2.41

[11] Dwi Lestari, V., & Siringoringo, M. (2021). Analisis faktor-faktor yang berpengaruh terhadap pencemaran air Sungai Mahakam menggunakan pemodelan

geographically weighted logistic Regression pada data dissolved oxygen. *Jurnal Eksponensial*, 12(1), 37–46.

[12] Khairunnisa, S. F., Suyitno, S., & Mahmuda, S. (2023). Weibull Regression Model on Hospitalization Time Data of COVID-19 Patients at Abdul Wahab Sjahranie Hospital Samarinda. *Jurnal Matematika, Statistika Dan Komputasi*, 19(2), 286–303. https://doi.org/10.20956/j.v19i2.22266

[13] Azizah, N.-, Suyitno, S., & Hayati, M. N. (2023). Pemodelan Laju Kematian Pasien Covid-19 di RSUD Abdul Wahab Sjahranie Samarinda menggunakan Model Regresi Weibull. *Journal of Mathematics Computations and Statistics*. https://doi.org/10.35580/jmathcos.v6i1.36379

[14] Suyitno, Darnah Andi Nohe, Ika Purnamasari, Meiliyani Siringoringo, Rito Goejantoro, dan M. N. R. (2022). Monograf Pemodelan Regresi Weibull Pada Potensi Pencemaran Sungai Mahakam. In *Angewandte Chemie International Edition,* 6(11), 951–952.

[15] Suyitno, Purhadi, Sutikno, & Irhamah. (2017). Multivariate Weibull regression model. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. https://doi.org/10.17654/MS101091977

[16] Fajriati, N. A., Suyitno, S., & Wasono, W. (2022). Model Regresi Hazard Rate Weibull Kesembuhan Pasien Rawat Inap Demam Berdarah Dengue (DBD) Di RSUD Panglima Sebaya Tanah Grogot. *Eksponensial*, 13(1), 35. https://doi.org/10.30872/eksponensial. v13i1.878

[17] Rahmah, S. M., Suyitno, S., & Siringoringo, M. (2021). Model Geographically Weighted Weibull Regression pada Indikator Pencemaran Air Biochemical Oxygen Demand di Daerah Aliran Sungai Mahakam. *Eksponensial.* https://doi.org/10.30872/eksponensial.v12i2.804

[18] Damayanti, S., Wuryandari, T., & Sudarno, S. (2024). Perbandingan Analisis Survival Menggunakan Regresi Cox Proportional Hazard dan Regresi Weibull Pada Pasien Covid-19 Di RSUD Taman Husada Bontang. *Jurnal Gaussian*. https://doi.org/10.14710/ j.gauss.12.3.453-464

[19] Dwi Primadigna, U. S., Suyitno, S., & Siringoringo, M. (2022). Model Geographically Weighted Weibull Regression Pada Indikator Pencemaran Air COD di Daerah Aliran Sungai Mahakam Kalimantan Timur. *Eksponensial* https://doi.org/10.30872/eksponensial. v13i2.1050

[20] Pradipa, Z., & Siringoringo, M. (2024). *Weibull Regression Model Analysis of Mahakam River Water Pollution Potential*. 8(1), 67–78.