

Aplikasi Pewarnaan Graf untuk Optimalisasi Distribusi Beras di Badan Usaha Logistik (BULOG) Kota Samarinda

Nuryatma Nuryatma^{1,*}, Wasono Wasono², Fidia Deny Tisna Amijaya³

¹ Universitas Mulawarman

² Laboratorium Matematika Komputasi Jurusan Matematika FMIPA Universitas Mulawarman

³ Laboratorium Matematika Dasar Jurusan Matematika FMIPA Universitas Mulawarman

Dikirim: Mei 2023;

Diterima: Maret 2024;

Dipublikasi: Maret 2024

Alamat Email Korespondensi: wason.khayla32@gmail.com

Abstrak

Pendistribusian barang atau jasa merupakan salah satu bagian terpenting bagi setiap instansi pemerintahan maupun perusahaan swasta. Proses pendistribusian dapat mengalami permasalahan transportasi. Salah satu permasalahan transportasi yang terjadi dalam proses pendistribusian dialami oleh Perusahaan Umum Badan Usaha Logistik (Perum BULOG) dalam melakukan distribusi bantuan sosial berupa Beras BST-BB PPKM tahun 2021 di Kota Samarinda. Permasalahan transportasi tersebut dapat diselesaikan dengan teori graf yaitu pewarnaan graf menggunakan algoritma Welch-Powell, metode transportasi yaitu metode *North West Corner* (NWC) dan metode *Stepping Stone* (SS). Tujuan Penelitian adalah untuk mendapatkan solusi optimal dalam pendistribusian beras BST BB-PPKM 2021 di kota Samarinda. Data yang digunakan adalah pendistribusian beras BST berupa biaya distribusi, jarak dan beban Bahan Bakar Minyak (BBM) pada tiap wilayah distribusi, persediaan beras BST pada tiap gudang, dan penerima manfaat beras tersebut di 10 kecamatan Kota Samarinda. Hasil analisis penelitian, diperoleh pewarnaan graf menggunakan metode transportasi menjadi solusi optimal dalam pendistribusian beras BST dengan membandingkan perhitungan data awal distribusi, data sebelum dan sesudah pewarnaan graf. Pembagian wilayah distribusi setelah pewarnaan graf menjadi empat wilayah dengan jadwal pengiriman menjadi empat hari. Biaya distribusi berdasarkan data pendistribusian awal sebesar Rp 1.238.687,6, sebelum (solusi awal sebesar Rp 1.238.687,6 dan solusi optimal Rp 1.233.058,6) dan sesudah pewarnaan graf (solusi awal sebesar Rp 1.223.715,6 dan solusi optimal Rp 1.219.578).

Kata Kunci:

algoritma welch-powell, north west corner, pendistribusian beras BST, pewarnaan graf, stepping stone

PENDAHULUAN

Era globalisasi saat ini, bagi setiap instansi pemerintah maupun perusahaan swasta terdapat beberapa hal penting untuk mengembangkan usahanya, salah satunya yaitu pendistribusian barang atau jasa [1]. Pada umumnya, pendistribusian yang dilakukan setiap instansi pemerintah maupun perusahaan swasta mengalami suatu permasalahan transportasi [2]. Masalah transportasi berhubungan bagaimana caranya produk tersebut melewati jalur-jalur tertentu, dari sumber-sumber yang menyediakan produk ke tempat tujuan, sehingga dapat memaksimalkan keuntungan dan meminimumkan biaya. Pengiriman produk dapat dikatakan optimal jika didukung dengan adanya rencana

pengalokasian yang tepat, sehingga akan menghasilkan biaya transportasi yang minimum [3].

Pendistribusian produk yang dilakukan Perusahaan umum Badan Usaha Logistik (Perum BULOG) juga dapat mengalami permasalahan transportasi [4]. Salah satu tugas Perum BULOG yaitu menyalurkan Bantuan Beras Pemberlakuan Pembatasan Kegiatan Masyarakat (BB-PPKM) tahun 2021 yang dilaksanakan di seluruh Indonesia. Perum BULOG Divre Kaltim, salah satunya Sub Divre Samarinda melakukan kegiatan pendistribusian produk beras tersebut untuk wilayah kota Samarinda. Pendistribusian dilakukan dari gudang-gudang ke titik-titik distribusi di setiap wilayah kecamatan [5]. Suatu metode dalam bidang matematika yang dapat mendukung optimalnya pendistribusian untuk mengatasi permasalahan transportasi, yaitu menggunakan metode transportasi pada teori riset operasi [3].

Metode transportasi digunakan untuk mengatur distribusi dari sumber yang menyediakan produk ke tempat yang membutuhkan secara optimal. Ada beberapa metode untuk mencari solusi awal, salah satunya yaitu metode *North West Corner* (NWC) [6]. Kekurangan yang terdapat pada metode NWC adalah metode ini tidak mengalokasikan produk sebanyak mungkin pada kotak sel yang memiliki biaya transportasi terkecil, maka akan dioptimalkan lagi dengan Metode *Stepping Stone* (SS) [3]. Selain itu, permasalahan transportasi juga dapat diaplikasikan dalam teori graf [7].

Teori graf merupakan salah satu cabang dalam ilmu matematika yang mempelajari sifat-sifat yang dimiliki suatu graf. Suatu graf G adalah suatu diagram yang memuat titik-titik, yang disebut simpul, dan garis yang menghubungkan simpul-simpul disebut sisi. Pewarnaan simpul graf adalah memberi warna pada simpul-simpul suatu graf sedemikian sehingga tidak ada dua simpul yang bertetangga yang mempunyai warna yang sama. Ada tiga macam pewarnaan graf [8]. Salah satu upaya untuk mengatasi permasalahan transportasi dan mengoptimalkan pendistribusian beras BST di wilayah kota Samarinda adalah dengan pewarnaan simpul menggunakan algoritma Welch-Powell. Algoritma Welch-Powell telah digunakan dalam penelitian sebelumnya oleh Azizah dan Suryawinata (2018) dengan judul penelitian "Aplikasi Pewarnaan Graf untuk Optimalisasi Distribusi Raskin di Kabupaten Sidoarjo". Selain itu, Meiliana dan Maryono (2014) dengan judul penelitian "Aplikasi Pewarnaan Graf untuk Optimalisasi Pengaturan *Traffic Light* di Sukoharjo". Penelitian selanjutnya menggunakan algoritma Welch-Powell Sunarni, Bendi dan Alfian (2017) dengan judul penelitian "Optimasi Penjadwalan Mata Kuliah Menggunakan Pewarnaan Graf". Sedangkan pada artikel ini metode Welch-Powell digunakan untuk optimalisasi distribusi produk beras BST BB-PPKM 2021 di Badan Usaha Logistik (BULOG) sub Divre Samarinda dengan metode transportasi yaitu metode *North West Corner* (NWC) dan metode *Stepping Stone* (SS).

LANDASAN TEORI

Riset Operasi berkenaan dengan pengambilan keputusan optimal dalam penyusunan model dari sistem-sistem baik deterministik maupun probabilistik yang berasal dari kehidupan nyata [9]. Teknik-teknik Riset Operasi yang paling banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari antara lain; *linear programming* (metode grafik, metode simplek dan penyimpanan dari bentuk standar), metode transportasi (metode *stepping stone*, metode *modified distribution*, dan *vogel's approximation method*), *decision theory* (problem-problem keputusan), *network planning* (*critical path method*, metode algoritma, perpendekan waktu proyek, penaksiran jangka waktu dan biaya proyek),

perencanaan kebutuhan bahan (*economic order quantity, reorder point, model penyeimbangan biaya total, buffer stock*) [10].

Model Transportasi adalah suatu metode-metode yang dapat digunakan untuk memecahkan masalah transportasi atau pengiriman barang atau bahan dari beberapa sumber, ke beberapa tempat tujuan dengan prinsip biaya yang paling minimum [10]. Metode transportasi merupakan suatu metode yang digunakan untuk mengatur distribusi dari sumber-sumber yang menyediakan produk yang sama ke tempat-tempat yang membutuhkan secara optimal dengan biaya yang ter murah. Alokasi produk ini harus diatur sedemikian rupa karena terdapat perbedaan biaya-biaya alokasi dari satu sumber atau beberapa sumber ke tempat tujuan yang berbeda [11]. Secara umum, model dalam permasalahan transportasi dapat digambarkan dalam suatu tabel yang menunjukkan sisi penawaran (asal) dan sisi permintaan (tujuan), kapasitas penawaran dan jumlah permintaan serta biaya transportasi dari masing-masing sumber ke masing-masing tujuan, sebagaimana dalam Tabel 1.

Tabel 1. Model Transportasi

Asal Tujuan	T1	T2	T3	...	T _n	Kapasitas Pabrik
A ₁	c_{11} X_{11}	c_{12} X_{12}	c_{13} X_{13}	...	c_{1n} X_{1n}	s ₁
A ₂	c_{21} X_{21}	c_{22} X_{22}	c_{23} X_{23}	...	c_{2n} X_{2n}	s ₂
A ₃	c_{31} X_{31}	c_{12} X_{12}	c_{13} X_{13}	...	c_{3n} X_{3n}	s ₃
⋮	⋮	⋮	⋮
A _m	c_{m1} X_{m1}	c_{m2} X_{m2}	c_{m3} X_{m3}	...	c_{mn} X_{mn}	s _n
Permintaan Penjualan	d ₁	d ₂	d ₃	...	d _n	

Formulasi model transportasi:

1. Fungsi tujuan (Z) : mewakili total biaya transportasi untuk tiap rute.
 2. batasan I : mewakili *supply*
 3. batasan II : mewakili *demand*
- dalam bentuk matematika, permasalahan transportasi tersebut dapat dirumuskan sebagai berikut:

fungsi tujuan:

$$\text{minimumkan } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} X_{ij} \quad (1)$$

dengan batasan:

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = s_i \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = d_j \text{ untuk } j = 1, 2, \dots, n$$

$$X_{ij} \geq 0 \text{ untuk semua } i \text{ dan } j$$

dimana:

Z = total biaya transportasi

X_{ij} = jumlah barang yang harus diangkut dari i ke j

c_{ij} = biaya angkut per unit barang dari i ke j

s_1 = banyaknya barang yang tersedia di tempat i

d_j = banyaknya permintaan barang di tempat tujuan j

m = jumlah tempat asal

n = jumlah tempat tujuan

Metode pemecahan masalah metode transportasi digunakan dengan solusi layak awal dapat ditentukan dengan tiga metode alternatif, yaitu; Metode *North West Corner*, Metode Biaya Sel Minimum, Metode *Vogel's Aproximation*. Setelah solusi awal ditentukan oleh salah satu dari ketiga metode di atas, langkah selanjutnya adalah menentukan solusi optimal yang dapat ditentukan dengan dua metode alternatif, yaitu; Metode *Stepping Stone*, Metode Distribusi yang Dimodifikasi (Modi) [9].

Metode North West Corner (NWC) merupakan metode yang paling sederhana di antara tiga metode lainnya [9]. Metode ini merupakan metode untuk menyusun tabel awal dengan cara mengalokasikan distribusi barang mulai dari sel yang terletak pada sudut paling kiri atas [12]. Langkah-langkah penyelesaian:

1. Mulai pada pojok barat laut tabel dan alokasikan sebanyak mungkin pada X_{11} tanpa menyimpang dari kendala penawaran atau permintaan (artinya X_{11} ditetapkan sama dengan yg terkecil di antara s_1 dan d_1).
2. Ini akan mengabdikan penawaran pada sumber 1 atau permintaan tujuan 1. Akibatnya, tidak ada lagi barang yang dapat dialokasikan ke kolom atau baris yang telah dihabiskan dan kemudian baris atau kolom itu dihilangkan. Kemudian alokasikan sebanyak mungkin ke kotak di dekatnya pada baris atau kolom yang tidak dihilangkan. Jika kolom maupun baris telah dihabiskan, pindahkan secara diagonal ke kotak berikutnya.
3. Lanjutkan dengan cara yang sama sampai semua penawaran telah dihabiskan dan keperluan permintaan telah dipenuhi [13].

Metode Stepping Stone (SS) adalah suatu metode yang dapat digunakan untuk menentukan solusi optimal dengan menekan kebawah biaya transportasi dengan memasukkan variabel non basis (yaitu alokasi barang ke kotak kosong) ke dalam solusi [9]. Prinsip dasar dari metode ini adalah menentukan apakah suatu rute transportasi yang tidak digunakan pada saat ini (yaitu sebuah sel yang kosong) akan menghasilkan total biaya yang lebih rendah jika digunakan [9]. Adapun langkah-langkah penyelesaian sebagai berikut.

1. Diawali dengan mengisi tabel menggunakan salah satu metode transportasi awal atau *initial solution*, yang dapat berupa:
 - a) Metode *North West Corner* (NWC)
 - b) Metode *Least Cost* (LC)
 - c) Metode *Vogel's Aproximation* (VAM)

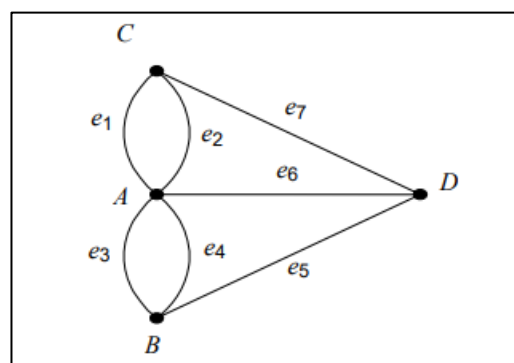
2. Setiap variabel non basis (kotak kosong) dievaluasi dengan cara menyusun jalur tertutup. Hanya ada satu jalur tertutup untuk setiap kotak kosong. Tujuan penyusunan jalur ini untuk mempertahankan kendala penawaran dan pertimbangan sambil dilakukan alokasi ulang barang ke suatu kotak kosong.
3. Setiap evaluasi kotak kosong akan menyebabkan perubahan biaya c_{ij} (penambahan atau pengurangan biaya).
4. Pilih variabel non basis (kotak kosong) yang menyebabkan pengurangan biaya (c_{ij} negatif) dan ia akan menjadi *entering variabel*, lalu alokasikan sebanyak mungkin ke kotak kosong tersebut. Alokasi harus sesuai dengan jalur *stepping stone* yang telah disusun.
5. Jika terdapat dua atau lebih variabel non basis (kotak kosong) dengan perubahan biaya c_{ij} negatif, maka dipilih satu yang memiliki perubahan menurunkan biaya yang terbesar sebagai *entering variable*. Jika terdapat nilai kembar, pilih secara sembarang.
6. Lakukan hal yang sama (evaluasi kembali setiap variabel non basis/kotak kosong pada tabel yang telah diperbarui), sampai semua kotak kosong menyebabkan penambahan biaya (semua c_{ij} positif) atau tidak ada lagi c_{ij} negatif, artinya solusi optimum telah dicapai [13].

Teori Graf dikenalkan oleh Euler pada tahun 1736 melalui tulisan yang berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan Königsberg yang sangat terkenal di Eropa. Suatu graf terdiri dari suatu himpunan tak kosong yang masing-masing unsurnya disebut titik (*vertex*) dan suatu himpunan pasang tak berurutan dari titik-titik tersebut yang disebut sisi (*edge*). G melambangkan suatu graf, himpunan titik di graf G dinyatakan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi di graf G dinyatakan dengan $E(G)$. Jika banyak titik dan banyak sisi di G terhingga, maka G disebut graf terhingga. Notasi sebuah graf adalah $G = (V, E)$, dimana:

1. V merupakan himpunan tak kosong dari simpul-simpul (*vertices*), misalkan $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.
2. E merupakan himpunan sisi-sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang simpul, misalkan $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ [12].

Contoh :

Graf dari masalah jembatan Königsberg dapat disajikan sebagai berikut.



Gambar 1. Representasi graf masalah jembatan Königsberg

Misalkan graf tersebut adalah $G = (V, E)$ dengan

$$V = \{A, B, C, D\}$$

$$E = \{(A, C), (A, C), (A, B), (A, B), (B, D), (A, D), (C, D)\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$

pada graf tersebut sisi $e_1 = (A, C)$ dan sisi $e_2 = (A, C)$ dinamakan sisi-ganda (*multiple edges* atau *parallel edges*) karena kedua sisi ini menghubungkan dua buah simpul yang sama, yaitu simpul A dan simpul C . Begitu pun dengan sisi e_3 dan sisi e_4 . Sementara itu, pada

graf di atas, tidak terdapat gelang (*loop*), yaitu sisi yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama [11].

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa jenis bergantung pada sudut pandang pengelompokkannya. Pengelompokan graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya sisi ganda atau sisi kalang, berdasarkan jumlah simpul, atau berdasarkan orientasi arah pada sisi. Berdasarkan ada tidaknya sisi ganda pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis yaitu graf sederhana dan graf tak sederhana [14].

Pewarnaan graf adalah kasus khusus dari memberikan warna pada titik-titik dengan batas tertentu [11]. Pewarnaan graf dapat dilakukan dengan 3 cara yaitu dengan pewarnaan titik/simpul (*vertex*), pewarnaan sisi (*edge*), dan pewarnaan wilayah (*region*) [4].

1. Pewarnaan titik/simpul (*vertex*)

Pewarnaan titik/simpul pada graf membahas permasalahan yang berhubungan dengan pemberian warna atau label pada setiap titik/simpul. Permasalahan tersebut erat kaitannya dengan masalah pewarnaan peta, yaitu masalah menentukan banyak warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai peta sehingga dua daerah yang bertetangga mempunyai warna berlainan [11].

2. Pewarnaan sisi (*edge*)

Pewarnaan sisi merupakan pemberian warna pada setiap sisi yang ada pada graf sehingga sisi-sisi yang saling berhubungan tidak memiliki warna yang sama [15].

3. Pewarnaan wilayah (*region*)

Pewarnaan wilayah merupakan pemberian warna pada setiap wilayah pada graf sehingga tidak ada wilayah yang bersebelahan memiliki warna yang sama [15].

Algoritma Welch-Powell merupakan salah satu algoritma pewarnaan graf yang melakukan pewarnaan berdasarkan derajat tertinggi dari simpul-simpulnya atau disebut *largest degree ordering*. Algoritma ini dapat digunakan untuk pewarnaan sebuah graf secara efisien. Akan tetapi algoritma ini tidak selalu memberikan jumlah minimum warna yang diperlukan untuk mewarnai. Walaupun demikian, algoritma ini praktis untuk digunakan dalam mewarnai simpul graf [16].

Berikut ini adalah langkah-langkah pewarnaan graf menggunakan algoritma Welch-Powell:

1. Urutkan simpul-simpul dari graf G dalam derajat yang menurun.
2. Gunakan satu warna untuk mewarnai simpul pertama (yang memiliki derajat tertinggi) dan simpul-simpul lain (dalam urutan yang berurutan) yang tidak bertetangga dengan simpul pertama.
3. Mulai lagi dengan simpul derajat tertinggi berikutnya di dalam daftar terurut yang belum diwarnai dan ulangi proses pewarnaan simpul dengan menggunakan warna kedua.
4. Ulangi penambahan warna-warna sampai semua simpul telah diwarnai [17].

Metodologi Penelitian

Pada penelitian ini yang menjadi populasi adalah keseluruhan pendistribusian beras BB-PPKM yang dilakukan Perum BULOG Sub Divre Samarinda pada Tahun 2021. Sampel yang digunakan pada penelitian ini adalah pendistribusian beras BST BB-PPKM yang dilakukan Perum BULOG Sub Divre Samarinda pada tiap wilayah di Kecamatan Samarinda Tahun 2021. Teknik *Sampling* yang digunakan pada penelitian ini adalah *purposive sampling*. Variabel yang digunakan yaitu titik tempat distribusi beras, data persediaan,

permintaan, dan tarif angkut untuk distribusi Beras BST BB-PPKM Perum BULOG Sub Divre Samarinda pada tiap wilayah di kecamatan Samarinda.

Adapun tahapan analisis yang dilakukan adalah sebagai berikut.

1. Melakukan pengumpulan data penelitian.
2. Menyusun tabel transportasi dengan data penelitian dan data berdasarkan hasil pembagian titik pewarnaan graf dan menggunakan pada Tabel 1.
3. Pengujian data menggunakan penyelesaian awal berupa metode *North West Corner* (NWC) pada data penelitian.
4. Pengujian data menggunakan metode *Stepping Stone* (SS) sebagai solusi oprimal pada data penelitian.
5. Melakukan pewarnaan graf menggunakan algoritma Welch-Powell pada peta wilayah Samarinda untuk memperoleh pembagian titik distribusi beras berdasarkan pewarnaan graf.
6. Pengujian data menggunakan penyelesaian awal berupa metode *North West Corner* (NWC) pada data distribusi setelah pewarnaan graf.
7. Pengujian data menggunakan metode *Stepping Stone* (SS) sebagai solusi oprimal pada data setelah pewarnaan graf

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Melakukan pengumpulan data penelitian.

Pengumpulan data dilakukan dengan pengajuan permintaan data kepada pihak Perum BULOG Sub Divre Samarinda. Permintaan data sesuai dengan kebutuhan pada penelitian yang dilakukan untuk wilayah kota Samarinda. Berikut Tabel 2 merupakan jumlah kapasitas persediaan beras BB-PPKM 2021 untuk BST disetiap gudang.

Tabel 2. Data Jumlah Persediaan beras medium BST BB-PPKM 2021

Gudang	Suplay BST BB-PPKM 2021 per Kg Beras
Gudang Karang Asam II (a)	54.500
Gudang Karang Asam II (b)	55.850
Total	110.350

Selain data kapasitas persediaan beras, berikut ini ialah data penerima Bantuan Sosial Tunai (BST) di setiap kecamatan kota Samarinda pada tiap titik distribusi yang terbagi menjadi empat wilayah distribusi berdasarkan jadwal pengirimannya, sebagaimana dalam Tabel 3.

Tabel 3. Pengelompokan Titik Distribusi Berdasarkan Jadwal Pengiriman

No	Gudang	Wilayah Distribusi	Jadwal Pengiriman	Kecamatan	Alokasi BST/Kg Beras	Total BST	Suplay BST BB-PPKM 2021
1	Karang Asam Ulu II (a)	Wilayah I	29/07/2021	Palaran	13.470	27.940	54.500
			05/08/2021	Sungai Pinang	14.470		
		Wilayah II	30/07/2021	Samarinda Ilir	8.190	28.500	
				Samarinda Kota	5.730		
				Sambutan	14.580		

Tabel 3. Pengelompokan Titik Distribusi Berdasarkan Jadwal Pengiriman (lanjutan)

No	Gudang	Wilayah Distribusi	Jadwal Pengiriman	Kecamatan	Alokasi BST/Kg Beras	Total BST	Suplay BST BB-PPKM 2021
2	Karang Asam Ulu II (b)	Wilayah III	31/07/2021	Loa Janan Ilir	10.140	32.040	55.850
				Samarinda Utara	14.310		
		Wilayah IV	01/08/2021	Sungai Kunjang	7.590		
				Samarinda Seberang	6.750	21.870	
				Samarinda Ulu	15.120		

Adapun biaya distribusi dari tiap gudang ke tiap wilayah distribusi ditunjukkan pada Tabel 4.

Tabel 4. Biaya Distribusi dari setiap Sumber (Gudang) ke Setiap Wilayah Distribusi

Gudang	Biaya (Rp) Distribusi Wilayah I/Kg Beras BST				
	Tujuan	Wilayah I	Wilayah II	Wilayah III	Wilayah IV
Karang Asam Ulu II (a)		13,29	11,57	12,05	5,48
Karang Asam Ulu II (b)		13,74	12,21	12,7	5,92

- Menyusun tabel transportasi dengan data penelitian dan data berdasarkan hasil pembagian titik pewarnaan graf dan menggunakan pada Tabel 1
Berdasarkan data-data yang diperoleh dapat terbentuk Model Transportasi yang ditunjukkan pada Tabel 5

Tabel 5. Model Transportasi

Sumber Tujuan	Wilayah I	Wilayah II	Wilayah III	Wilayah IV	Total BST BB-PPKM 2021 (s_i)
Karang Asam Ulu II (a)	13,29	11,57	12,05	5,48	54.500
Karang Asam Ulu II (b)	13,74	12,21	12,7	5,92	55.850
Total BST (d_j)	27.940	28.500	32.040	21.870	$\sum d_j = \sum s_i$

Misalkan X_{ij} : banyaknya beras BST yang akan dikirimkan dari sumber gudang, i ($i = 1, 2, 3, \dots, m$) ke wilayah distribusi j ($j = 1, 2, 3, \dots, n$) maka, minimumkan $Z = 13,29(X_{11}) + 11,57(X_{12}) + 12,05(X_{13}) + 5,48(X_{14}) + 13,74(X_{21}) + 12,21(X_{22}) + 12,7(X_{23}) + 5,92(X_{24})$

batasan batasan:

Batasan 1: Total BST BB-PPKM 2021:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 54.500$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 55.850$$

Batasan 2: Total BST:

$$X_{11} + X_{21} = 27.940$$

$$X_{12} + X_{22} = 28.500$$

$$X_{13} + X_{23} = 32.040$$

$$X_{14} + X_{24} = 21.870$$

Dari tabel 5, terlihat bahwa permintaan (d_j) memiliki nilai yang sama dengan persediaan (s_i) sehingga permasalahan transportasi tersebut tidak memiliki *Dummy* (D) yang artinya sisa dari permintaan. Pernyataan ini mempunyai fungsi tujuan seperti pada Persamaan (1).

$$\text{minimumkan } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} X_{ij} \quad (1)$$

dengan batasan:

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = s_i \quad \text{untuk } i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = d_j \quad \text{untuk } j = 1, 2, \dots, n$$

$$X_{ij} \geq 0$$

3. Pengujian data menggunakan penyelesaian awal berupa metode *North West Corner* (NWC) pada data penelitian.

Data pengiriman beras BST BB-PPKM 2021 akan diperhitungkan dengan menggunakan metode NWC yang dapat dilihat pada Tabel 6

Tabel 6. Hasil Pengalokasian Menggunakan Metode NWC

Sumber Tujuan	Wilayah I	Wilayah II	Wilayah III	Wilayah IV	Total BST BB-PPKM 2021
Karang Asam Ulu II (a)	13,29	11,57	12,05	5,48	54.500
	27.940	26.560	0	0	
Karang Asam Ulu II (b)	13,74	12,21	12,7	5,92	55.850
	0	1.940	32.040	21.870	
Total BST	27.940	28.500	32.040	21.870	

Berdasarkan Tabel 6, terlihat bahwa seluruh kebutuhan baris dan kolom sudah terpenuhi yang berarti solusi awal telah diperoleh. Menghitung total biaya minimum dengan menggunakan persamaan (1).

$$Z = 13,29(X_{11}) + 11,57(X_{12}) + 12,05(X_{13}) + 5,48(X_{14}) + 13,47(X_{21}) + 12,21(X_{22}) + 12,7(X_{23}) + 5,92(X_{24})$$

$$Z = 13,29(27.940) + 11,57(26.560) + 12,05(0) + 5,48(0) + 13,47(0) +$$

$$12,21(1.940) + 12,7(32.040) + 5,92(21.870)$$

$$Z = 371.322,6 + 307.299,2 + 0 + 0 + 0 + 23.687,4 + 406.908 + 129.470,4$$

$$Z = Rp 1.238.687,6$$

Sehingga total biaya distribusi diperoleh sebesar Rp 1.238.687,6.

4. Pengujian data menggunakan metode *Stepping Stone* (SS) sebagai solusi optimal pada data penelitian.

Proses selanjutnya setelah mendapatkan solusi awal yaitu melakukan proses optimalisasi, dengan menggunakan solusi awal yang telah dikerjakan (Pendekatan NWC). Lakukan pengujian solusi optimal menggunakan batu loncatan atau *Stepping Stone* (SS) untuk memastikan apakah biaya transportasi tersebut telah minimum. Saat berlanjut ke pengujian optimal harus memenuhi syarat yaitu $m + n - 1$ (m = baris/gudang dan n = kolom/tujuan). Pada kasus ini telah memenuhi syarat ($2 + 4 - 1 = 5$) karena jumlah sel yang terisi adalah 5, dengan demikian dapat dilakukan pengujian menggunakan solusi optimal. Berikut merupakan hasil solusi optimal dari NWC

Tabel 7. Hasil Solusi Optimal dengan Metode SS

Sumber Tujuan	Wilayah I	Wilayah II	Wilayah III	Wilayah IV	Total BST BB-PPKM 2021
Karang Asam Ulu II (a)	13,29	11,57	12,05	5,48	54.500
		22.460	32.040		
Karang Asam Ulu II (b)	13,74	12,21	12,7	5,92	55.850
	27.940	6.040		21.870	
Total BST	27.940	28.500	32.040	21.870	

Berdasarkan Tabel 7, selanjutnya menghitung total biaya optimal maka di dapatkan

$$Z = 13,29(X_{11}) + 11,57(X_{12}) + 12,05(X_{13}) + 5,48(X_{14}) + 13,47(X_{21}) + 12,21(X_{22})$$

$$+ 12,7(X_{23}) + 5,92(X_{24})$$

$$Z = 13,29(0) + 11,57(22.460) + 12,05(32.040) + 5,48(0) + 13,47(27.940) +$$

$$12,21(6.040) + 12,7(0) + 5,92(21.870)$$

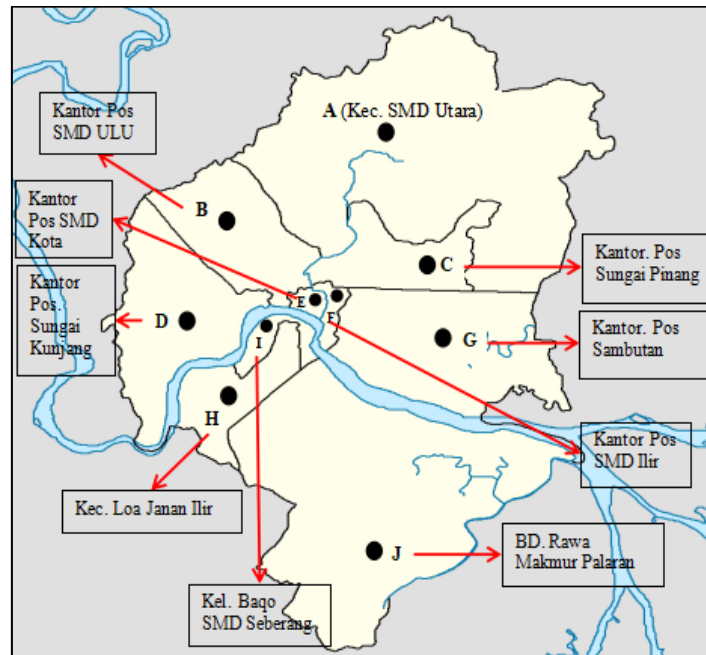
$$Z = 0 + 259.862,2 + 386.082 + 0 + 383.895,6 + 73.748,4 + 129.470,4$$

$$Z = Rp 1.233.058,6$$

Biaya distribusi setelah metode SS adalah sebesar Rp 1.233.058,6 yang sebelumnya biaya distribusi dengan metode NWC solusi awal Rp 1.238.687,6. Hasil dengan perhitungan solusi optimal memberikan biaya distribusi terkecil dari biaya distribusi awal yang memiliki selisih biaya yang sama dengan metode NWC.

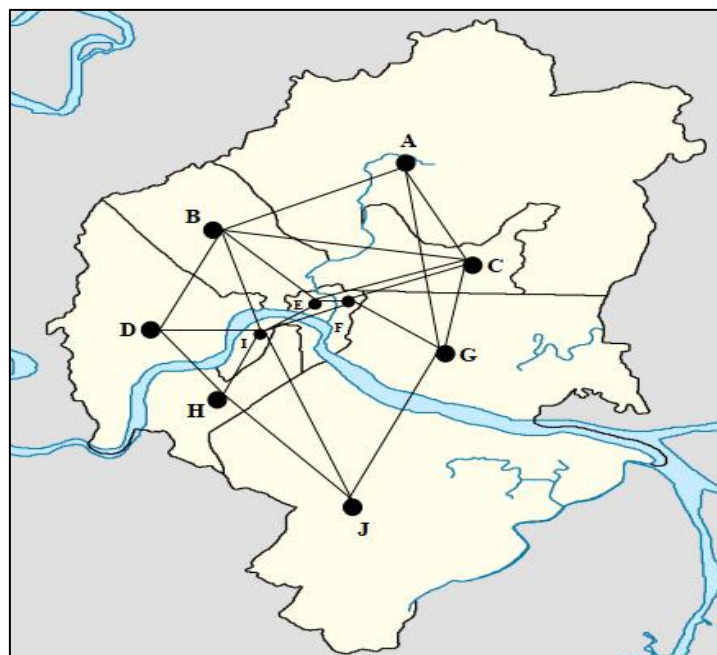
5. Melakukan pewarnaan graf menggunakan algoritma Welch-Powell pada peta wilayah Samarinda untuk memperoleh pembagian titik distribusi beras berdasarkan pewarnaan graf.

Kota samarinda memiliki 10 kecamatan yang terbagi menjadi 56 kelurahan, bantuan sosial berupa pembagian beras BST BB-PPKM tahun 2021 setiap wilayah kecamatan terdapat titik distribusi untuk pembagian beras tersebut. Peta wilayah titik distribusi beras BST BB-PPKM tahun 2021 di kota Samarinda ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Peta Wilayah Titik Distribusi Beras BST BB-PPKM 2021

Pada Gambar 2, akan diterapkan pewarnaan graf, dengan titik distribusi pada tiap kecamatan sebagai simpul (*vertex*) dan wilayah yang berbatasan langsung dengan kecamatan atau bertetangga (*adjacent*) di tiap wilayah sebagai garis (*edge*). Kecamatan (simpul) yang berbatasan langsung dengan kecamatan lain nya (simpul) dihubungkan dengan sisi yang menjadi dasar pembentukan pada graf. Sungai mahakam yang melintasi kota Samarinda asumsikan diabaikan, sehingga kecamatan-kecamatan yang terpisah oleh sungai mahakam dikatakan berbatasan langsung. Pada Gambar 3 adalah hasil konversi dari peta ke model graf yang bisa di peroleh.



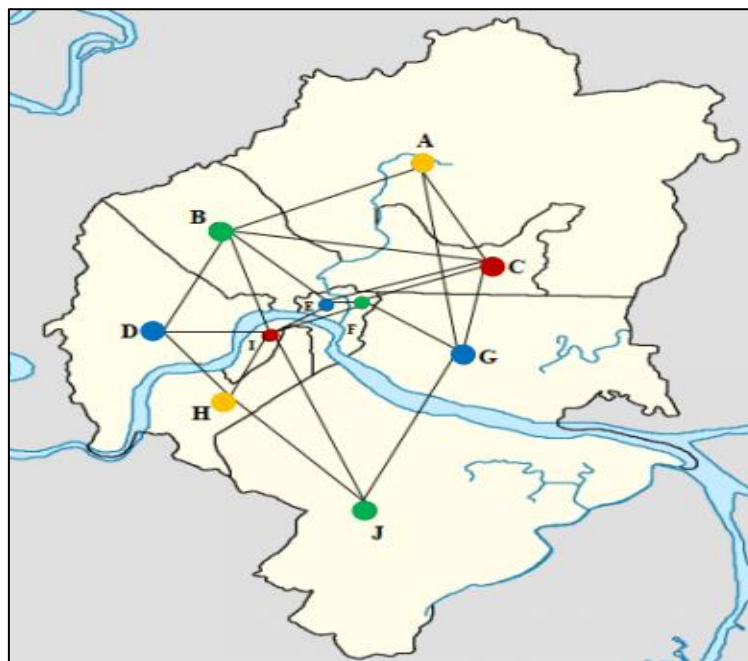
Gambar 3. Model Graf Peta Kota Samarinda di Wilayah Titik Distribusi

Berdasarkan Gambar 3, akan dibuat tabel yang memuat batas-batas wilayah secara langsung. Berikut hasil pengelompokan urutan simpul-simpul dari graf dalam derajat terbesar ke terkecil yang di tunjukkan pada Tabel 8.

Tabel 8. Hasil Pengurutan dari Derajat Tertinggi Hingga Terkecil

No	Kecamatan	Batas Kecamatan	Derajat
1	Samarinda Seberang (I)	B,D,E,F,H,J	6
2	Samarinda Ulu (B)	A,C,D,E,I	5
3	Sungai Pinang (C)	A,B,E,F,G	5
4	Samarinda Kota (E)	B,C,F,I	4
5	Samarinda Ilir (F)	C,E,G,I	4
6	Sambutan (G)	A,C,F,J	4
7	Samarinda Utara (A)	B,C,G	3
8	Sungai Kunjang (D)	B,H,I	3
9	Loa Janan Ilir (H)	D,I,J	3
10	Palaran (J)	G,H,I	3

Selanjutnya gunakan satu warna untuk mewarnai simpul pertama (yang memiliki derajat tertinggi) dan simpul-simpul lain (dalam urutan berurut) yang tidak bertetangga dengan simpul pertama. Ulangi penambahan warna-warna sampai semua simpul telah diwarnai, sehingga didapatkan hasil pewarnaan graf menggunakan algoritma Welch-Powell sebagai berikut.



Gambar 4. Pewarnaan Simpul Graf pada Wilayah Titik Distribusi

Berdasarkan pewarnaan simpul graf menggunakan algoritma Welch-Powell pada Gambar 4 dihasilkan bilangan kromatik $\chi(G)$ pada peta wilayah Samarinda sebanyak 4 buah warna, dimana warna yang sama dapat dikelompokkan menjadi 1 wilayah disitribusi.

Pengurutan warna berdasarkan algoritma Welch-Powell, daerah yang bertetangga diberi warna yang berbeda hal ini untuk menunjukkan daerah yang terletak pada gudang letaknya berdekatan dengan wilayah titik distribusi. Warna yang sama dipastikan bahwa daerah tersebut tidak berbatasan secara langsung, sehingga dapat dibentuk pengelompokan titik distribusi ditunjukkan pada Tabel 9.

Tabel 9. Pengelompokan Titik Distribusi berdasarkan Pewarnaan Graf

No	Gudang	Wilayah Distribusi	Jadwal Pengiriman	Kecamatan	Alokasi BST/Kg Beras	Total BST	Suplay BST BB-PPKM 2021
1	Karang Asam Ulu II (a)	Wilayah I	29/07/2021	Sungai Pinang	14.470	21.220	54.500
				Samarinda Seberang	6.750		
		Wilayah II	30/07/2021	Samarinda Ulu	15.120	36.780	
				Palaran	13.470		
2	Karang Asam Ulu II (b)	Wilayah III	31/07/2021	Samarinda Ilir	8.190	27.900	55.850
				Sungai Kunjang	7.590		
		Wilayah IV	01/08/2021	Samarinda Kota	5.730	24.450	
				Sambutan	14.580		
		Samarinda Utara	14.310				
			Loa Janan Ilir	10.140			

Berdasarkan hasil pengelompokan titik distribusi, 10 kecamatan kota Samarinda dikelompokkan menjadi 4 wilayah yang berbeda dalam pendistribusian beras BST BB-PPKM 2021. Untuk dapat melihat perbandingan hasil biaya pengiriman sebelum dilakukan pembagian wilayah distribusi berdasarkan pewarnaan graf, maka akan dihitung biaya transportasi dan dilanjutkan untuk mencari solusi awal menggunakan metode NWC dan SS. Biaya transportasi dari gudang menuju wilayah distribusi setelah dilakukan pembagian wilayah berdasarkan graf ditunjukkan pada Tabel 10.

Tabel 10. Biaya Distribusi dari setiap Sumber (Gudang) ke Setiap Wilayah Distribusi Setelah Pewarnaan Graf

Gudang Tujuan	Biaya (Rp) Distribusi Wilayah I/Kg Beras BST			
	Wilayah I	Wilayah II	Wilayah III	Wilayah IV
Karang Asam Ulu II (a)	9,3	12,72	8,79	11,58
Karang Asam Ulu II (b)	9,74	13,38	9,42	12

Setelah didapatkan biaya transportasi dari setiap sumber menuju wilayah distribusi, maka dapat terbentuk model transportasi yang dapat dilihat pada Tabel 11.

Tabel 11. Model Transportasi setelah Pewarnaan Graf

Sumber Tujuan	Wilayah I	Wilayah II	Wilayah III	Wilayah IV	Total BST BB-PPKM 2021 (s_i)
Karang Asam Ulu II (a)	9,3	12,72	8,79	11,58	54.500
Karang Asam Ulu II (b)	9,74	13,38	9,42	12	55.850

Tabel 11. Model Transportasi setelah Pewarnaan Graf (lanjutan)

Sumber Tujuan	Wilayah I	Wilayah II	Wilayah III	Wilayah IV	Total BST BB-PPKM 2021 (s_i)
Total BST (d_j)	21.220	36.780	27.900	24.450	$\sum d_j = \sum s_i$

Model transportasi berdasarkan Tabel 11 adalah sebagai berikut.

$$\text{minimumkan } Z = 9,73(X_{11}) + 12,72(X_{12}) + 8,79(X_{13}) + 11,15(X_{14}) + 10,17(X_{21}) + 13,38(X_{22}) + 9,42(X_{23}) + 11,58(X_{24})$$

batasan batasan:

Batasan 1: Total BST BB-PPKM 2021:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 54.500$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 55.850$$

Batasan 2: Total BST:

$$X_{11} + X_{21} = 21.060$$

$$X_{12} + X_{22} = 36.780$$

$$X_{13} + X_{23} = 27.900$$

$$X_{14} + X_{24} = 24.610$$

6. Pengujian data menggunakan penyelesaian awal berupa metode *North West Corner* (NWC) pada data distribusi setelah pewarnaan graf.

Berikut merupakan hasil penyelesaian awal pada data distribusi beras setelah pewarnaan graf yang ditunjukkan pada Tabel 12.

Tabel 12. Pengalokasian Menggunakan Metode NWC

Sumber Tujuan	Wilayah I	Wilayah II	Wilayah III	Wilayah IV	Total BST BB-PPKM 2021
Karang Asam Ulu II (a)	9,3 21.220	12,72 33.280	8,79 0	11,58 0	54.500
Karang Asam Ulu II (b)	9,64 0	13,38 3.500	9,42 27.900	12 24.450	55.850
Total BST	21.220	36.780	27.900	24.450	

Menghitung total biaya minimum dengan menggunakan persamaan (1)

$$Z = 9,3(X_{11}) + 12,72(X_{12}) + 8,79(X_{13}) + 11,58(X_{14}) + 9,74(X_{21}) + 13,38(X_{22}) + 9,42(X_{23}) + 12(X_{24})$$

$$Z = 9,3(21.2260) + 12,72(33.280) + 8,79(0) + 11,58(0) + 9,74(0) + 13,38(3.500) + 9,42(27.900) + 12(24.450)$$

$$Z = Rp 1.223.715,6$$

total biaya distribusi diperoleh sebesar Rp 1.223.715,6. Selanjutnya mencari solusi optimal pada data setelah pewarnaan graf.

7. Pengujian data menggunakan metode *Stepping Stone* (SS) sebagai solusi optimal pada data setelah pewarnaan graf.

Hasil dari solusi optimal dengan metode SS di tunjukkan pada Tabel 13 sebagai berikut.

Tabel 13. Hasil Solusi Optimal dengan Metode SS

Sumber Tujuan	Wilayah I	Wilayah II	Wilayah III	Wilayah IV	Total BST BB-PPKM 2021
Karang Asam Ulu II (a)	9,3	12,72 36.780	8,79 17.720	11,58	54.500
Karang Asam Ulu II (b)	9,74 21.220	13,38	9,42 10.180	12 24.450	55.850
Total BST	21.220	36.780	27.900	24.450	

Berdasarkan Tabel 13, dapat dihitung biaya optimal sehingga didapatkan:

$$Z = 9,3(X_{11}) + 12,72(X_{12}) + 8,79(X_{13}) + 11,58(X_{14}) + 9,74(X_{21}) + 13,38(X_{22}) + 9,42(X_{23}) + 12(X_{24})$$

$$Z = 9,3(0) + 12,72(36.780) + 8,79(17.720) + 11,58(0) + 9,74(21.220) + 13,38(0) + 9,42(10.180) + 12(24.610)$$

$$Z = Rp 1.219.578$$

Biaya distribusi setelah metode SS sebesar Rp 1.219.578 yang sebelumnya biaya distribusi dengan metode NWC solusi awal Rp 1.223.715,6.

PENUTUP

Hasil Analisis optimalisasi distribusi beras BST BB-PPKM pada tahun 2021 dengan pewarnaan simpul graf memberikan solusi optimal dalam pendistribusian beras BST BB-PPKM 2021 ke setiap penerima manfaat di kota Samarinda. Dari hasil analisis, diketahui biaya distribusi awal beras BST BULOG sebesar Rp 1.238.687,6. Biaya distribusi sebelum pewarnaan graf dengan menggunakan metode NWC sebagai solusi awal diperoleh biaya distribusi sebesar Rp 1.238.687,6. Selanjutnya, solusi awal NWC tersebut dioptimalkan dengan menggunakan metode SS dan didapatkan biaya sebesar Rp 1.233.058,6. Biaya distribusi beras BST setelah pewarnaan graf menggunakan metode NWC menghasilkan solusi awal biaya sebesar Rp 1.223.715,6. Selanjutnya, solusi awal NWC tersebut dioptimalkan dengan menggunakan metode SS dan didapatkan biaya sebesar Rp 1.219.578. Dapat dilihat bahwa perhitungan biaya distribusi beras BST menggunakan pewarnaan graf dapat menghemat biaya sebesar Rp 13.480 dibandingkan dengan perhitungan biaya distribusi beras BST menggunakan pewarnaan graf dan dapat menghemat biaya sebesar Rp 19.109,6 dibandingkan dengan perhitungan biaya distribusi awal beras BST.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Rahman, M. R. (2017). Implementasi Metode NWC Dan Modi Dalam Pengoptimalan Biaya Pendistribusian Pupuk (Studi Kasus: PT. Perkebunan Rimba Ayu). *Majalah Ilmiah INTI*, 12(2), 261-265.
- [2] Setiawan, D. A., Suyitno, A., & Arifudin, R. (2016). Penerapan Graf Pada Persimpangan Menggunakan Algoritma Welch Powell Untuk Optimalisasi Pengaturan *Traffic Light*. *UNNES Journal of Mathematics*, 2, 145-152.
- [3] Fatimah, N. L., & Wibawanto, H. (2015). Implementasi Pengoptimalan Biaya Transportasi Dengan *North West Corner Method* (NWCM) Dan *Stepping Stone Method* (SSM) Untuk Distribusi Raskin Pada Perum Bulog Sub Divre Semarang. *Edu Komputika Journal*, 2(1), 48-54.
- [4] Syam, R., Sukarna, & Asyhari, M. N. (2016). Model Transportasi Dan Terapannya Dalam Optimalisasi Biaya Distribusi Beras Miskin Di Kota Makassar Oleh Perum Bulog Sub Divre Makassar Tahun 2016. *Journal Of Mathemarics, Computation, and Statistics*, 2(2), 126-140.
- [5] Bulog. (2022). *Perum Bulog*. Retrieved Februari 04, 2022, from <http://www.bulog.co.id/jejak-langkah-perusahaan/#>.
- [6] Kanthi, Y. A., & Kristanto, B. K. (2020). Implementasi Metode *North West Corner* Dan *Stepping Stone* Pada Pengiriman Barang Galeri Bimasakti. *Jurnal Teknologi Informasi dan Ilmu Komputer (JTik)*, 7(4), 845-852.
- [7] Listiyana, E., & Hariyanto, S. (2008). Sifat-Sifat Graf. *Jurnal Matematika*, 11(3), 111-114.
- [8] Azizah, N. L., & Suryawinata, M. (2018). Aplikasi Pewarnaan Graf Untuk Optimalisasi Distribusi Raskin Di Kabupaten Sidoarjo. *Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika*, 2(1), 31-40.
- [9] Meflinda, A., & Mahyarni. (2011). *Operations Research (Riset Operasi)*. Riau: Ur Press.
- [10] Syaifuddin, D. T. (2011). *Riset Operasi (Aplikasi Quantitative Analysis for Management)*. Malang: Percetakan CV Citra Malang.
- [11] Putra, F. S., Darmaji, & Soetrisno. (2017). Implementasi Pewarnaan Graf Menggunakan Algoritma Welch Powell Untuk Simulasi Penerapan Frekuensi Radio Di Jawa Timur. *Jurnal Sains dan Seni ITS*, 6(2), 2337-3520.
- [12] Trihudyatmanto, M. (2018). *Riset Operasi (Operations Research) & Penyelesaian Menggunakan Software WinQSB*. Pekalongan: NEB.
- [13] Mulyono, S. (2017). *Riset Operasi* (2 ed.). Jakarta: Mitra Wacana Media.
- [14] Munir, R. (2012). *Matematika Diskrit (Revisi Kelima)*. Bandung: Informatika.
- [15] Himayati, A. I., Alfiana, K., Putra, M. A., & Utami, R. (2020). Aplikasi Pewarnaan Graf Dengan Metode Welch Powell Pada Pembuatan Jadwal Ujian Proposal Skripsi Program Studi Farmasi Universitas Muhammadiyah Kudus. *Jurnal Ilmu Komputer dan Matematika*, 1(2), 32-39.
- [16] Putra, F. S., Darmaji, & Soetrisno. (2017). Implementasi Pewarnaan Graf Menggunakan Algoritma Welch Powell Untuk Simulasi Penerapan Frekuensi Radio Di Jawa Timur. *Jurnal Sains dan Seni ITS*, 6(2), 2337-3520.
- [17] Harianto, K., & Fatdha, T. E. (2015). Penerapan Pewarnaan Simpul Graf Untuk Menentukan Jadwal Ujian Skripsi Pada STMIK Amik Riau Menggunakan Algoritma Welch Powell. *Sains dan Teknologi Informasi*, 1(2), 48-54.