Volume 2 No 1 (2023) 57-65
http://jurnal.fmipa.unmul.ac.id/index.php/Basis

Penerapan Aljabar Max-Plus pada Pengaturan Durasi Waktu Lalu Lintas di Simpang Empat Air Putih Samarinda

Leniy Eka Watiy [1], Syaripuddin Syaripuddin[2,*], Qonita Qurrota A'yun[3]

[1,2,3] *Laboratorium Matematika Komputasi, Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Mulawarman*

Dikirim: Maret 2023; Diterima: Maret 2023; Dipublikasi: Maret 2023

Alamat Email Korespondesi: syarifrahman2014@gmail.com

Abstrak
Aljabar max-plus dapat digunakan untuk memodelkan dan menganalisis masalah jaringan secara aljabar. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui penerapan aljabar max-plus pada pengaturan durasi waktu lampu lalu lintas di simpang empat Air Putih Samarinda. Data yang digunakan pada penelitian ini merupakan data primer berupa durasi waktu lampu lalu lintas. Kemudian, disusun graf yang menggambarkan kondisi persimpangan dan merepresentasikan arah dari pergerakan masing-masing jalur. Selanjutnya disusun aturan sinkronisasi yang sesuai dengan graf sehingga diperoleh model aljabar max-plus. Dari model aljabar max-plus, dapat diperoleh pengaturan waktu nyala lampu lalu lintas dan keperiodikannya berdasarkan hasil perhitungan vektor eigen dan nilai eigen model. Durasi waktu lampu lalu lintas yang diperoleh dari hasil perhitungan ini akan dianalisis dengan membandingkan hasil perhitungan dengan data awal.

Kata Kunci:
Aljabar max-plus, Algoritma power, Lampu lalu lintas

PENDAHULUAN

Kemacetan lalu lintas telah terjadi di mana-mana terutama di kota-kota besar [1]. Meningkatnya jumlah kendaraan meyebabkan bertambahnya volume kendaraan yang mengakibatkan kemacetan di jam-jam tertentu seperti pagi hari dan sore hari [5]. Salah satu titik rawan terjadinya kemacetan adalah persimpangan. Banyak konflik lalu lintas yang mungkin terjadi di persimpangan. Untuk mengurangi konflik tersebut maka perlu dilakukan pengaturan lalu lintas guna mengoptimalkan fungsi simpang [10]

Salah satu usaha untuk mengurangi terjadinya konflik di persimpangan jalan adalah dengan dipasang lampu lalu lintas (*traffic light*) [4]. Akan tetapi masih banyak ditemui lampu lalu lintas dengan durasi waktu lampu merah yang lama dan durasi waktu lampu hijau yang singkat. Hal ini menimbulkan antrean yang menumpuk sehingga terjadi kemacetan. Oleh karena itu dibutuhkan sebuah pengoptimalisasian dan pengintegrasian pengaturan lampu lalu lintas, khususnya di persimpangan yang memiliki kepadatan kendaraan yang tinggi.

Aljabar max-plus dapat digunakan untuk memodelkan dan menganalisis masalah jaringan secara aljabar, seperti masalah penjadwalan dan sistem antrean. Aljabar max-plus merupakan semifield komutatif atas himpunan $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dengan $\mathbb{R}$ himpunan semua bilangan riil yang dilengkapi dengan operasi maksimum, dinotasikan dengan $\oplus$ dan operasi penjumlahan yang dinotasikan dengan $\otimes$ [8].

Terdapat beberapa penelitian yang sudah dilaksanakan terkait masalah lalu lintas menggunakan aljabar max-plus. Misalnya [6] meneliti tentang penggunaan aljabar max-plus dalam pengaturan waktu nyala lampu lalu lintas, kemudian [3] meneliti tentang analisis durasi nyala lampu lalu lintas pada persimpangan berdekatan dengan penerapan aljabar max-plus dan [10] meneliti tentang penerapan aljabar max-plus pada pengaturan sistem antrean traffic light.

Berdasarkan uraian di atas, penulis ingin mengkaji lebih dalam mengenai sistem persamaan linear aljabar max-plus serta penerapannya pada sistem antrian lampu lalu lintas dan penerapannya pada pengaturan durasi waktu lampu lalu lintas. Studi teori Aljabar max-plus digunakan untuk memodelkan dan menganalisis masalah jaringan secara aljabar, seperti masalah penjadwalan dan sistem antrean. Berdasarkan karakteristik permasalahan tersebut penelitian ini dikaji dengan menggunakan model aljabar max-plus untuk menenyimulasikan pengaturan lampu lalu lintas di simpang empat Air Putih Samarinda.

Batasan masalah pada penelitian ini adalah diasumsikan kondisi lalu lintas pada waktu sibuk pagi dan sore yaitu pukul 07.00 – 09.00 WITA dan 15.00-17.00 WITA pada hari kerja dan tidak ada kegiatan besar di sekitar lokasi dan faktor penyebab kemacetan dalam penelitian ini dibatasi pada durasi waktu lampu lalu lintas. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui penerapan aljabar max-plus pada pengaturan durasi waktu lampu lalu lintas di simpang empat Air Putih Samarinda yang diharapkan dapat bermanfaat untuk meminimalisir kemacetan.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian dengan pengembangan ilmu aljabar max-plus. Pada penelitian ini dipilih simpang empat Air Putih Samarinda sebagai objek penelitian. Simpang ini dipilih karena merupakan pertemuan arus kendaraan dari empat ruas jalan utama di Kota Samarinda, yaitu jalan Ir. H. Juanda, jalan P. Antasari, jalan Mayjend. MT. Haryono dan jalan P. Suryanata. Pada jam sibuk pagi dan sore sering terjadi antrean kendaraan di simpang tersebut. Data diperoleh dari observasi langsung ke lapangan. Pada penelitian ini tahapan analisis data yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Mengkonstruksi graf berarah pada sistem lampu lalu lintas.
   Penelitian dimulai dari penggambaran sistem lampu lalu lintas yang kemudian dikonstruksi ke dalam bentuk graf yang menjelaskan keadaan dari sistem tersebut. Kemudian ditentukan aturan arah sistem yang berlaku dari awal sampai akhir sistem. Dari graf berarah kemudian disusun model aljabar max-plus (aturan sinkronisasi) pada sistem lampu lalu lintas.
2. Mengkonstruksi model berdasarkan aturan aljabar max-plus $x(k+1) = A \otimes x(k)$.
   Aturan aljabar max-plus terutama pada penerapannya di sistem antrean dan penjadwalan memiliki bentuk $(k+1) = A \otimes x(k)$. Sistem tersebut menjadi acuan untuk penyesuaian model persimpangan dan membentuk matriks sesuai dengan persamaan yang telah diperoleh.
3. Menghitung nilai eigen dan vektor eigen atas matriks aljabar max-plus.
   Proses selanjutnya yaitu mencari nilai eigen dan vektor eigen atas matriks yang menggambarkan kondisi sistem lampu lalu lintas dengan menggunakan algoritma

khusus pada aljabar max-plus yang menjadi pembahasan awal pada penelitian ini, yaitu dengan menggunakan algoritma power. Algorima power dipilih karena memudahkan proses pencarian nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks dengan langkah-langkah yang sudah ditentukan.

4. Membandingkan hasil durasi lampu lalu lintas lama dengan durasi baru.
   Proses terakhir yaitu analisis hasil dari sistem lampu lalu lintas untuk mengetahui durasi waktu lampu lalu lintas lama dengan yang baru

HASIL DAN PEMBAHASAN

Sebelum membahasa lebih jauh mengenai pemodelan aljabar max-plus akan diberikan terlebih dahulu definisi dan notasi dari aljabar max-plus sebagai berikut.

Definisi 1. [9] *Untuk* $\mathbb{R}$ *himpunan semua bilangan riil, diberikan* $\mathbb{R}_{max} = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ *dengan* $\varepsilon \coloneqq -\infty$ *dan* $e \coloneqq 0$. *Untuk setiap* $x, y \in \mathbb{R}_{max}$, *didefinisikan operasi* $\oplus$ *dan* $\otimes$ *sebagai berikut*

$$x \oplus y \coloneqq max\{x, y\}$$
$$x \otimes y \coloneqq x + y$$

Selanjutnya, himpunan $\mathbb{R}_{max}$ *dengan operasi* $\oplus$ *dan* $\otimes$ *sebagai mana didefinisikan di atas disebut dengan Aljabar Max-Plus, dinotasikan dengan* $(\mathbb{R}_{max},\oplus,\otimes)$.

Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathbb{R}_{max}$ dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam $\mathbb{R}_{max}^{n\times m}$ seperti dalam definisi berikut.

Definisi 2. [7] *Diberikan* $\mathbb{R}_{max}^{n\times m} := \{A = (A_{ij}) | A_{ij} \in \mathbb{R}_{max},\ i \in \underline{n}\ dan\ j \in \underline{m}\}$

i) *Diketahui* $\alpha \in \mathbb{R}_{max}, A, B \in \mathbb{R}_{max}^{n\times m}$. *Didefinisikan*

$$\alpha \otimes A = \alpha \otimes a_{i,j}$$

ii) *Diketahui skalar* $\alpha \in \mathbb{R}_{max}, A, B \in \mathbb{R}_{max}^{n\times m}$. *Didefinisikan*

$$\begin{aligned}[A \oplus B]_{i,j} &= a_{i,j} \oplus b_{i,j} \\ &= max\{a_{i,j}, b_{i,j}\}\end{aligned}$$

iii) *Diketahui* $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times p}$ *dan* $B \in \mathbb{R}_{max}^{p\times m}$. *Didefinisikan*

$$\begin{aligned}[A \otimes B]_{i,j} &= \bigoplus_{k=1}^{p} a_{i,k} \otimes b_{k,j} \\ &= \max_{k\in \underline{p}}\{a_{i,j}, b_{i,j}\}\end{aligned}$$

iv) *Diketahui* $k \in \mathbb{N}, k \neq 0, A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$. *Didefinisikan*

$$\begin{aligned}\left[A^{\otimes k}\right]_{i,j} &= \bigoplus_{r_{k-1}=1}^{n} a_{i,r_{k-1}} \cdots \left(\bigoplus_{r_1=1}^{n} \left(a_{r_2,r_1} \otimes a_{r_1,j}\right)\right) \\ &= \max_{1\le r_1,\ldots,r_{k-1}\le n}\{a_{i,r_{k-1}} + \cdots + a_{r_2,r_1} + a_{r_1,j}\}\end{aligned}$$

Nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian dari matriks bujursangkar A berukuran $n \times n$ sebagaimana dijumpai dalam aljabar linear juga dijumpai dalam aljabar max-plus, yaitu bila diberikan suatu persamaan:

$$A \otimes \boldsymbol{x} = \lambda \otimes \boldsymbol{x}$$

Nilai eigen dari matriks persegi A diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 3. [9] *Jika keadaan awal* $\boldsymbol{x}(0) \neq \varepsilon$ *sistem persamaan memenuhi* $\boldsymbol{x}(p) = c \otimes \boldsymbol{x}(q)$ *untuk beberapa bilangan bulat* p *dan* q *dengan* $p > q \geq 0$ *dan beberapa bilangan rill c, maka*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\boldsymbol{x}(k)}{k} = (\lambda\ \lambda\ \ldots\ \lambda)^T$$

dengan $\lambda = \frac{c}{p-q}$ *selanjutnya* λ *adalah suatu nilai eigen dari matriks* A *dengan vektor eigen diberikan oleh*

$$\boldsymbol{v} = \bigoplus_{i=1}^{p-q} \left(\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes \boldsymbol{x}(q+i-1)\right)$$

Bukti. Misalkan $l = p - q$, didapat

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{\boldsymbol{x}(k)}{k} &= \lim_{k\to\infty} \frac{\boldsymbol{x}(q+il)}{q+il} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{c^{\otimes^i} \otimes \boldsymbol{x}(q)}{q+il} \\
&= \left(\lim_{k\to\infty} \frac{ic}{q+il}\right) \otimes \left(\lim_{k\to\infty} \frac{\boldsymbol{x}(q)}{q+il}\right) \\
&= \left(\lim_{k\to\infty} \frac{c^{\otimes^i}}{q+il}\right) \otimes \left(\lim_{k\to\infty} \frac{\boldsymbol{x}(q)}{q+il}\right) \\
&= \frac{c}{l} \otimes \boldsymbol{0} \ (sebab\ \boldsymbol{x}(q) \in \mathbb{R}^n)
\end{aligned}$$

Dengan vektor

$$\boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jika bila $\lambda = \frac{c}{p-q}$, maka vektor waktu *cycle* adalah

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\boldsymbol{x}(k)}{k} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{bmatrix}$$

Selanjutnya bila

$$\boldsymbol{v} = \bigoplus_{i=1}^{p-q} \left(\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes \boldsymbol{x}(q+i-1)\right),$$

Maka

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{A} \otimes \left(\bigoplus_{i=1}^{p-q} \left(\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes \boldsymbol{x}(q+i-1)\right)\right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{p-q} A \otimes \left(\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes \boldsymbol{x}(q+i-1)\right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{p-q} \lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes \left(A \otimes \boldsymbol{x}(q+i-1)\right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{p-q} \lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes \boldsymbol{x}(q+i) \\
&= \bigoplus_{j=2}^{p-q+1} \lambda^{\otimes(p-q-j+1)} \otimes \boldsymbol{x}(q+j-1) \\
&= \lambda \otimes \left(\bigoplus_{j=2}^{p-q+1} \left(\lambda^{\otimes(p-q-j)} \otimes \boldsymbol{x}(q+j-1)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$= \lambda \otimes \left(\bigoplus_{j=1}^{p-q} \left(\lambda^{\otimes(p-q-j)} \otimes \boldsymbol{x}(q+j-1) \right) \right) = \lambda \otimes \boldsymbol{v}$$

Persamaan terakhir diperoleh dari

$$\boldsymbol{x}(p) = \lambda^{\otimes(p-q)} \otimes \boldsymbol{x}(q)$$

Yang berakibat bahwa

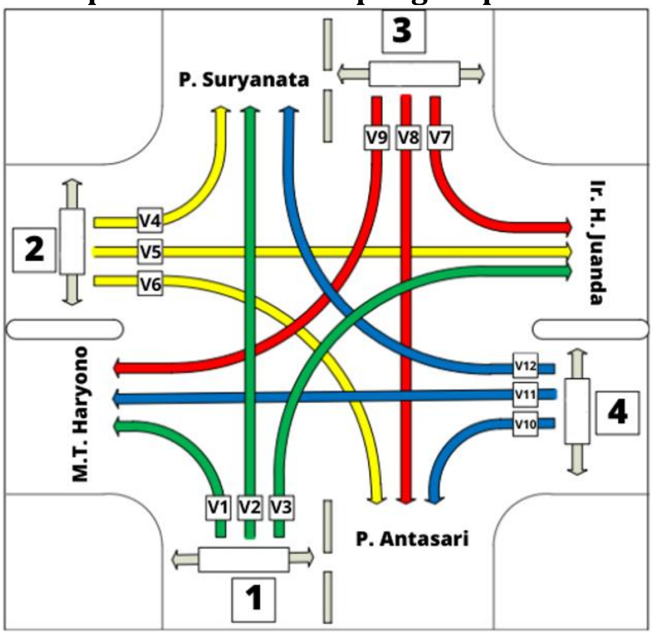
$$\lambda^{\otimes(-1)} \otimes \boldsymbol{x}(p) = \lambda^{\otimes(p-q-1)} \otimes \boldsymbol{x}(q)$$ ■

Berdasarkan Teorema 3 dapat dijabarkan menjadi suatu algoritma yang dapat digunakan untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks persegi yaitu algoritma power. Algoritma ini mempermudah penyelesaian model aljabar max-plus.

Algoritma Power [8]

1. Memulai dari sebarang vektor awal $\boldsymbol{x}(0) \neq \varepsilon$.
2. Iterasi $\boldsymbol{x}(k+1) = A \otimes \boldsymbol{x}(k)$ sampai ada bilangan bulat $p > q \geq 0$ dan bilangan rill c sehingga suatu perilaku periodik terjadi, yaitu $\boldsymbol{x}(p) = c \otimes \boldsymbol{x}(q)$.
3. Mecari nilai $\lambda = \frac{c}{p-q}$.
4. Mencari calon vektor eigen dengan $\boldsymbol{v} = \bigoplus_{i=1}^{p-q} \left(\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes \boldsymbol{x}(q+i-1) \right)$.
5. Tunjukkan bahwa $A \otimes \boldsymbol{v} = \lambda \otimes \boldsymbol{v}$ Jika terpenuhi maka $\boldsymbol{v}$ merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ selanjutnya algoritma berhenti.
6. Jika tidak, mulai $\boldsymbol{x}(k+1) = A \otimes \boldsymbol{x}(k)$ dengan $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{v}$ sampai ada bilangan $r \geq 0$, sehingga $\boldsymbol{x}(r+1) = \lambda \otimes \boldsymbol{x}(r)$. Maka $\boldsymbol{x}(r)$ merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ.

Pembahasan Sistem Lampu Lalu Lintas Simpang Empat Air Putih



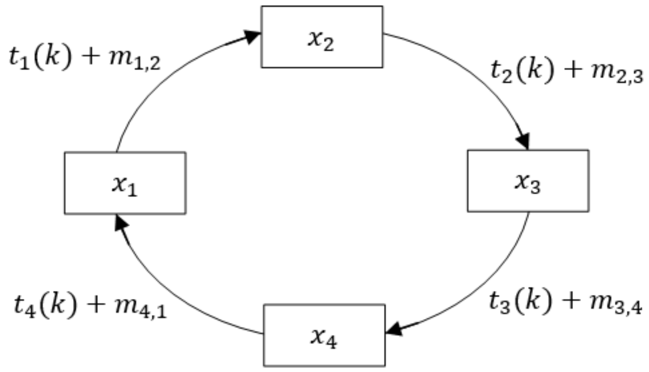
Gambar 1. Sistem Lampu Lalu Lintas Simpang Empat Air Putih Samarinda

Gambar 1 merepresentasikan arus-arus pada simpang empat Air Putih Samarinda dan aturan yang diterapkan pada pergerakan arus simpang tersebut. Jenis data yang dikumpulkan antara lain data durasi waktu hijau, durasi waktu kuning, durasi waktu merah dan durasi waktu selang lampu lalu lintas. Pada penelitian ini yang menjadi populasi adalah durasi waktu lampu lalu lintas di simpang empat Air Putih Samarinda.

Tabel 1. Durasi Waktu Lampu Lalu Lintas yang Diterapkan Sekarang

Simpang	Durasi Waktu Hijau (detik)	Durasi Waktu Kuning (detik)	Durasi Waktu Selang (detik)	Durasi Waktu Merah (detik)
1	38	5	6	143
2	33	5	6	148
3	48	5	6	133
4	38	5	6	143
Total 1 Fase		186 detik		

Data primer Tabel 1 tersebut diambil pada 1 Maret 2022, pukul 07.00-08.30 WITA dan pukul 16.00-17.30 WITA. Dari dua kali pengamatan diketahui bahwa tidak terdapat perbedaan durasi waktu lampu lalu lintas antara pagi hari dan sore hari.



Gambar 2. Graf Bobot Sistem Lampu Lalu Lintas Simpang Empat Air Putih Samarinda

Graf bobot pada Gambar 2 menunjukkan bahwa sistem simpang empat Air Putih Samarinda terhubung dengan kuat karena terdapat lintasan pada setiap titik dari fase awal ke fase akhir suatu siklus. Selanjutnya akan dikonstruksi model aljabar max plus (aturan sinkronisasi) pada sistem lampu lalu lintas yang dirancang dalam graf bobot.

Dalam mengkonstruksi model pada sistem lampu lalu lintas, didefinisikan:

$x_i(k)$ = Waktu awal hijau menyala pada simpang i di fase ke-k, $i \in 1,2,3,4, k \in \mathbb{R}$
$t_i(k)$ = Durasi waktu hijau pada simpang i di fase ke-k, $i \in 1,2,3,4, k \in \mathbb{R}$
$m_{i,j}$ = Durasi waktu selang antara akhir lampu hijau simpang i dan awal lampu hijau simpang $j, i, j \in 1,2,3,4$

Berdasarkan variabel tersebut, dapat dibentuk model matematika sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \max(x_4(k) + t_4(k) + m_{4,1}, -\infty) \\ x_2(k+1) &= \max(x_1(k) + t_1(k) + m_{1,2}, -\infty) \\ x_3(k+1) &= max(x_2(k) + t_2(k) + m_{2,3}, -\infty) \\ x_4(k+1) &= max(x_3(k) + t_3(k) + m_{3,4}, -\infty) \end{aligned} \tag{1}$$

untuk $k = 0,1,2,3,4$

Model (1) dapat ditulis dengan notasi aljabar max-plus sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_4(k) \otimes t_4(k) \otimes m_{4,1} \oplus -\infty \\ x_2(k+1) &= x_1(k) \otimes t_1(k) \otimes m_{1,2} \oplus -\infty \\ x_3(k+1) &= x_2(k) \otimes t_2(k) \otimes m_{2,3} \oplus -\infty \\ x_4(k+1) &= x_3(k) \otimes t_3(k) \otimes m_{3,4} \oplus -\infty \end{aligned} \tag{2}$$

untuk $k = 0,1,2,3,4$

Model (2) dapat ditulis dalam bentuk persamaan matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & t_4(k)+m_{4,1} \\ t_1(k)+m_{1,2} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & t_2(k)+m_{2,3} & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & t_3(k)+m_{3,4} & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \boldsymbol{x}(k) \oplus \boldsymbol{\varepsilon}$$

untuk $k = 0,1,2,3,4$ dengan $\boldsymbol{x}(k) = [x_1(k)\ x_2(k)\ x_3(k)\ x_4(k)]^T$ dan $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon\ \varepsilon\ \varepsilon\ \varepsilon]^T$ atau dapat ditulis

$$\boldsymbol{x}(k+1) = A \otimes \boldsymbol{x}(k) \oplus B$$

Dari model (2) diperoleh entri dari matriks A adalah

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 44 \\ 39 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 54 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 44 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dan vektor eigen atas matriks A dapat dicari dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Memulai dari sebarang vektor awal $\boldsymbol{x}(0) \neq \varepsilon$.

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Iterasi $\boldsymbol{x}(k+1) = A \otimes \boldsymbol{x}(k)$ sampai ada bilangan bulat $p > q \geq 0$ dan bilangan rill c sehingga suatu perilaku periodik terjadi, yaitu $\boldsymbol{x}(p) = c \otimes \boldsymbol{x}(q)$.

   Iterasi pertama

$$A \otimes x(0) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 44 \\ 39 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 54 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 44 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 39 \\ 54 \\ 44 \end{bmatrix}$$

   Iterasi kedua

$$A \otimes x(1) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 44 \\ 39 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 54 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 44 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 44 \\ 39 \\ 54 \\ 44 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 88 \\ 83 \\ 93 \\ 98 \end{bmatrix}$$

   Iterasi tersebut berlanjut sampai menemukan kondisi $x(p) = c \otimes x(q)$ dalam algoritma power.

$$\begin{array}{ccccccc} x(0) & x(1) & x(2) & x(3) & x(4) & x(5) & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 44 \\ 39 \\ 54 \\ 44 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 88 \\ 83 \\ 93 \\ 98 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 142 \\ 127 \\ 137 \\ 137 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 181 \\ 181 \\ 181 \\ 181 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 225 \\ 220 \\ 235 \\ 225 \end{bmatrix} & \ldots \end{array}$$

   Dari proses iterasi yang dilakukan, maka didapatkan hasil yang memenuhi algoritma power yaitu

$$\begin{bmatrix} 181 \\ 181 \\ 181 \\ 181 \end{bmatrix} = 181 \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x(4) = 181 \otimes x(0)$$

3. Mecari nilai $\lambda = \frac{c}{p-q}$.

$$\lambda = \frac{c}{p-q} = \frac{181}{4-0} = 45{,}25$$

4. Mencari calon vektor eigen dengan $\boldsymbol{v} = \bigoplus_{i=1}^{p-q} \left(\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes \boldsymbol{x}(q+i-1)\right)$.
   Jadi vektor eigen yang bersesuaian adalah
$$\boldsymbol{v} = \bigoplus_{i=1}^{4} \left(45{,}25^{\otimes 4-i} \otimes \boldsymbol{x}(i-1)\right) = \begin{bmatrix} 142 \\ 137{,}75 \\ 144{,}5 \\ 143{,}25 \end{bmatrix}$$
5. Munjukkan bahwa $A \otimes \boldsymbol{v} = \lambda \otimes \boldsymbol{v}$ Jika terpenuhi maka $\boldsymbol{v}$ merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ selanjutnya algoritma berhenti.
$$A \otimes \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 44 \\ 39 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 54 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 44 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 142 \\ 137{,}75 \\ 144{,}5 \\ 143{,}25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 187{,}25 \\ 181 \\ 191{,}75 \\ 188{,}5 \end{bmatrix}$$
$$\lambda \otimes \boldsymbol{v} = 45{,}25 \otimes \begin{bmatrix} 142 \\ 137{,}75 \\ 144{,}5 \\ 143{,}25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 187{,}25 \\ 181 \\ 191{,}75 \\ 188{,}5 \end{bmatrix}$$
   dengan demikian $A \otimes \boldsymbol{v} = \lambda \otimes \boldsymbol{v}$. Jadi vektor eigen atas matriks A yang bersesuaian dengan λ = 45,25 adalah $\begin{bmatrix} 142 \\ 137{,}75 \\ 144{,}5 \\ 143{,}25 \end{bmatrix}$.

Vektor eigen yang diperoleh digunakan untuk menentukan waktu awal nyala lampu lalu lintas. Waktu awal nyala lampu lalu lintas ini diperoleh dengan mengurangkan setiap elemen vektor eigen dengan elemen vektor eigen terkecil yaitu 137,75 kemudian hasil pengurangannya dibulatkan ke satuan terdekat. Sedangkan, nilai eigen yang diperoleh digunakan untuk menentukan keperiodikan waktu nyala lampu lalu lintas tersebut. Pembulatan juga dilakukan terhadap nilai eigen yang menggambarkan periode waktu nyala lampu lalu lintas sehingga diperoleh periode 45 detik. Pengaturan waktu nyala lampu lalu lintas untuk setiap fase dituliskan pada Tabel 2 dengan waktu awal nyala lampu lalu lintas aliran kendaraan pada fase ke-1 yaitu 0:00:00. Pada Tabel 2, waktu nyala hijau ditandai dengan warna hijau dan waktu nyala merah ditandai dengan warna merah.

Tabel 2. Waktu Periodik Lampu Lalu Lintas (menit.detik)

Simpang	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4	Fase 5	dst
1	00.04	00.49	01.34	02.19	03.04	...
2	00.00	00.45	01.30	02.15	03.00	...
3	00.07	00.52	01.37	02.22	03.07	...
4	00.06	00.51	01.36	02.21	03.06	...

Dari analisis model simpang Simpang empat Air Putih Samarinda diperoleh durasi lampu lalu lintas baru sebagai berikut.

Tabel 3. Durasi Waktu Hijau Baru (detik)

Simpang i	Akhir Hijau Menyala Pada Simpang $i+1$	Awal Hijau Menyala Pada Simpang i	Durasi Waktu Selang	Durasi Waktu Hijau
1	45	4	6	$45-4-6=35$
2	97	45	6	$97-45-6=46$
3	141	97	6	$141-97-6=38$
4	184	141	6	$184-141-6=37$

PENUTUP

Waktu nyala lampu lalu lintas di persimpangan dapat dimodelkan menggunakan aljabar max-plus. Penentuan durasi waktu nyala lampu lalu lintas menggunakan aljabar max-plus memerlukan dua input, yaitu durasi waktu hijau dari masing-masing simpang dan durasi waktu selang antar simpang. Dari model aljabar max-plus dapat ditentukan vektor eigen dan nilai eigen yang akan digunakan untuk menentukan waktu nyala lampu lalu lintas serta keperiodikannya.

Saran diharapkan pada penelitian selanjutnya dapat menggunakan waktu rekayasa dan menambahkan faktor-faktor lain seperti volume kendaraan, lebar badan jalan, panjang antrian kendaraan dan lain-lain yang menyebabkan terjadinya antrian kendaraan di simpang empat Air Putih Samarinda agar hasil perhitungan dapat dibandingkan.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Hanna, R., Kreindler, G. dan Olken, B.A. (2017). Citywide effects of high-occupancy vehicle restrictions: Evidence from "three-in-one" in Jakarta. *Journal Science*. 357(6346), 89-93.

[2] Hurit, R.U. dan Rudhito, A. (2019). Max-plus algebraic modeling of three crossroad traffic queue systems with one underpass. *Journal of Physics*: *Conference Series 1307 012013.*

[3] Iswati, R.P.E. (2017). *Analisis Durasi Nyala Lampu Lalu Lintas pada Persimpangan Berdekatan Dengan Penerapan Aljabar Max-Plus (Skripsi)*. Universitas Negeri Yogyakarta.

[4] Lazuardi, Rizki, Musthofa. (2013). Pengaturan Durasi Waktu Nyala Lampu Lalu Lintas di Persimpangan Gondomanan dengan Menggunakan Aljabar Max-Plus. *Jurnal Pendidikan Matematika dan Sains*, 2(4).

[5] Mufidah, N. (2018). *Pemodelan Antrean Kendaraan Bermotor Menggunakan Model Antrean M/M/1 di Simpang Tiga Ringroad Utara Yogyakarta Pada Pagi Hari dan Sore Hari (Skripsi)*. Universitas Islam Indonesia.

[6] Pradanti, P. dan Sari, M.R.A. (2016). Penggunaan aljabar max-plus dalam pengaturan waktu nyala lampu lalu lintas. *Prosiding Seminar Nasional Aljabar, Penerapan dan Pembelajarannya.* Universitas Sanata Dharma.

[7] Prastiwi, L. dan Listiana, Y. The Aplication of Max-Plus Algebra to Determine The Optimal Time of Ikat Kupang Woven Production. *International Journal Of Computing Science And Applied Mathematics,* 3(2), 77-80.

[8] Subiono. (2015). *Aljabar Min-Max Plus dan Terapannya (Modul)*. Surabaya: Jurusan Matematika FMIPA ITS.

[9] Wibowo, A., Wijayanti, K. dan Veronica, R. (2018). Penerapan Aljabar Max-Plus pada Pengaturan Sistem Antrean Traffic Light. *UNNES Journal of Mathematics*, 7(2), 192-205.